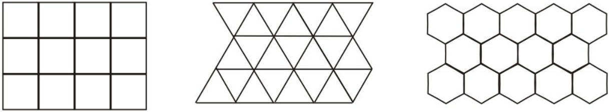
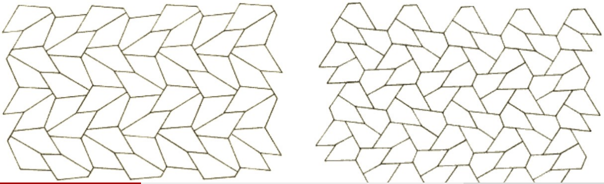
Popločavanje ravni

Poznato je da se ravan može *popločati*, tj. pokriti bez preklapanja i praznina, kvadratima, jednakostraničnim trouglovima i pravilnim šestouglovima, a da se ne može popločati, na primer, pravilnim petouglovima.

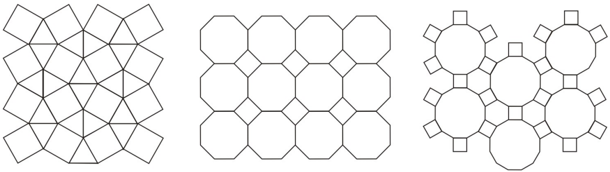


Mnogi drugi oblici mogu popločati ravan, kao, na primer, svaki od nepravilnih petouglova prikazanih na narednoj slici.



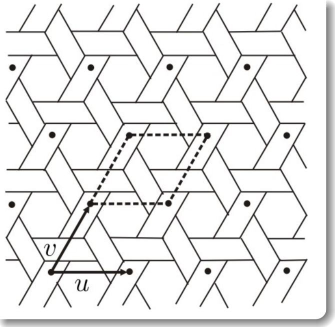
Popločavanje ravni

Razmatranje popločavanja ravni prilično se komplikuje povećavanjem broja oblika.



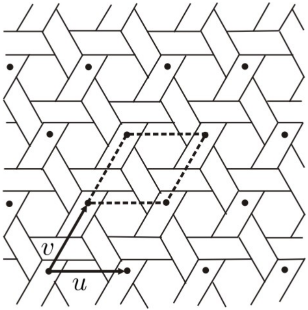
Popločavanje ravni

Sva popločavanja ravni prikazana na prethodnim slikama su *periodična*. Grubo govoreći, to znači da postoje bar dva različita pravca u popločanoj ravni i na svakom od njih beskonačno mnogo tačaka iz kojih možemo posmatrati popločanu ravan a da ono što vidimo bude jedan te isti šablon, odnosno da nam popločana ravan izgleda potpuno isto kada je posmatramo iz bilo koje od pomenutih tačaka.



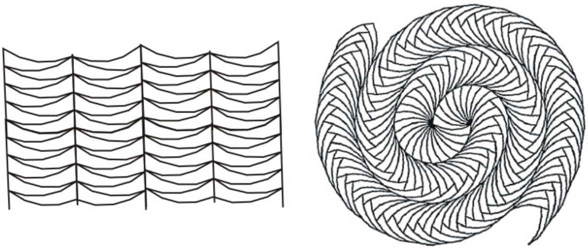
Popločavanje ravni

Matematičkim jezikom, popločavanje je periodično ako postoje dve nezavisne translacije ravni koje uočeno popločavanje prevode u sebe. Za svako periodično popločavanje ravni postoji tzv. *paralelogram perioda* odredjen vektorima translacija koje to popločavanje prevode u sebe.



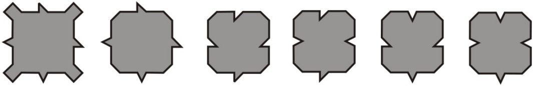
Popločavanje ravni

Postoje pločice kojima se ravan može popločavati i periodično i neperiodično.



Popločavanje ravni

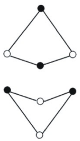
Postoji li konačan skup dozvoljenih oblika koji se mogu redjati samo neperiodično? Postoji – Robinsonov aperiodičan skup pločica.

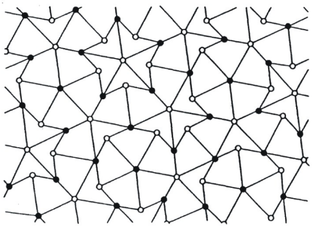


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Popločavanje ravni

Postoji još aperiodičnih skupova pločica: Penrouzove pločice – zmaj i strelica.





Popločavanje ravni

Kako i zašto su otkriveni aperiodični skupovi pločica?

Hao Vang je 1961. godine formulisao je problem: Postoji li postupak za rešavanje problema popločavanja, tj. postoji li neki algoritam kojim se može utvrditi da li dati skup mnogougaonih pločica može popločati ravan?

Dokazao je da će ovakav algoritam postojati ako se dokaže da svaki skup pločica koji popločava ravan zaparavo je popločava periodično.
(U to vreme se verovalo da aperiodični skupovi pločica ne postoje).

