Rekurzivno nabrojivi skupovi

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

April 3, 2018

Pregled predavanja

Pregled predavanja

$\mathrm{dom}(\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)})$

Svaki RM-program $\mathbb{P}$, za svako $k \geqslant 1$ odredjuje po jedan podskup od $\mathbb{N}^k$ koji sadrži sve one k-torke prirodnih brojeva za koje se $\mathbb{P}$ zaustavlja:

$$W_{\mathbb{P}}^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_k) \downarrow\} = \mathrm{dom}(\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}).$$

$\mathrm{dom}(\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)})$

Svaki RM-program $\mathbb{P}$, za svako $k \geqslant 1$ odredjuje po jedan podskup od $\mathbb{N}^k$ koji sadrži sve one k-torke prirodnih brojeva za koje se $\mathbb{P}$ zaustavlja:

$$W_{\mathbb{P}}^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_k)\downarrow\} = \mathrm{dom}(\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}).$$

Definicija

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je **poluodlučiv** ili **rekurzivno nabrojiv** (kraće r. n.) ako je domen neke parcijalno rekurzivne funkcije, tj. postoji $e \in \mathbb{N}$ takav da je $A = \mathrm{dom}(\varphi_e^{(k)})$.

Parcijalna karakteristična funkcija

Definicija

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Parcijalana karakteristična funkcija skupa A je k-arna funkcija $\overline{\chi}_A$ definisana sa

$$\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Parcijalna karakteristična funkcija

Definicija

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Parcijalana karakteristična funkcija skupa A je k-arna funkcija $\overline{\chi}_A$ definisana sa

$$\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko je k-arna parcijalna funkcija $\overline{\chi}_A$ parcijalno rekurzivna.

Parcijalna karakteristična funkcija

Definicija

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Parcijalana karakteristična funkcija skupa A je k-arna funkcija $\overline{\chi}_A$ definisana sa

$$\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko je k-arna parcijalna funkcija $\overline{\chi}_A$ parcijalno rekurzivna.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Ako je $A = \mathrm{dom}(\varphi_e^{(k)})$, za neko $e \in \mathbb{N}$, onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) \simeq \mathbf{1}(\varphi_e^{(k)}(\vec{x}))$.

Parcijalna karakteristična funkcija

Definicija

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Parcijalana karakteristična funkcija skupa A je k-arna funkcija $\overline{\chi}_A$ definisana sa

$$\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$$

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko je k-arna parcijalna funkcija $\overline{\chi}_A$ parcijalno rekurzivna.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $A = \mathrm{dom}(\varphi_e^{(k)})$, za neko $e \in \mathbb{N}$, onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) \simeq \mathbf{1}(\varphi_e^{(k)}(\vec{x}))$.
($\Leftarrow$) Ako je $\overline{\chi}_A$ parcijalno rekurzivna funkcija, onda je $A = \mathrm{dom}(\overline{\chi}_A)$.

Odlučivost i poluodlučivost

Lema

Svaki odlučiv (tj. rekurzivan) skup je poluodlučiv (tj. rekurzivno nabrojiv).

Odlučivost i poluodlučivost

Lema

Svaki odlučiv (tj. rekurzivan) skup je poluodlučiv (tj. rekurzivno nabrojiv).

DOKAZ. Ako je $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ 0, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ rekurzivna funkcija,

onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Odlučivost i poluodlučivost

Lema

Svaki odlučiv (tj. rekurzivan) skup je poluodlučiv (tj. rekurzivno nabrojiv).

DOKAZ. Ako je $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ 0, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ rekurzivna funkcija,

onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Najpoznatiji primer poluodlučivog skupa koji nije rekurzivan naziva se kombinatorno jezgro neodlučivosti: $K \stackrel{\text{def}}{=} \{e \mid \varphi_e(e)\downarrow\}$.

Odlučivost i poluodlučivost

Lema

Svaki odlučiv (tj. rekurzivan) skup je poluodlučiv (tj. rekurzivno nabrojiv).

DOKAZ. Ako je $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ 0, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ rekurzivna funkcija,

onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Najpoznatiji primer poluodlučivog skupa koji nije rekurzivan naziva se kombinatorno jezgro neodlučivosti: $K \stackrel{\text{def}}{=} \{e \mid \varphi_e(e)\downarrow\}$.

