Aritmetička hijerarhija

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

April 1, 2018

Pregled predavanja

Pregled predavanja

Aritmetički skupovi

Definicija

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je aritmetički ako je postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi

$$(*) \qquad A(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathrm{Q}_1 y_1 \cdots \mathrm{Q}_m y_m R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m),$$

gde je $\mathrm{Q}_i y_i$ ili $\exists y_i$ ili $\forall y_i$, tj. $\mathrm{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Aritmetički skupovi

Definicija

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je aritmetički ako je postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi

$$(*) \qquad A(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathrm{Q}_1 y_1 \cdots \mathrm{Q}_m y_m R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m),$$

gde je $\mathrm{Q}_i y_i$ ili $\exists y_i$ ili $\forall y_i$, tj. $\mathrm{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

- Formula $(*)$ je *eksplicitna definicija* skupa A;
- $\mathrm{Q}_1 y_1 \cdots \mathrm{Q}_m y_m$ se naziva *prefiks*, a
- $R(\vec{x}, \vec{y})$ je *matriks* formule $(*)$.

Aritmetički skupovi

Definicija

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je aritmetički ako je postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi

$$(*) \qquad A(\vec{x}) \Leftrightarrow \mathrm{Q}_1 y_1 \cdots \mathrm{Q}_m y_m R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m),$$

gde je $\mathrm{Q}_i y_i$ ili $\exists y_i$ ili $\forall y_i$, tj. $\mathrm{Q}_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

- Formula $(*)$ je *eksplicitna definicija* skupa A;
- $\mathrm{Q}_1 y_1 \cdots \mathrm{Q}_m y_m$ se naziva *prefiks*, a
- $R(\vec{x}, \vec{y})$ je *matriks* formule $(*)$.

Prefiks meri koliko je skup A 'daleko' od rekurzivnog skupa.

Kontrakcija kvantifikatora i alternirajući prefiks

Uzastopna pojavljivanja istih kvantifikatora u prefiksu mogu se eliminisati:

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2) \text{ i } \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2).$$

Kontrakcija kvantifikatora i alternirajući prefiks

Uzastopna pojavljivanja istih kvantifikatora u prefiksu mogu se eliminisati:

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2) \text{ i } \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2).$$

Definicija

Prefiks je **alternirajući** ako se u njemu ne pojavljuju jedan do drugog dva ista kvantifikatora.

Kontrakcija kvantifikatora i alternirajući prefiks

Uzastopna pojavljivanja istih kvantifikatora u prefiksu mogu se eliminisati:

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2) \;\text{ i }\; \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(\langle z\rangle_1, \langle z\rangle_2).$$

Definicija

Prefiks je **alternirajući** ako se u njemu ne pojavljuju jedan do drugog dva ista kvantifikatora.
Prefiks je Π_n ako je alternirajući, sadrži n kvantifikatora i prvi (sleva) kvantifikator je $\forall$.
Π_1: $\forall$; Π_2: $\forall\exists$; Π_3: $\forall\exists\forall$; ...

Kontrakcija kvantifikatora i alternirajući prefiks

Uzastopna pojavljivanja istih kvantifikatora u prefiksu mogu se eliminisati:

$$\exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists z P(\langle z \rangle_1, \langle z \rangle_2) \text{ i } \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(\langle z \rangle_1, \langle z \rangle_2).$$

Definicija

Prefiks je **alternirajući** ako se u njemu ne pojavljuju jedan do drugog dva ista kvantifikatora.
Prefiks je Π_n ako je alternirajući, sadrži n kvantifikatora i prvi (sleva) kvantifikator je $\forall$.
Π_1: $\forall$; Π_2: $\forall\exists$; Π_3: $\forall\exists\forall$; ...
Prefiks je Σ_n ako je alternirajući, sadrži n kvantifikatora i prvi (sleva) kvantifikator je $\exists$.
Σ_1: $\exists$; Σ_2: $\exists\forall$; Σ_3: $\exists\forall\exists$; ...

Π_n, Σ_n, Δ_n relacije

Definicija

Skup (relacija) A je Π_n ako se može eksplicitno definisati formulom čiji je prefiks Π_n, a matriks je rekurzivan.
Skup (relacija) A je Σ_n ako se može eksplicitno definisati formulom čiji je prefiks Σ_n, a matriks je rekurzivan.
Skup (relacija) A je Δ_n ako je i Π_n i Σ_n.