M. R. Robinson, *Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane*, Invent. Math. 12, 1971.

Neodlučivost problema popločavanja ravni

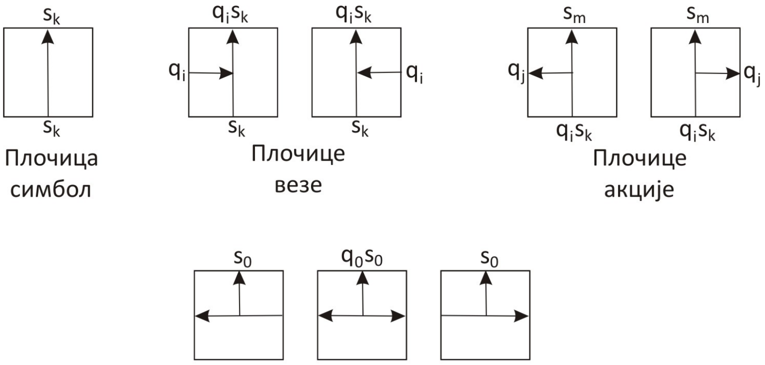
Suštinska ideja dokaza neodlučivosti problema popločavanja ravni jeste simulacija Tjuringovih mašina pomoću pločica. Sama simulacija je zanimljiva sama po sebi jer omogućava da pakovanje pločica zamišljamo kao model izračunljivosti.

Simuliraćemo rad proizvoljne Tjuringove mašine na praznoj traci jer: ne postoji algoritam koji odlučuje da li se proizvoljna Tjuringova mašina zaustavlja ako započne rad na praznoj traci.

Umesto opšteg problema popločavanja ravni razmatraćemo tzv. *problem popločavanja ravni sa početnim zahtevima*.

Neodlučivost problema popločavanja ravni

Za simulaciju rada Tjuringovih mašina na praznoj traci koristicemo sledeće pločice.



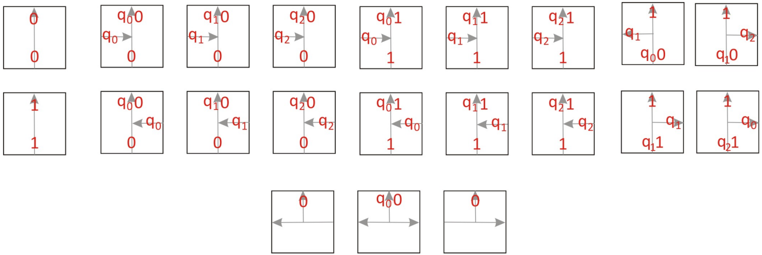
Почетне плочице

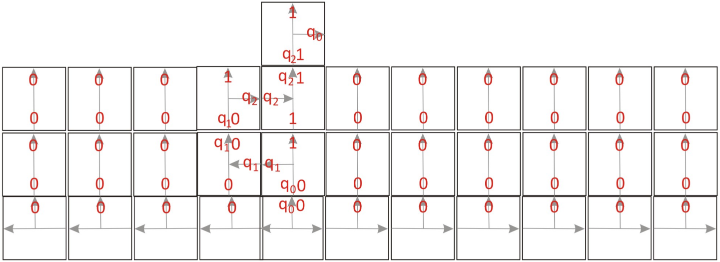
Neodlučivost problema popločavanja ravni

ZADATAK 23. Ispitati rad na praznoj traci Tjuringove mašine date sa:

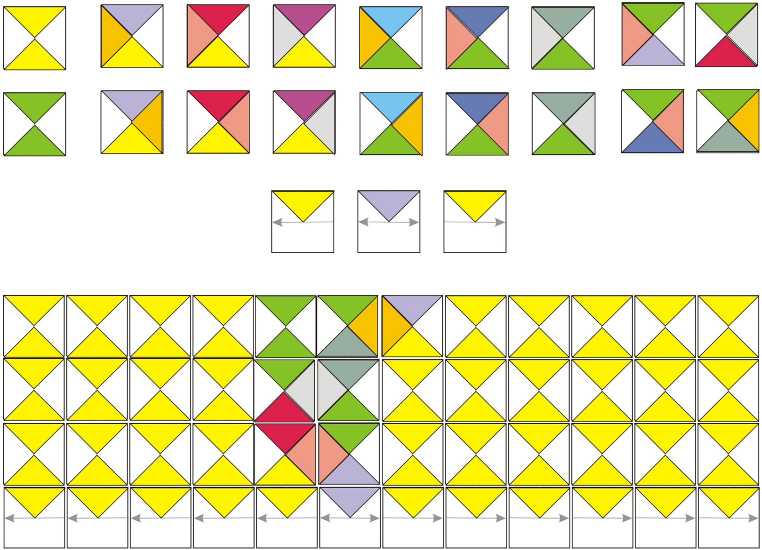
$$q_0 01\mathrm{L} q_1,\ q_1 01\mathrm{R} q_2,\ q_1 11\mathrm{R} q_1,\ q_2 11\mathrm{R} q_0.$$

Primer $q_0 01 \mathrm{L} q_1$, $q_1 01 \mathrm{R} q_2$, $q_1 11 \mathrm{R} q_1$, $q_2 11 \mathrm{R} q_0$





Primer $q_0 01 \mathrm{L} q_1$, $q_1 01 \mathrm{R} q_2$, $q_1 11 \mathrm{R} q_1$, $q_2 11 \mathrm{R} q_0$



Neodlučivost problema popločavanja ravni

Označimo sa $\langle T \rangle$ skup pločica odredjenih Tjuringovom mašinom T.
NAPOMENA. $\langle T \rangle$ je konačan skup pločica.

Tjuringova mašina T se ne zaustavlja na praznoj traci
akko
pločicama iz $\langle T \rangle$ je moguće prekriti poluravan sa odgovarajućom prvom vrstom.