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

Odlučivost i poluodlučivost

Lema

Svaki odlučiv (tj. rekurzivan) skup je poluodlučiv (tj. rekurzivno nabrojiv).

DOKAZ. Ako je $\chi_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ 0, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ rekurzivna funkcija,

onda je $\overline{\chi}_A(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in A, \\ \uparrow, & \vec{x} \notin A. \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Najpoznatiji primer poluodlučivog skupa koji nije rekurzivan naziva se kombinatorno jezgro neodlučivosti: $K \stackrel{\text{def}}{=} \{e \mid \varphi_e(e)\downarrow\}$.

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

DOKAZ. K je poluodlučiv, jer je $x \mapsto \Phi_U(x,x)$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Kombinatorno jezgro neodlučivosti

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

DOKAZ. ...Dakle, K je poluodlučiv.

K nije odlučiv? Pretpostavimo da je K odlučiv:

$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ je rekurzivna funkcija.

Kombinatorno jezgro neodlučivosti

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

Dokaz. …Dakle, K je poluodlučiv.

K nije odlučiv? Pretpostavimo da je K odlučiv:

$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ je rekurzivna funkcija.

Onda je $h(x) = \begin{cases} \uparrow, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Kombinatorno jezgro neodlučivosti

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

Dokaz. ... Dakle, K je poluodlučiv.

K nije odlučiv? Pretpostavimo da je K odlučiv:

$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ je rekurzivna funkcija.

Onda je $h(x) = \begin{cases} \uparrow, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Neka je e_0 indeks funkcije h: $\varphi_{e_0}(x) \simeq h(x)$, $x \in \mathbb{N}$.

Kombinatorno jezgro neodlučivosti

Lema

Skup K je poluodlučiv, ali nije odlučiv.

DOKAZ. …Dakle, K je poluodlučiv.

K nije odlučiv? Pretpostavimo da je K odlučiv:

$\chi_K(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ je rekurzivna funkcija.

Onda je $h(x) = \begin{cases} \uparrow, & \varphi_x(x)\downarrow, \\ 0, & \varphi_x(x)\uparrow, \end{cases}$ parcijalno rekurzivna funkcija.

Neka je e_0 indeks funkcije h: $\varphi_{e_0}(x) \simeq h(x)$, $x \in \mathbb{N}$.

Specijalno, $\varphi_{e_0}(e_0) \simeq h(e_0)$, jer važi: $h(x)\downarrow$ akko $\varphi_x(x)\uparrow$, za bilo koje x.

Poluodlučivi skupovi kao projekcije odlučivih

Teorema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ takav da je

$$A = \{\vec{x} \mid \exists y R(\vec{x}, y)\}.$$

Poluodlučivi skupovi kao projekcije odlučivih

Teorema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ takav da je

$$A = \{\vec{x} \mid \exists y R(\vec{x}, y)\}.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}^{(k)})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, onda prema Klinijevoj teoremi o normalnoj formi, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}^{(k)}) \Leftrightarrow \exists z T_k(e_0, \vec{x}, z).$$

Poluodlučivi skupovi kao projekcije odlučivih

Teorema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je poluodlučiv (rekurzivno nabrojiv) akko postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ takav da je

$$A = \{\vec{x} \mid \exists y R(\vec{x}, y)\}.$$

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Ako je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}^{(k)})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, onda prema Klinijevoj teoremi o normalnoj formi, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

$$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}^{(k)}) \Leftrightarrow \exists z T_k(e_0, \vec{x}, z).$$

($\Leftarrow$) Ako je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$, gde je $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivan skup, tada je A domen parcijalno rekurzivne funkcije φ definisane sa

$$\varphi(\vec{x}) \simeq \mu y R(\vec{x}, y).$$

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m)\}$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m)\}$.

DOKAZ. (1) $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $B(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m)\}$.

Dokaz. (1) $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $B(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in A \cup B &\Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y) \vee \exists y Q(\vec{x}, y) \\
&\Leftrightarrow \exists y (P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)) \\
\vec{x} \in A \cap B &\Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y) \wedge \exists y Q(\vec{x}, y) \\
&\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (P(\vec{x}, y_1) \wedge Q(\vec{x}, y_2)) \\
&\Leftrightarrow \exists y (P(\vec{x}, \langle y \rangle_1) \wedge Q(\vec{x}, \langle y \rangle_2)).
\end{aligned}$$

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \dots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \dots, y_m)\}$.

