Teorema parametrizacije

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

April 1, 2018

Pregled predavanja

1. Teorema parametrizacije

Pregled predavanja

1. Teorema parametrizacije

Nadovezivanje programa

Lema

Postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaka dva RM-programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi jednakost:
$[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.

Nadovezivanje programa

Lema

Postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaka dva RM-programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi jednakost:
$[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.

Primer. Posmatrajmo sledeće RM-programe:

$$\mathbb{C}_0 \left\{ \; 1. \quad R_1^- \mid 2,1; \right. \qquad \mathbb{C}_n \left\{ \begin{array}{ll} 1. & R_1^- \mid 2,1 \\ 2. & R_1^+ \mid 3 \\ & \vdots \\ n+1. & R_1^+ \mid n+2 \end{array} \right. \qquad n = 1,2,3,4,\ldots$$

- $\mathbb{C}_n$ izračunava konstantnu funkciju $x \mapsto n$.

Nadovezivanje programa

Lema

Postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaka dva RM-programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi jednakost:
$[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.

Primer. Posmatrajmo sledeće RM-programe:

$$\mathbb{C}_0 \left\{ \; 1. \quad R_1^- \mid 2,1; \right. \qquad \mathbb{C}_n \left\{ \begin{array}{ll} 1. & R_1^- \mid 2,1 \\ 2. & R_1^+ \mid 3 \\ & \vdots \\ n+1. & R_1^+ \mid n+2 \end{array} \right. \qquad n = 1,2,3,4,\ldots$$

- $\mathbb{C}_n$ izračunava konstantnu funkciju $x \mapsto n$.
- $n \mapsto [\![\mathbb{C}_n]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija.

Nadovezivanje programa

Lema

Postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija $*_{\mathrm{RM}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaka dva RM-programa $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ važi jednakost:
$[\![\mathbb{P}_1]\!] *_{\mathrm{RM}} [\![\mathbb{P}_2]\!] = [\![\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2]\!]$.

PRIMER. Posmatrajmo sledeće RM-programe:

$$\mathbb{C}_0 \left\{ \; 1. \quad R_1^- \mid 2,1; \right. \qquad \mathbb{C}_n \left\{ \begin{array}{ll} 1. & R_1^- \mid 2,1 \\ 2. & R_1^+ \mid 3 \\ & \vdots \\ n+1. & R_1^+ \mid n+2 \end{array} \right. \qquad n = 1,2,3,4,\dots$$

- $\mathbb{C}_n$ izračunava konstantnu funkciju $x \mapsto n$.
- $n \mapsto [\![\mathbb{C}_n]\!]$ je primitivno rekurzivna funkcija.
- Za sve $x, y \in \mathbb{N}$, $\varphi_{[\![\mathbb{C}_x]\!]}(y) = \Phi_U([\![\mathbb{C}_x]\!], y) = x$.

Efektivno genersianje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?

Efektivno genersianje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?
Da li se efektivno mogu generisati indeksi funkcija:
$x \mapsto 0^x$, $x \mapsto 1^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $\cdots$?

Efektivno genersianje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?
Da li se efektivno mogu generisati indeksi funkcija:
$x \mapsto 0^x$, $x \mapsto 1^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $\cdots$?
Funkcije datog niza dobijaju se fiksiranjem prve koordinate primitivno rekurzivne funkcije $\exp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\exp(n, x) = n^x$.

Efektivno generisanje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?
Da li se efektivno mogu generisati indeksi funkcija:
$x \mapsto 0^x$, $x \mapsto 1^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $\cdots$?
Funkcije datog niza dobijaju se fiksiranjem prve koordinate primitivno rekurzivne funkcije $\exp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\exp(n, x) = n^x$.
Neka je $\mathbb{E}$ program koji izračunava exp i $\mathbb{E}_n = R_2 := R_1;\ R_1 = n;\ \mathbb{E}$.

Efektivno genersianje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?

Da li se efektivno mogu generisati indeksi funkcija:

$x \mapsto 0^x$, $x \mapsto 1^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $\cdots$?

Funkcije datog niza dobijaju se fiksiranjem prve koordinate primitivno rekurzivne funkcije $\exp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\exp(n, x) = n^x$.

Neka je $\mathbb{E}$ program koji izračunava exp i $\mathbb{E}_n = R_2 := R_1;\ R_1 = n;\ \mathbb{E}$.

Funkcija $n \mapsto [\![\mathbb{E}_n]\!]$ je primitivno rekurzivna.

Efektivno genersianje indeksa

ZADATAK. Da li postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi $\varphi_{h(n)}(x) \simeq n^x$?

Da li se efektivno mogu generisati indeksi funkcija:

$x \mapsto 0^x$, $x \mapsto 1^x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 3^x$, $\cdots$?

