m-svodljivost

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

April 15, 2018

Pregled predavanja

m-svodljivost

Definicija

Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Skup A je **m-svodljiv** na B, u oznaci $A \leq_{\mathrm{m}} B$, ako postoji unarna rekurzivna funkcija f takva da je za svako $x \in \mathbb{N}$ važi:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

m-svodljivost

Definicija

Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Skup A je **m-svodljiv** na B, u oznaci $A \leq_{\mathrm{m}} B$, ako postoji unarna rekurzivna funkcija f takva da je za svako $x \in \mathbb{N}$ važi:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

NAPOMENE:

1. Indeks m, u oznaci $\leq_{\mathrm{m}}$, skraćuje izraz 'many to one' koji ističe da funkcija f ne mora biti 1-1.

m-svodljivost

Definicija

Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Skup A je **m-svodljiv** na B, u oznaci $A \leq_{\mathrm{m}} B$, ako postoji unarna rekurzivna funkcija f takva da je za svako $x \in \mathbb{N}$ važi:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

NAPOMENE:

1. Indeks m, u oznaci $\leq_{\mathrm{m}}$, skraćuje izraz 'many to one' koji ističe da funkcija f ne mora biti 1-1.
2. Ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i f je unarna rekurzivna funkcija kojom se opravdava ova m-svodljivost, pišemo $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$.

m-svodljivost

Definicija

Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Skup A je **m-svodljiv** na B, u oznaci $A \leq_{\mathrm{m}} B$, ako postoji unarna rekurzivna funkcija f takva da je za svako $x \in \mathbb{N}$ važi:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

NAPOMENE:

1. Indeks m, u oznaci $\leq_{\mathrm{m}}$, skraćuje izraz 'many to one' koji ističe da funkcija f ne mora biti 1-1.
2. Ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i f je unarna rekurzivna funkcija kojom se opravdava ova m-svodljivost, pišemo $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$.
3. Ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$, problem '$x \in B$' *nije lakši* od problema '$x \in A$'.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

DOKAZ. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

DOKAZ. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

2) Za sve $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} C$.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

Dokaz. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

2) Za sve $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} C$.

Dokaz. Ako $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $g : B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda $g \circ f : A \leq_{\mathrm{m}} C$.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

DOKAZ. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

2) Za sve $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} C$.

DOKAZ. Ako $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $g : B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda $g \circ f : A \leq_{\mathrm{m}} C$.

3) Ako je $K \leq_{\mathrm{m}} A$, onda A nije rekurzivan.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

Dokaz. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

2) Za sve $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} C$.

Dokaz. Ako $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $g : B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda $g \circ f : A \leq_{\mathrm{m}} C$.

3) Ako je $K \leq_{\mathrm{m}} A$, onda A nije rekurzivan.

Dokaz. Neka je f rekurzivna funkcija takva da $f : K \leq_{\mathrm{m}} A$, tj. za sve $x \in \mathbb{N}$, $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$.

Osobine

1) Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{\mathrm{m}} A$.

Dokaz. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : A \leq_{\mathrm{m}} A$

2) Za sve $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, ako je $A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} C$.

Dokaz. Ako $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$ i $g : B \leq_{\mathrm{m}} C$, onda $g \circ f : A \leq_{\mathrm{m}} C$.

3) Ako je $K \leq_{\mathrm{m}} A$, onda A nije rekurzivan.