DOKAZ. (1) $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je $A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $B(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in A \cup B &\Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y) \vee \exists y Q(\vec{x}, y) \\
&\Leftrightarrow \exists y (P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)) \\
\vec{x} \in A \cap B &\Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y) \wedge \exists y Q(\vec{x}, y) \\
&\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (P(\vec{x}, y_1) \wedge Q(\vec{x}, y_2)) \\
&\Leftrightarrow \exists y (P(\vec{x}, \langle y \rangle_1) \wedge Q(\vec{x}, \langle y \rangle_2)).
\end{aligned}$$

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m)\}$.

DOKAZ. (2) $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m+1}$ je rekurzivan skup takav da je $A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m) \Leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m, z)$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \dots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \dots, y_m)\}$.

Dokaz. (2) $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m+1}$ je rekurzivan skup takav da je $A(\vec{x}, y_1, \dots, y_m) \Leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y_1, \dots, y_m, z)$.
$\gamma : \mathbb{N}^{m+1} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ je rekurzivno kodiranje, čije su dekodirajuće funkcije $\gamma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m+1$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Teorema

(1) Ako su $A, B \subseteq N^k$ poluodlučivi skupovi, onda su poluodlučivi i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$.
(2) Ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+m}$ poluodlučiv skup, onda je poluodlučiv i skup $B \subseteq \mathbb{N}^k$ definisan sa $B = \{\vec{x} \mid \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m)\}$.

Dokaz. (2) $R \subseteq \mathbb{N}^{k+m+1}$ je rekurzivan skup takav da je $A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m) \Leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m, z)$.
$\gamma : \mathbb{N}^{m+1} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ je rekurzivno kodiranje, čije su dekodirajuće funkcije $\gamma_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m+1$.

$$\begin{aligned} B(\vec{x}) &\Leftrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m A(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m) \\ &\Leftrightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_m \exists z R(\vec{x}, y_1, \ldots, y_m, z) \\ &\Leftrightarrow \exists u R(\vec{x}, \gamma_1(u), \ldots, \gamma_{m+1}(u)) \end{aligned}$$

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

DOKAZ. $(\Rightarrow)$ Očigledno.

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Očigledno.
($\Leftarrow$) $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $A^{\complement}(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

DOKAZ. $(\Rightarrow)$ Očigledno.
$(\Leftarrow)$ $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $A^{\complement}(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

Funkcija $f(\vec{x}) = \mu y(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y))$ je parcijalno rekurzivna i totalna, tj. rekurzivna funkcija.

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Očigledno.
$(\Leftarrow)$ $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $A^{\complement}(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

Funkcija $f(\vec{x}) = \mu y(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y))$ je parcijalno rekurzivna i totalna, tj. rekurzivna funkcija.

A je rekurzivan skup, jer važi $A(\vec{x}) \Leftrightarrow P(\vec{x}, f(\vec{x}))$.

Osnovne osobine r. n. skupova

Lema

Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su A i $A^\complement = \mathbb{N}^k \setminus A$ poluodlučivi.

DOKAZ. $(\Rightarrow)$ Očigledno.
$(\Leftarrow)$ $P, Q \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ su rekurzivni skupovi takvi da je
$A(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y P(\vec{x}, y)$ i $A^\complement(\vec{x}) \Leftrightarrow \exists y Q(\vec{x}, y)$.

Funkcija $f(\vec{x}) = \mu y(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y))$ je parcijalno rekurzivna i totalna, tj. rekurzivna funkcija.

A je rekurzivan skup, jer važi $A(\vec{x}) \Leftrightarrow P(\vec{x}, f(\vec{x}))$.

Posledica

Skup $K^\complement$ nije rekurzivno nabrojiv.

Teorema o grafiku

Teorema

Parcijalna k-arna funkcija f je parcijalno rekurzivna akko je njen grafik $\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(\vec{x}) = y\}$ rekurzivo nabrojiv skup.