Π_n, Σ_n, Δ_n relacije

Definicija

Skup (relacija) A je Π_n ako se može eksplicitno definisati formulom čiji je prefiks Π_n, a matriks je rekurzivan.
Skup (relacija) A je Σ_n ako se može eksplicitno definisati formulom čiji je prefiks Σ_n, a matriks je rekurzivan.
Skup (relacija) A je Δ_n ako je i Π_n i Σ_n.

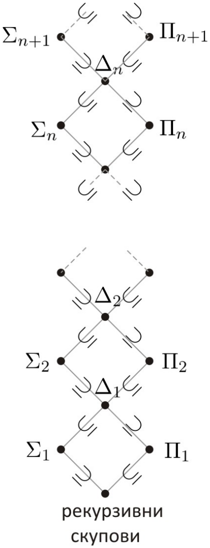
Ako oznake Π_n, Σ_n i Δ_n iskoristimo da označimo redom skupove svih Π_n, Σ_n i Δ_n relacija, onda je $\Delta_n = \Pi_n \cap \Sigma_n$.

Aritmetička hijerarhija

Klasifikacija aritmetičkih relacija pomoću Π_n i Σ_n prefiksa se naziva **aritmetička hijerarhija**.

Uvodjenjem tzv. *lažnih* promenljivih, tj. promenljivih koje se zajedno sa nekim kvantifikatorom pojavljuju u prefiksu, ali ih nema u matriksu, pokazujemo da važe inkluzije prikazane na slici desno.

Hijerarhija je prava, tj. sve inkluzije su stroge.



Aritmetička hijerarhija

Definicija

Neka je $\mathcal{R}$ neki skup k-arnih relacija. Kažemo da $(k+1)$-arna relacija E_k *univerzalna* za relacije iz $\mathcal{R}$ ukoliko za svako $R \in \mathcal{R}$ postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $R(\vec{x}) \Leftrightarrow E_k(\vec{x}, e)$.

Aritmetička hijerarhija

Definicija

Neka je $\mathcal{R}$ neki skup k-arnih relacija. Kažemo da $(k+1)$-arna relacija E_k *univerzalna* za relacije iz $\mathcal{R}$ ukoliko za svako $R \in \mathcal{R}$ postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $R(\vec{x}) \Leftrightarrow E_k(\vec{x}, e)$.

Teorema

Za sve $n, k \geqslant 1$, postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n koja je univerzalna za skup svih k-arnih Σ_n relacija.
Za sve $n, k \geqslant 1$, postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n koja je univerzalna za skup svih k-arnih Π_n relacija.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Matematičkom indukcijom po n dokazujemo: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacije.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Matematičkom indukcijom po n dokazujemo: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacije.

Baza indukcije: $n = 1$. Neka je A k-arna Σ_1 relacija, i $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivana relacija takva da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$. Ako je e_0 indeks funkcije χ_R, onda važi:

$R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow \exists z\, (T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$, odnosno

$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u \exists z\, (T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Matematičkom indukcijom po n dokazujemo: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacije.

Baza indukcije: $n = 1$. Neka je A k-arna Σ_1 relacija, i $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivana relacija takva da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$. Ako je e_0 indeks funkcije χ_R, onda važi:

$R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow \exists z\, (T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$, odnosno

$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u \exists z\, (T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$.

$S_k^1(\vec{x}, e) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists y\, (T_{k+1}(e, \vec{x}, \langle y \rangle_1, \langle y \rangle_2) \wedge U(\langle y \rangle_2) = 1)$ – S_k^1 je $(k+1)$-arna Σ_1 relaciju univerzalna za sve k-arne Σ_1 relacije.

Aritmetička hijerarhija

Dokaz. Matematičkom indukcijom po n dokazujemo: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S^n_k univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P^n_k univerzalna za sve k-arne Π_n relacije.

Baza indukcije: $n=1$. Neka je A k-arna Σ_1 relacija, i $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivana relacija takva da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$. Ako je e_0 indeks funkcije χ_R, onda važi:

$R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow \exists z\,(T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$, odnosno

$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u \exists z\,(T_{k+1}(e_0, \vec{x}, u, z) \wedge U(z) = 1)$.