Dokaz. Neka je f rekurzivna funkcija takva da $f : K \leq_{\mathrm{m}} A$, tj.
za sve $x \in \mathbb{N}$, $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$.
Ako bi A bio rekurzivan skup, tj. χ_A rekurzivna funkcija, onda bi iz jednakosti $\chi_K = \chi_A \circ f$ sledilo i da je χ_K rekurzivna funkcija, što nije tačno.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

REŠENJE. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Neka je e_0 indeks funkcije f i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija definisana sa $h(e) \stackrel{\text{def}}{=} s^1_1(e_0, e)$.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Neka je e_0 indeks funkcije f i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija definisana sa $h(e) \stackrel{\text{def}}{=} s_1^1(e_0, e)$.

$$\varphi_{h(e)}(x) \simeq \varphi_{s_1^1(e_0,e)}(x) \simeq \varphi_{e_0}^{(2)}(e,x) \simeq f(e,x), \text{ za svako } x \in \mathbb{N}.$$

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Neka je e_0 indeks funkcije f i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija definisana sa $h(e) \stackrel{\text{def}}{=} s_1^1(e_0, e)$.

$$\varphi_{h(e)}(x) \simeq \varphi_{s_1^1(e_0,e)}(x) \simeq \varphi_{e_0}^{(2)}(e,x) \simeq f(e,x), \text{ za svako } x \in \mathbb{N}.$$

Ako $e \in K$, onda je $\varphi_{h(e)} = \mathbf{0}$, pa $h(e) \in E$.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Neka je e_0 indeks funkcije f i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija definisana sa $h(e) \stackrel{\text{def}}{=} s^1_1(e_0, e)$.

$$\varphi_{h(e)}(x) \simeq \varphi_{s^1_1(e_0,e)}(x) \simeq \varphi^{(2)}_{e_0}(e,x) \simeq f(e,x), \text{ za svako } x \in \mathbb{N}.$$

Ako $e \in K$, onda je $\varphi_{h(e)} = \mathbf{0}$, pa $h(e) \in E$.
Ako $e \notin K$, onda je $\varphi_{h(e)}$ prazna funkcija, pa $h(e) \notin E$.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Dokazaćemo da se K može svesti na E, tj. da problem '$x \in E$' nije lakši od problema '$x \in K$'.

Funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \in K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\downarrow), \\ \uparrow, & e \notin K \text{ (tj. } \varphi_e(e)\uparrow), \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna.

Neka je e_0 indeks funkcije f i $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija definisana sa $h(e) \stackrel{\text{def}}{=} s_1^1(e_0, e)$.

$$\varphi_{h(e)}(x) \simeq \varphi_{s_1^1(e_0,e)}(x) \simeq \varphi_{e_0}^{(2)}(e,x) \simeq f(e,x), \text{ za svako } x \in \mathbb{N}.$$

Ako $e \in K$, onda je $\varphi_{h(e)} = \mathbf{0}$, pa $h(e) \in E$.
Ako $e \notin K$, onda je $\varphi_{h(e)}$ prazna funkcija, pa $h(e) \notin E$.
Dakle: $e \in K \Leftrightarrow h(e) \in E$. Iz ove ekvivalencije sledi da E ne može biti rekurzivan, jer bi takav bio i skup K.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

REŠENJE II. [primena teoreme rekurzije]
Pretpostavimo da je E rekurzivan skup.
Tada je funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \notin E, \\ \uparrow, & e \in E, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna, pa prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0, x)$, za sve $x \in \mathbb{N}$.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje II. [primena teoreme rekurzije]
Pretpostavimo da je E rekurzivan skup.
Tada je funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \notin E, \\ \uparrow, & e \in E, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna, pa prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0, x)$, za sve $x \in \mathbb{N}$.

- Ako $e_0 \notin E$, onda je $\varphi_{e_0} = \mathbf{0}$, što znači da je φ_{e_0} totalna funkcija, a to nije moguće, kao i

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje II. [primena teoreme rekurzije]

Pretpostavimo da je E rekurzivan skup.

Tada je funkcija $f(e,x) = \begin{cases} 0, & e \notin E, \\ \uparrow, & e \in E, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna, pa prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0, x)$, za sve $x \in \mathbb{N}$.

