



1. [8 поена]

На столу је n кутија у којима се налази $1, 2, \dots, n$ кликера редом. Прво додамо по кликер у све кутије. Онда додамо по кликер у оне кутије у којима је број кликера дељив са 2, затим додамо по кликер у оне кутије у којима је број кликера дељив са 3, па са 4, и тако даље, све док не додамо по кликер у оне кутије у којима је број кликера дељив са n . Ако на крају све кутије имају исти број кликера показати да је n прост број.

2. [8 поена]

Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. За коју тачку X из равни тог четвороугла је збир $AX + BX + CX + DX$ најмањи могући?

3. [8 поена]

Доказати да важи

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2},$$

за све реалне бројеве x и y .

4. [8 поена]

а) Користећи одговарајуће теореме елементарне теорије бројева, објаснити могућност репрезентације природних бројева у некој датој бројевној бази.

б) Описати поступак превођења репрезентације природног броја из базе 10 у базу 5.

в) Формирати таблицу сабирања и таблицу множења у бази 5, а затим поступно израчунати производ $43 \cdot 34$.

Напомена. Рачунати директно у бази 5, без превођења у базу 10.

5. [8 поена]

а) Нека је $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Ако је $\{c_1, c_2, c_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, доказати да је $a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

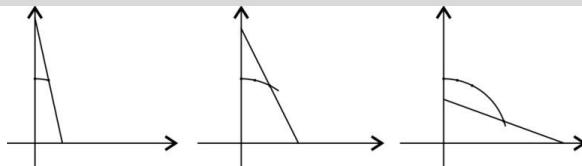
б) Илустровати тврђење под а) једноставним примером који наведене неједнакости очигледно предочава ученицима основношколског узраста.

в) Доказати да за свака три позитивна реална броја a, b, c важи неједнакост

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

6. [6 поена]

На сликама је приказано геометријско место тачака средишта свих дужи фиксиране дужине које се налазе у првом квадранту и чије се крајње тачке налазе на координатним осама.



а) Одредити једначину поменутог геометријског места тачака ако је дужина дужи 5.

б) Навести дидактичке принципе који оправдавају употребу интерактивних прилога наведеног типа.

7. [6 поена]

Навести основне постулате дидактике математичког образовања.

8. [6 поена]

Навести основне наставне методе класификоване према активностима наставника и ученика.

9. [6 поена]

Навести основна начела наставе на која се односи Принцип научности. Начела илустровати примерима.

10. [6 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак. Реши једначину $\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$.

Решење ученика Н.Н.

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12} \quad |^2$$

$$\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{l} 4x+13 \geq 0 \\ 4x \geq -13 \\ x \geq -\frac{13}{4} \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{l} 3x+12 \geq 0 \\ 3x \geq -12 \\ x \geq -4 \end{array}$$

$$x \geq 1$$

$$x-1+4x+13+2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12$$

$$5x+12+2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12$$

$$2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12-5x-12$$

$$2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = -2x$$

$$\sqrt{(x-1)(4x+13)} = -x \quad |^2$$

$$(x-1)(4x+13) = x^2$$

$$4x^2+13x-4x-13 = x^2$$

$$3x^2+9x-13=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9-4 \cdot 3 \cdot (-13)}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{165}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{165}}{6} \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{165}}{6} \quad x_2 \neq$$

$x_1 \geq 1$ па је решење

па није решење