Teorema o grafiku

Teorema

Parcijalna k-arna funkcija f je parcijalno rekurzivna akko je njen grafik $\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(\vec{x}) = y\}$ rekurzivo nabrojiv skup.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $f = \varphi_e^{(k)}$ za neko $e \in \mathbb{N}$, na osnovu Klinijeve teoreme o normalnoj formi za sve $(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$ važi:

$$
\begin{aligned}
(\vec{x}, y) \in \Gamma_f &\Leftrightarrow \varphi_e^{(k)}(\vec{x}) = y \\
&\Leftrightarrow U(\mu z T_k(e, \vec{x}, z)) = y \\
&\Leftrightarrow \exists z(T_k(e, \vec{x}, z) \wedge (\forall t < z) \neg T_k(e, \vec{x}, t) \wedge U(z) = y)
\end{aligned}
$$

Teorema o grafiku

Teorema

Parcijalna k-arna funkcija f je parcijalno rekurzivna akko je njen grafik $\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(\vec{x}) = y\}$ rekurzivo nabrojiv skup.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je $f = \varphi_e^{(k)}$ za neko $e \in \mathbb{N}$, na osnovu Klinijeve teoreme o normalnoj formi za sve $(\vec{x}, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$ važi:

$$\begin{aligned}(\vec{x}, y) \in \Gamma_f &\Leftrightarrow \varphi_e^{(k)}(\vec{x}) = y \\ &\Leftrightarrow U(\mu z T_k(e, \vec{x}, z)) = y \\ &\Leftrightarrow \exists z (T_k(e, \vec{x}, z) \wedge (\forall t < z) \neg T_k(e, \vec{x}, t) \wedge U(z) = y)\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ako je Γ_f r. n., onda za neki rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$:

$$(\vec{x}, y) \in \Gamma_f \Leftrightarrow \exists z R(\vec{x}, y, z), \text{ odn. } f(\vec{x}) \downarrow \Leftrightarrow \exists y \exists z R(\vec{x}, y, z).$$

Odavde sledi da je $f(\vec{x}) \simeq \langle \mu t R(\vec{x}, \langle t \rangle_1, \langle t \rangle_2) \rangle_1$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) Neko je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$; funkcija $f(x) \simeq x + \mathbf{0}(\varphi_{e_0}(x))$, je parcijalno rekurzivna i važi $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}) = \mathrm{ran}(f)$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) Neko je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$; funkcija $f(x) \simeq x + \mathbf{0}(\varphi_{e_0}(x))$, je parcijalno rekurzivna i važi $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}) = \mathrm{ran}(f)$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Trivijalno.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2) Neko je $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0})$; funkcija $f(x) \simeq x + \mathbf{0}(\varphi_{e_0}(x))$, je parcijalno rekurzivna i važi $A = \mathrm{dom}(\varphi_{e_0}) = \mathrm{ran}(f)$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Trivijalno.
(4) $\Rightarrow$ (1) Prazan skup je r. n. Ako je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku unarnu rekurzivnu funkciju f, onda za svako x važi:

$$x \in A = f[\mathbb{N}] \Leftrightarrow \exists t\, (f(t) = x).$$

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. (2) $\Rightarrow$ (3) Neka je $\emptyset \neq A = \mathrm{ran}(\varphi_{e_0})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, i $a_0 \in A$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. (2) $\Rightarrow$ (3) Neka je $\emptyset \neq A = \mathrm{ran}(\varphi_{e_0})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, i $a_0 \in A$.

$$F(x,t) = \begin{cases} U(\mu z \leqslant t\, T_1(e_0,x,z)), & \text{ako } \exists z \leqslant t\, T_1(e_0,x,t), \\ a_0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \operatorname{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DOKAZ. $(2) \Rightarrow (3)$ Neka je $\emptyset \neq A = \operatorname{ran}(\varphi_{e_0})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, i $a_0 \in A$.

$$F(x,t) = \begin{cases} U(\mu z \leqslant t\, T_1(e_0,x,z)), & \text{ako } \exists z \leqslant t\, T_1(e_0,x,t), \\ a_0, & \text{inače.} \end{cases}$$

F je primitivno rekurzivna funkcija i važi $F[\mathbb{N}^2] = A$.