- Ako $e_0 \notin E$, onda je $\varphi_{e_0} = \mathbf{0}$, što znači da je φ_{e_0} totalna funkcija, a to nije moguće, kao i
- ako $e_0 \in E$, φ_{e_0} je prazna funkcija, pa nije totalna, što je takodje nemoguće.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Primeri

Zadatak

Dokazati da skup $E = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \neq \emptyset\}$ nije rekurzivan.

Rešenje II. [primena teoreme rekurzije]
Ako pretpostavimo da postoji RM-program $\mathbb{E}$ koji odlučuje E, do kontradikcije dolazimo konstrukcijom sledećeg programa:

$\mathbb{D} =$za ulaz x :

1. Odredi (primenom teoreme rekurzije) sopstveni kod $[\![\mathbb{D}]\!]$
2. Pozovi $\mathbb{E}$ za ulaz $([\![\mathbb{D}]\!], x)$
3. Ako $\mathbb{E}$ kaže $([\![\mathbb{D}]\!], x) \in E,$ onda divergiraj;
   ako $\mathbb{E}$ kaže $([\![\mathbb{D}]\!], x) \notin E,$ onda vrati izlaz 0.

Primeri

Zadatak

Neka je **Tot** $= \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ i **Nul** $= \{e \mid \varphi_e = \mathbf{0}\}$. Dokazati da je **Tot** $\leq_{\mathrm{m}}$ **Nul**.

Primeri

Zadatak

Neka je $\textbf{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ i $\textbf{Nul} = \{e \mid \varphi_e = \mathbf{0}\}$. Dokazati da je $\textbf{Tot} \leq_{\mathrm{m}} \textbf{Nul}$.

Rešenje. Prema teoremi parametrizacije postoji unarna rekurzivna funkcija k takva da je $\varphi_{k(e)} = \mathbf{0} \circ \varphi_e$, za svako $e \in \mathbb{N}$.

Primeri

Zadatak

Neka je $\mathbf{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ i $\mathbf{Nul} = \{e \mid \varphi_e = \mathbf{0}\}$. Dokazati da je $\mathbf{Tot} \leq_{\mathrm{m}} \mathbf{Nul}$.

Rešenje. Prema teoremi parametrizacije postoji unarna rekurzivna funkcija k takva da je $\varphi_{k(e)} = \mathbf{0} \circ \varphi_e$, za svako $e \in \mathbb{N}$.

Tada važi: $e \in \mathbf{Tot} \Leftrightarrow k(e) \in \mathbf{Nul}$, tj. $k : \mathbf{Tot} \leq_{\mathrm{m}} \mathbf{Nul}$.

K je najteži medju svim rekurzivno nabrojivim skupovima

Teorema

Za svaki rekurzivno nabrojiv skup A važi $A \leq_{\mathrm{m}} K$.

K je najteži medju svim rekurzivno nabrojivim skupovima

Teorema

Za svaki rekurzivno nabrojiv skup A važi $A \leq_{\mathrm{m}} K$.

DOKAZ. Postoji rekurzivna funkcija $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da $\varphi_e^{(2)}(x, y) \simeq \varphi_{s_1^1(e,x)}(y)$, $e, x, y \in \mathbb{N}$.

K je najteži medju svim rekurzivno nabrojivim skupovima

Teorema

Za svaki rekurzivno nabrojiv skup A važi $A \leq_{\mathrm{m}} K$.

DOKAZ. Postoji rekurzivna funkcija $s^1_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da
$\varphi^{(2)}_e(x, y) \simeq \varphi_{s^1_1(e,x)}(y)$, $e, x, y \in \mathbb{N}$.
Neka je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$, za neko e_0. Funkcija $g(x, y) \simeq \varphi_{e_0}(x)$ je parcijalno rekurzivna, pa postoji prirodan broj c takav da je $f = \varphi^{(2)}_c$.

K je najteži medju svim rekurzivno nabrojivim skupovima

Teorema

Za svaki rekurzivno nabrojiv skup A važi $A \leq_{\mathrm{m}} K$.

