Teorema rekurzije

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

April 15, 2018

Pregled predavanja

Pregled predavanja

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.
- $\mathbf{c}^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c}(x) *_{\mathrm{RM}} x$, jeste primitivno rekurzivna funkcija.

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.
- $\mathbf{c}^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c}(x) *_{\mathrm{RM}} x$, jeste primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $\mathbb{D}$ program koji izračunava funkciju $\mathbf{c}^*$.

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.
- $\mathbf{c}^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c}(x) *_{\mathrm{RM}} x$, jeste primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $\mathbb{D}$ program koji izračunava funkciju $\mathbf{c}^*$.

$$\boxed{\mathbb{SELF} = \mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}\mathbb{D}}$$

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.
- $\mathbf{c}^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c}(x) *_{\mathrm{RM}} x$, jeste primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $\mathbb{D}$ program koji izračunava funkciju $\mathbf{c}^*$.

$$\boxed{\mathbb{SELF} = \mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}\mathbb{D}}$$

$$\begin{aligned}(x, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}} ([\![\mathbb{D}]\!], 0, 0, \cdots) &\to^*_{\mathbb{D}} (\mathbf{c}([\![\mathbb{D}]\!]) *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}]\!], \cdots) \\ &= ([\![\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}]\!], \cdots) = ([\![\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}\mathbb{D}]\!], \cdots) = ([\![\mathbb{SELF}]\!], \cdots)\end{aligned}$$

Program $\mathbb{SELF}$

Zadatak

Sastaviti program koji za svaki ulaz $x \in \mathbb{N}$ vraća sopstveni kôd kao rezultat.

- $x \mapsto [\![\mathbb{C}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija, gde je $\mathbb{C}_x$ program koji izračunava konstantnu funkciju $n \mapsto x$
- $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je primitivno rekurzivna funkcija takva da za svaka dva programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi $[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2]\!]$.
- $\mathbf{c}^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^*(x) = \mathbf{c}(x) *_{\mathrm{RM}} x$, jeste primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $\mathbb{D}$ program koji izračunava funkciju $\mathbf{c}^*$.

$$\boxed{\mathbb{SELF} = \mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}\mathbb{D}}$$

$$(x, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}} ([\![\mathbb{D}]\!], 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{D}} (\mathbf{c}([\![\mathbb{D}]\!]) *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}]\!], \cdots)$$
$$= ([\![\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}]\!], \cdots) = ([\![\mathbb{C}_{[\![\mathbb{D}]\!]}\mathbb{D}]\!], \cdots) = ([\![\mathbb{SELF}]\!], \cdots)$$

$$\boxed{(x, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{SELF}} ([\![\mathbb{SELF}]\!], \cdots)}$$

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{e_0}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz I Treba dokazati da postoji program $\mathbb{R}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{\mathbb{R}}(\vec{x}) \simeq f(\llbracket \mathbb{R} \rrbracket, \vec{x})$.

- Neka su $\mathbb{C}^{(k)}_x$, $x \in \mathbb{N}$, programi takvi da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{C}^{(k)}_x} (x, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots),$$

a funkcija $\mathbf{c}^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^{(k)}(x) = \llbracket \mathbb{C}^{(k)}_x \rrbracket$ je primitivno rekurzivna.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{e_0}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

DOKAZ I Treba dokazati da postoji program $\mathbb{R}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{\mathbb{R}}(\vec{x}) \simeq f([\![\mathbb{R}]\!], \vec{x})$.

- Neka su $\mathbb{C}^{(k)}_x$, $x \in \mathbb{N}$, programi takvi da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{C}^{(k)}_x} (x, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots),$$

  a funkcija $\mathbf{c}^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^{(k)}(x) = [\![\mathbb{C}^{(k)}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna.
- Neka je $\mathbb{D}^{(k)}$ program takav da za sve $x \in \mathbb{N}$ i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$(x, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{D}^{(k)}} (\mathbf{c}^{(k)}(x) *_{\mathrm{RM}} x, x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots).$$

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{e_0}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

DOKAZ I Treba dokazati da postoji program $\mathbb{R}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{\mathbb{R}}(\vec{x}) \simeq f([\![\mathbb{R}]\!], \vec{x})$.