$S^1_k(\vec{x}, e) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists y\,(T_{k+1}(e, \vec{x}, \langle y\rangle_1, \langle y\rangle_2) \wedge U(\langle y\rangle_2) = 1)$ – S^1_k je $(k+1)$-arna Σ_1 relaciju univerzalna za sve k-arne Σ_1 relacije.

$P^1_k(\vec{x}, e) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg S^1_k(\vec{x}, e)$ – P^1_k je $(k+1)$-arna Π_1 relacija univerzalna za sve k-arne Π_1 relacije.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. <u>Induktivna pretpostavka</u>: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S^n_k univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P^n_k univerzalna za sve k-arne Π_n relacija.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Induktivna pretpostavka: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacija.

Ako je A proizvoljna k-arna Σ_{n+1} relacija, postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija R takva da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi: $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Induktivna pretpostavka: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S^n_k univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P^n_k univerzalna za sve k-arne Π_n relacija.

Ako je A proizvoljna k-arna Σ_{n+1} relacija, postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija R takva da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi: $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$.
Prema (IP) postoji $(k+2)$-arna Π_n relacija P^n_{k+1} koja je univerzalna za sve $(k+1)$-arne Π_n relacije: neka je e_0 takvo da $R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow P^n_{k+1}(\vec{x}, u, e_0)$.
Dakle, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u P^n_{k+1}(\vec{x}, u, e_0)$.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Induktivna pretpostavka: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacija.

Ako je A proizvoljna k-arna Σ_{n+1} relacija, postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija R takva da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi: $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$.
Prema (IP) postoji $(k+2)$-arna Π_n relacija P_{k+1}^n koja je univerzalna za sve $(k+1)$-arne Π_n relacije: neka je e_0 takvo da $R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e_0)$.
Dakle, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e_0)$.

$S_k^{n+1}(\vec{x}, e) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists u P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e)$ – S_k^{n+1} je $(k+1)$-arna Σ_{n+1} relacija univerzalna za sve k-arne Σ_{n+1} relacije.

Aritmetička hijerarhija

DOKAZ. Induktivna pretpostavka: za sve $k \geqslant 1$ postoji $(k+1)$-arna Σ_n relacija S_k^n univerzalna za sve k-arne Σ_n relacije, i postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija P_k^n univerzalna za sve k-arne Π_n relacija.

Ako je A proizvoljna k-arna Σ_{n+1} relacija, postoji $(k+1)$-arna Π_n relacija R takva da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi: $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, u)$.
Prema (IP) postoji $(k+2)$-arna Π_n relacija P_{k+1}^n koja je univerzalna za sve $(k+1)$-arne Π_n relacije: neka je e_0 takvo da $R(\vec{x}, u) \Leftrightarrow P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e_0)$.
Dakle, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists u P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e_0)$.

$S_k^{n+1}(\vec{x}, e) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists u P_{k+1}^n(\vec{x}, u, e)$ – S_k^{n+1} je $(k+1)$-arna Σ_{n+1} relacija univerzalna za sve k-arne Σ_{n+1} relacije.

$P_k^{n+1}(\vec{x}, e) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg S_{k+1}^n(\vec{x}, e)$ – P_k^{n+1} je $(k+1)$-arna Π_{n+1} relacija univerzalna za sve k-arne Π_{n+1}.

Osnovna teorema o aritmetičkoj hijerarhiji

Teorema

Za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Π_n relacija koja nije Σ_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$. Takodje, za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Σ_n relacija koja nije Π_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$.

Osnovna teorema o aritmetičkoj hijerarhiji

Teorema

Za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Π_n relacija koja nije Σ_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$. Takodje, za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Σ_n relacija koja nije Π_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$.

DOKAZ. Neka je P_1^n binarna Π_n relacija koja nabraja sve unarne Π_n relacije.

Osnovna teorema o aritmetičkoj hijerarhiji

Teorema

Za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Π_n relacija koja nije Σ_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$. Takodje, za svako $n \geqslant 1$, postoji unarna Σ_n relacija koja nije Π_n, pa samim tim nije Π_k niti Σ_k, za bilo koje $k < n$.

DOKAZ. Neka je P_1^n binarna Π_n relacija koja nabraja sve unarne Π_n relacije. Unarna relacija D:

$$D(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P_1^n(x,x),\ x \in \mathbb{N}$$

jeste Π_n relacija, ali $D^{\complement}$ nije Π_n.
Dakle, D ne može biti Σ_n.

$\vdots$