Rekurzivno nabrojivi podskupovi od $\mathbb{N}$

Teorema

Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:

1. A je rekurzivno nabrojiv skup.
2. $A = \mathrm{ran}(\varphi_e)$, za neko $e \in \mathbb{N}$.
3. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
4. $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dokaz. (2) $\Rightarrow$ (3) Neka je $\emptyset \neq A = \mathrm{ran}(\varphi_{e_0})$, za neko $e_0 \in \mathbb{N}$, i $a_0 \in A$.

$$F(x,t) = \begin{cases} U(\mu z \leqslant t\, T_1(e_0,x,z)), & \text{ako } \exists z \leqslant t\, T_1(e_0,x,t), \\ a_0, & \text{inače.} \end{cases}$$

F je primitivno rekurzivna funkcija i važi $F[\mathbb{N}^2] = A$.

$f(x) \overset{\text{def}}{=} F(\langle x\rangle_1, \langle x\rangle_2)$ je takodje primitivno rekurzivna funkcija i

$$A = F[\mathbb{N}^2] = f[\mathbb{N}].$$

Registar mašine sa štampačem

Ekvivalencija (1) $\Leftrightarrow$ (4):

(1) $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivno nabrojiv skup.

(4) $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Registar mašine sa štampačem

Ekvivalencija $(1) \Leftrightarrow (4)$:

(1) $A \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivno nabrojiv skup.

(4) $A = \emptyset$ ili je $A = f[\mathbb{N}]$, za neku rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Neprazni r. n. skupovi su oni podskupovi od $\mathbb{N}$ čiji se elementi mogu efektivno nabrajati: postoji rekurzivna funkcija f takva da je

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\} = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = f[\mathbb{N}].$$

Ne mogu se efektivno nabrajati indeksi rekurzivnih funkcija

Zadatak

Skup $\mathrm{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ nije r. n.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno: Tot je rekurzivno nabrojiv, tj. postoji rekurzivna funkcija f takva da je $\mathrm{Tot} = f[\mathbb{N}]$.

Ne mogu se efektivno nabrajati indeksi rekurzivnih funkcija

Zadatak

Skup $\mathrm{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ nije r. n.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno: Tot je rekurzivno nabrojiv, tj. postoji rekurzivna funkcija f takva da je $\mathrm{Tot} = f[\mathbb{N}]$. Funkcija

$$g(x) \simeq \Phi_U(f(x), x) + 1.$$

je parcijalno rekurzivna i totalna, jer za svako $x \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \in \mathrm{Tot}, \text{ tj. } \varphi_{f(x)} \text{ je totalna funkcija, pa } \Phi_U(f(x), x)\downarrow$$

Ne mogu se efektivno nabrajati indeksi rekurzivnih funkcija

Zadatak

Skup $\mathrm{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ nije r. n.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno: Tot je rekurzivno nabrojiv, tj. postoji rekurzivna funkcija f takva da je $\mathrm{Tot} = f[\mathbb{N}]$. Funkcija

$$g(x) \simeq \Phi_U(f(x), x) + 1.$$

je parcijalno rekurzivna i totalna, jer za svako $x \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \in \mathrm{Tot},\ \text{tj. } \varphi_{f(x)} \text{ je totalna funkcija, pa } \Phi_U(f(x), x)\downarrow$$

Pošto f nabraja indekse svih rekurzivnih funkcija, onda postoji k takav da je $g = \varphi_{f(k)}$;

Ne mogu se efektivno nabrajati indeksi rekurzivnih funkcija

Zadatak

Skup $\mathrm{Tot} = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) = \mathbb{N}\}$ nije r. n.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno: Tot je rekurzivno nabrojiv, tj. postoji rekurzivna funkcija f takva da je $\mathrm{Tot} = f[\mathbb{N}]$. Funkcija

$$g(x) \simeq \Phi_U(f(x), x) + 1.$$

je parcijalno rekurzivna i totalna, jer za svako $x \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \in \mathrm{Tot},\ \text{tj. } \varphi_{f(x)} \text{ je totalna funkcija, pa } \Phi_U(f(x), x)\downarrow$$

Pošto f nabraja indekse svih rekurzivnih funkcija, onda postoji k takav da je $g = \varphi_{f(k)}$; specijalno, $g(k) = \varphi_{f(k)}(k)$.
Kontradikcija: $g(k) = \Phi_U(f(k), k) + 1 = \varphi_{f(k)}(k) + 1$.