- Neka su $\mathbb{C}^{(k)}_x$, $x \in \mathbb{N}$, programi takvi da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{C}^{(k)}_x} (x, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots),$$

  a funkcija $\mathbf{c}^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{c}^{(k)}(x) = [\![\mathbb{C}^{(k)}_x]\!]$ je primitivno rekurzivna.
- Neka je $\mathbb{D}^{(k)}$ program takav da za sve $x \in \mathbb{N}$ i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$(x, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \cdots) \to^*_{\mathbb{D}^{(k)}} (\mathbf{c}^{(k)}(x) *_{\mathrm{RM}} x, x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots).$$

Ako je $\mathbb{F}$ program koji izračunava funkciju f, traženi program $\mathbb{R}$ dobijamo nadovezivanjem programa $\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}$ i programa $\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{e_0}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

DOKAZ I …traženi program $\mathbb{R}$ dobijamo nadovezivanjem programa $\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}$ i programa $\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz I ...traženi program $\mathbb{R}$ dobijamo nadovezivanjem programa $\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}$ i programa $\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}$.

$$
\begin{aligned}
(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \cdots) &\to^*_{\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}} ([\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \cdots) \\
&\to^*_{\mathbb{D}^{(k)}} (\mathbf{c}^{(k)}([\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]) *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\
&= ([\![\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\
&= ([\![\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}(\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F})]\!], x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \\
&= ([\![\mathbb{R}]\!], x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \to_{\mathbb{F}} \cdots
\end{aligned}
$$

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi^{(k)}_{e_0}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

DOKAZ I ... traženi program $\mathbb{R}$ dobijamo nadovezivanjem programa $\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}$ i programa $\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}$.

$$
\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \cdots) &\to^*_{\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}} ([\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \dots, x_k, 0, 0, \cdots) \\
&\to^*_{\mathbb{D}^{(k)}} (\mathbf{c}^{(k)}([\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]) *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \\
&= ([\![\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!], x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \\
&= ([\![\mathbb{C}^{(k)}_{[\![\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F}]\!]}(\mathbb{D}^{(k)}\mathbb{F})]\!], x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \\
&= ([\![\mathbb{R}]\!], x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \to_{\mathbb{F}} \cdots
\end{aligned}
$$

$\varphi^{(k)}_{\mathbb{R}}(\vec{x}) \simeq \varphi^{(k+1)}_{\mathbb{F}}([\![\mathbb{R}]\!], \vec{x})$

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz II [Teorema parametrizacije] Postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_k^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi jednakost: $\varphi_{s_k^1(e,x)}^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k+1)}(x, \vec{x})$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz II [Teorema parametrizacije] Postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_k^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi jednakost: $\varphi_{s_k^1(e,x)}^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k+1)}(x, \vec{x})$.

Parcijalna $(k+1)$-arna funkcija g data sa $g(x, \vec{x}) \simeq f(s_k^1(x,x), \vec{x})$ jeste parcijalno rekurzivna, pa ima neki indeks a: $g = \varphi_a^{(k+1)}$.

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz II [Teorema parametrizacije] Postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_k^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi jednakost: $\varphi_{s_k^1(e,x)}^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k+1)}(x, \vec{x})$.
Parcijalna $(k+1)$-arna funkcija g data sa $g(x, \vec{x}) \simeq f(s_k^1(x,x), \vec{x})$ jeste parcijalno rekurzivna, pa ima neki indeks a: $g = \varphi_a^{(k+1)}$.
$e_0 = s_k^1(a, a)$ je traženi broj:

Teorema rekurzije

Teorema

Neka je f proizvoljna $(k+1)$-arna parcijalno rekurzivna funkcija. Tada postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x})$, za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz II [Teorema parametrizacije] Postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_k^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi jednakost: $\varphi_{s_k^1(e,x)}^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k+1)}(x, \vec{x})$.
Parcijalna $(k+1)$-arna funkcija g data sa $g(x, \vec{x}) \simeq f(s_k^1(x,x), \vec{x})$ jeste parcijalno rekurzivna, pa ima neki indeks a: $g = \varphi_a^{(k+1)}$.
$e_0 = s_k^1(a,a)$ je traženi broj:

$$\begin{aligned} \varphi_{e_0}^{(k)}(\vec{x}) &\simeq \varphi_{s_k^1(a,a)}^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_a^{(k+1)}(a, \vec{x}) \\ &\simeq g(a, \vec{x}) \simeq f(s_k^1(a,a), \vec{x}) \simeq f(e_0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Primena teoreme rekurzije

Primer

Akermanova funkcija je parcijalno rekurzivna.

$$\left|\begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n)) \end{array}\right.$$

Primena teoreme rekurzije

Primer

Akermanova funkcija je parcijalno rekurzivna.

$$\left|\begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m,A(m+1,n)) \end{array}\right.$$

$$\alpha(e,m,n) \simeq \begin{cases} n+1, & m=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, 1), & m>0, n=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, \varphi_e^{(2)}(m, n \dot{-} 1)), & m>0, n>0. \end{cases}$$

Primena teoreme rekurzije

Primer

Akermanova funkcija je parcijalno rekurzivna.

$$\left|\begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n)) \end{array}\right.$$

$$\alpha(e,m,n) \simeq \begin{cases} n+1, & m=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, 1), & m>0, n=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, \varphi_e^{(2)}(m, n \dot{-} 1)), & m>0, n>0. \end{cases}$$