Funkcije datog niza dobijaju se fiksiranjem prve koordinate primitivno rekurzivne funkcije $\exp : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\exp(n, x) = n^x$.

Neka je $\mathbb{E}$ program koji izračunava exp i $\mathbb{E}_n = R_2 := R_1;\ R_1 = n;\ \mathbb{E}$.

Funkcija $n \mapsto [\![\mathbb{E}_n]\!]$ je primitivno rekurzivna.

Neka je $h(n) \stackrel{\text{def}}{=} [\![\mathbb{E}_n]\!]$; za sve $n, x \in \mathbb{N}$ važi:

$$\varphi_{h(n)}(x) = \varphi_{[\![\mathbb{E}_n]\!]}(x) = \Phi_U([\![\mathbb{E}_n]\!], x) = n^x.$$

Program $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ i $\vec{x} \in \mathrm{N}^m$ neka je $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})$ program dobijen nadovezivanjem redom programa:

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\, R_n^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+n}^+ \mid 1 \end{array}\right. \cdots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+1}^+ \mid 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_1.\, R_1^+ \mid x_1+1 \end{array}\right. \cdots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_m^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_m.\, R_m^+ \mid x_m+1 \end{array}\right. \qquad \mathbb{P}$$

Program $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ i $\vec{x} \in \mathrm{N}^m$ neka je $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$ program dobijen nadovezivanjem redom programa:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.\, R_n^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+n}^+ \mid 1 \end{array} \right. \cdots \left\{ \begin{array}{l} 1.\, R_1^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+1}^+ \mid 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1.\, R_1^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_1.\, R_1^+ \mid x_1+1 \end{array} \right. \cdots \left\{ \begin{array}{l} 1.\, R_m^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_m.\, R_m^+ \mid x_m+1 \end{array} \right. \quad \mathbb{P}$$

Izračunavanje programa $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$ za ulaz $(y_1,\ldots,y_n)$:

$$(y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (\underbrace{0,\ldots,0}_{m \text{ nula}}, y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) \to_{\mathbb{P}} \cdots$$

Program $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ i $\vec{x} \in \mathrm{N}^m$ neka je $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})$ program dobijen nadovezivanjem redom programa:

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\, R_n^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+n}^+ \mid 1 \end{array}\right. \dots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+1}^+ \mid 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_1.\, R_1^+ \mid x_1 + 1 \end{array}\right. \dots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_m^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_m.\, R_m^+ \mid x_m + 1 \end{array}\right. \quad \mathbb{P}$$

Izračunavanje programa $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})$ za ulaz $(y_1, \dots, y_n)$:

$$(y_1, \dots, y_n) \to \cdots (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ nula}}, y_1, \dots, y_n) \to \cdots (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \to_{\mathbb{P}} \cdots$$

$$\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P}, \vec{x})(\vec{y}) \downarrow \Leftrightarrow \mathbb{P}(\vec{x}, \vec{y}) \downarrow;$$

Program $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ i $\vec{x} \in \mathrm{N}^m$ neka je $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$ program dobijen nadovezivanjem redom programa:

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\, R_n^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+n}^+ \mid 1 \end{array}\right. \cdots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+1}^+ \mid 1 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_1^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_1.\, R_1^+ \mid x_1+1 \end{array}\right. \cdots \left\{\begin{array}{l} 1.\, R_m^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_m.\, R_m^+ \mid x_m+1 \end{array}\right. \qquad \mathbb{P}$$

Izračunavanje programa $\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})$ za ulaz $(y_1,\ldots,y_n)$:

$$(y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (\underbrace{0,\ldots,0}_{m \text{ nula}}, y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) \to_{\mathbb{P}} \cdots$$

$$\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})(\vec{y}) \downarrow \Leftrightarrow \mathbb{P}(\vec{x},\vec{y}) \downarrow; \text{ štaviše } \varphi^{(n)}_{\mathbb{S}_n^m(\mathbb{P},\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi^{(m+n)}_{\mathbb{P}}(\vec{x},\vec{y})$$

Program $\mathbb{S}^m_n(\mathbb{P},\vec{x})$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ i $\vec{x} \in \mathrm{N}^m$ neka je $\mathbb{S}^m_n(\mathbb{P},\vec{x})$ program dobijen nadovezivanjem redom programa:

$$\begin{cases} 1.\, R_n^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+n}^+ \mid 1 \end{cases} \cdots \begin{cases} 1.\, R_1^- \mid 3,2 \\ 2.\, R_{m+1}^+ \mid 1 \end{cases} \begin{cases} 1.\, R_1^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_1.\, R_1^+ \mid x_1+1 \end{cases} \cdots \begin{cases} 1.\, R_m^+ \mid 2 \\ \vdots \\ x_m.\, R_m^+ \mid x_m+1 \end{cases} \qquad \mathbb{P}$$