DOKAZ. Postoji rekurzivna funkcija $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da
$\varphi_e^{(2)}(x, y) \simeq \varphi_{s_1^1(e,x)}(y)$, $e, x, y \in \mathbb{N}$.
Neka je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$, za neko e_0. Funkcija $g(x, y) \simeq \varphi_{e_0}(x)$ je parcijalno rekurzivna, pa postoji prirodan broj c takav da je $f = \varphi_c^{(2)}$.
Neka je $f(x) = s_1^1(c, x)$, $x \in \mathbb{N}$. Tada je za svako $x \in \mathbb{N}$:

K je najteži medju svim rekurzivno nabrojivim skupovima

Teorema

Za svaki rekurzivno nabrojiv skup A važi $A \leq_{\mathrm{m}} K$.

DOKAZ. Postoji rekurzivna funkcija $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da $\varphi_e^{(2)}(x,y) \simeq \varphi_{s_1^1(e,x)}(y)$, $e,x,y \in \mathbb{N}$.
Neka je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$, za neko e_0. Funkcija $g(x,y) \simeq \varphi_{e_0}(x)$ je parcijalno rekurzivna, pa postoji prirodan broj c takav da je $f = \varphi_c^{(2)}$.
Neka je $f(x) = s_1^1(c,x)$, $x \in \mathbb{N}$. Tada je za svako $x \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
x \in A &\Leftrightarrow \varphi_{e_0}(x)\downarrow \\
&\Leftrightarrow g(x, s_1^1(c,x))\downarrow \\
&\Leftrightarrow \varphi_c^{(2)}(x, s_1^1(c,x))\downarrow \\
&\Leftrightarrow \varphi_{s_1^1(c,x)}(s_1^1(c,x))\downarrow \\
&\Leftrightarrow s_1^1(c,x) \in K \\
&\Leftrightarrow f(x) \in K.
\end{aligned}$$

Osobine

Teorema

1) Ako je A rekurzivan i $B \leq_{\mathrm{m}} A$, onda je i B rekurzivan.

Teorema

1) Ako je A rekurzivan i $B \leq_{\mathrm{m}} A$, onda je i B rekurzivan.

DOKAZ. 1) Neka je A rekurzivan skup i $f : B \leq_{\mathrm{m}} A$. Tada je χ_A rekurzivna funkcija i važi $\chi_B = \chi_A \circ f$, odakle sledi da je i χ_B rekurzivna funkcija, odnosno da je B rekurzivan skup.

Osobine

Teorema

2) Ako je A rekurzivan i $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} B$.

Osobine

Teorema

2) Ako je A rekurzivan i $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$, onda je $A \leq_{\mathrm{m}} B$.

DOKAZ. 2) Pretpostavimo da je A rekurzivan skup i $B \neq \emptyset, \mathbb{N}$. Neka je b proizvoljan element iz B i c proizvoljan element iz $B^{\complement}$. Definišimo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa:

$$f(x) = \begin{cases} b, & x \in A, \\ c, & x \in A^{\complement}. \end{cases}$$

Kako je A rekurzivan skup, funkcija f je rekurzivna i važi:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Dakle, $f : A \leq_{\mathrm{m}} B$.

Osobine

Teorema

3) Ako je A rekurzivno nabrojiv skup i $B \leq_{\mathrm{m}} A$, onda je i B rekurzivno nabrojiv.

Osobine

Teorema

3) Ako je A rekurzivno nabrojiv skup i $B \leq_{\mathrm{m}} A$, onda je i B rekurzivno nabrojiv.

DOKAZ. 3) Neka je A rekurzivno nabrojiv skup i $f : B \leq_{\mathrm{m}} A$. Postoji parcijalno rekurzivna funkcija g takva da je $A = \mathrm{dom}(g)$. Funkcija $g \circ f$ je takodje parcijalno rekurzivna i $\mathrm{dom}(g \circ f) = B$, što znači da je B rekurzivno nabrojiv.