Funkcija α je parcijalno rekurzivna, pa po teoremi rekurzije postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha(e_0,m,n) \simeq \varphi_{e_0}^2(m,n)$, za sve $m,n \in \mathbb{N}$.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Akermanova funkcija je parcijalno rekurzivna.

$$\left|\begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m,A(m+1,n)) \end{array}\right.$$

$$\alpha(e,m,n) \simeq \begin{cases} n+1, & m=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, 1), & m>0, n=0, \\ \varphi_e^{(2)}(m \dot{-} 1, \varphi_e^{(2)}(m, n \dot{-} 1)), & m>0, n>0. \end{cases}$$

Funkcija α je parcijalno rekurzivna, pa po teoremi rekurzije postoji $e_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha(e_0,m,n) \simeq \varphi^2_{e_0}(m,n)$, za sve $m,n \in \mathbb{N}$.
Funkcija $\varphi^2_{e_0}$ zadovoljava iste jednakosti kojima je uvedena funkcija A, pa mora biti $A = \varphi^2_{e_0}$.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e,x) = \begin{cases} 1, & (e,x) \in H, \\ 0, & (e,x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e,x) = \begin{cases} 1, & (e,x) \in H, \\ 0, & (e,x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Tada je $f(e,x) = \begin{cases} \uparrow, & \chi_H(e,x) = 1, \\ 0, & \chi_H(e,x) = 0, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e,x) = \begin{cases} 1, & (e,x) \in H, \\ 0, & (e,x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Tada je $f(e,x) = \begin{cases} \uparrow, & \chi_H(e,x) = 1, \\ 0, & \chi_H(e,x) = 0, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

Prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0, x)$.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e,x) = \begin{cases} 1, & (e,x) \in H, \\ 0, & (e,x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Tada je $f(e,x) = \begin{cases} \uparrow, & \chi_H(e,x) = 1, \\ 0, & \chi_H(e,x) = 0, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

Prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0,x)$.

- Ako $(e_0,x) \in H$, tada $f(e_0,x)\uparrow$ (prema definiciji funkcije f), a samim tim i $\varphi_{e_0}(x)\uparrow$, što znači da $(e_0,x) \notin H$. Kontradikcija.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e, x) \mid \varphi_e(x) \downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e, x) = \begin{cases} 1, & (e, x) \in H, \\ 0, & (e, x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Tada je $f(e, x) = \begin{cases} \uparrow, & \chi_H(e, x) = 1, \\ 0, & \chi_H(e, x) = 0, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

Prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0, x)$.

- Ako $(e_0, x) \in H$, tada $f(e_0, x) \uparrow$ (prema definiciji funkcije f), a samim tim i $\varphi_{e_0}(x) \uparrow$, što znači da $(e_0, x) \notin H$. Kontradikcija.
- Ako $(e_0, x) \notin H$, tada $f(e_0, x) \downarrow 0$ (prema definiciji funkcije f), a samim tim i $\varphi_{e_0}(x) \downarrow 0$, što znači da $(e_0, x) \in H$. Kontradikcija.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Neka je $\chi_H(e,x) = \begin{cases} 1, & (e,x) \in H, \\ 0, & (e,x) \notin H, \end{cases}$ rekurzivna funkcija.

Tada je $f(e,x) = \begin{cases} \uparrow, & \chi_H(e,x) = 1, \\ 0, & \chi_H(e,x) = 0, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna.

Prema teoremi rekurzije postoji e_0 takav da je $\varphi_{e_0}(x) \simeq f(e_0,x)$.

- Ako $(e_0,x) \in H$, tada $f(e_0,x)\uparrow$ (prema definiciji funkcije f), a samim tim i $\varphi_{e_0}(x)\uparrow$, što znači da $(e_0,x) \notin H$. Kontradikcija.
- Ako $(e_0,x) \notin H$, tada $f(e_0,x)\downarrow 0$ (prema definiciji funkcije f), a samim tim i $\varphi_{e_0}(x)\downarrow 0$, što znači da $(e_0,x) \in H$. Kontradikcija.

Dakle, skup H nije rekurzivan.

Primena teoreme rekurzije

Primer

Skup $H = \{(e,x) \mid \varphi_e(x)\downarrow\}$ nije rekurzivan.

Rešenje II Ako je $\mathbb{H}$ program koji izračunava χ_H (i samim tim se zaustavlja za svaki ulaz (e,x)), do kontradikcije dolazimo i konstrukcijom sledećeg programa:

$\mathbb{D} =$za ulaz x :

1. Odredi (primenom teoreme rekurzije) sopstveni kod $[\![\mathbb{D}]\!]$
2. Pozovi $\mathbb{H}$ za ulaz $([\![\mathbb{D}]\!], x)$
3. Ako $\mathbb{H}$ kaže $([\![\mathbb{D}]\!], x) \in H$, onda divergiraj;
   ako $\mathbb{H}$ kaže $([\![\mathbb{D}]\!], x) \notin H$, onda vrati izlaz 0.