Izračunavanje programa $\mathbb{S}^m_n(\mathbb{P},\vec{x})$ za ulaz $(y_1,\ldots,y_n)$:

$$(y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (\underbrace{0,\ldots,0}_{m \text{ nula}}, y_1,\ldots,y_n) \to \cdots (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) \to_{\mathbb{P}} \cdots$$

$$\mathbb{S}^m_n(\mathbb{P},\vec{x})(\vec{y}) \downarrow \Leftrightarrow \mathbb{P}(\vec{x},\vec{y}) \downarrow; \text{ štaviše } \varphi^{(n)}_{\mathbb{S}^m_n(\mathbb{P},\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi^{(m+n)}_{\mathbb{P}}(\vec{x},\vec{y})$$

Funkcija $s^m_n : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, $s^m_n(e,\vec{x}) = [\![\mathbb{S}^m_n([\![e]\!]^{-1},\vec{x})]\!]$ je primitivno rekurzivna.

Teorema parametrizacije ili s-m-n teorema

Teorema parametrizacije

Za bilo koja dva prirodna broja $m, n \geqslant 1$, postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ važi jednakost:

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Teorema parametrizacije ili s-m-n teorema

Teorema parametrizacije

Za bilo koja dva prirodna broja $m, n \geqslant 1$, postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ važi jednakost:

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Neka je f bilo koja binarna parcijalna funkcija i neka je e njen indeks: $f(x, y) \simeq \varphi_e^{(2)}(x, y)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

Teorema parametrizacije ili s-m-n teorema

Teorema parametrizacije

Za bilo koja dva prirodna broja $m, n \geqslant 1$, postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ važi jednakost:

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Neka je f bilo koja binarna parcijalna funkcija i neka je e njen indeks: $f(x, y) \simeq \varphi_e^{(2)}(x, y)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo prvi argument:

$$y \mapsto f(0, y),\ y \mapsto f(1, y),\ y \mapsto f(2, y),\ y \mapsto f(3, y),\ y \mapsto f(4, y),\ \cdots$$

Teorema parametrizacije ili s-m-n teorema

Teorema parametrizacije

Za bilo koja dva prirodna broja $m, n \geqslant 1$, postoji primitivno rekurzivna funkcija $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $e \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{N}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{N}^n$ važi jednakost:

$$\varphi^{(n)}_{s_n^m(e,\vec{x})}(\vec{y}) \simeq \varphi_e^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Neka je f bilo koja binarna parcijalna funkcija i neka je e njen indeks: $f(x,y) \simeq \varphi_e^{(2)}(x,y)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo prvi argument:

$$y \mapsto f(0,y),\ y \mapsto f(1,y),\ y \mapsto f(2,y),\ y \mapsto f(3,y),\ y \mapsto f(4,y),\ \cdots$$

Primitivno rekurzivna funkcija $s_1^1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ odredjuje po jedan indeks za svaku funkcija navedenog niza:

funkcija:	$y \mapsto f(0,y)$	$y \mapsto f(1,y)$	$y \mapsto f(2,y)$	$\cdots$
indeks:	$s_1^1(e,0)$	$s_1^1(e,1)$	$s_1^1(e,2)$	$\cdots$

Primene s-m-n teoreme

ZADATAK 1. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, takva da za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ važi $\varphi^{(2)}_{h(x_1,x_2)}(y_1, y_2) \simeq \max\{x_1 y_2, x_2 + y_1\}$.

Primene s-m-n teoreme

ZADATAK 1. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, takva da za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ važi $\varphi^{(2)}_{h(x_1,x_2)}(y_1, y_2) \simeq \max\{x_1 y_2, x_2 + y_1\}$.

ZADATAK 2. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi $\mathrm{dom}(\varphi_{h(x)}) = \{x\}$.

Primene s-m-n teoreme

ZADATAK 1. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, takva da za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ važi $\varphi^{(2)}_{h(x_1,x_2)}(y_1, y_2) \simeq \max\{x_1 y_2, x_2 + y_1\}$.

ZADATAK 2. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi $\mathrm{dom}(\varphi_{h(x)}) = \{x\}$.

ZADATAK 3. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi $\mathrm{dom}(\varphi_{h(x)}) = \{x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$.

Primene s-m-n teoreme

ZADATAK 1. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, takva da za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ važi $\varphi^{(2)}_{h(x_1,x_2)}(y_1, y_2) \simeq \max\{x_1 y_2, x_2 + y_1\}$.

ZADATAK 2. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi $\mathrm{dom}(\varphi_{h(x)}) = \{x\}$.

ZADATAK 3. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi $\mathrm{dom}(\varphi_{h(x)}) = \{x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$.

ZADATAK 4. Dokazati da postoji primitivno rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da za sve $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ važi $\varphi^{(2)}_{h(x_1,x_2)} = \mathrm{Rec}^2(\varphi_{x_1}, \varphi^{(3)}_{x_2})$.