

**1. [8 поена]**

Нека је функција $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ задата са $F(1) = 1$ и

$$F(n) = \begin{cases} F(n-1) + 1, & 2 \nmid n \text{ и } 3 \nmid n, \\ F(n-1) + 2, & 2 \mid n \text{ и } 3 \nmid n, \\ F(n-1) + 3, & 2 \nmid n \text{ и } 3 \mid n, \\ F(n-1) + 4, & 2 \mid n \text{ и } 3 \mid n, \end{cases}$$

за све $n \geq 2$. Израчунати $F(2020)$.

2. [8 поена]

На шаховској табли 8×8 насумично су постављена 3 топа. Колика је вероватноћа да ниједан топ не може појести ниједан од преосталих топова у једном потезу? (Топ једе фигуре које се налазе у истој колони или врсти са њим.)

3. [8 поена]

У конвексном шестоуглу $ABCDEF$ важи $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ и $\sphericalangle E = \sphericalangle F$. Показати да се симетрале дужи AB , CD и EF секу у једној тачки.

4. [8 поена]

а) Доказати да је $\sqrt[3]{10,7}$ ирационалан број.

б) Одредити цео део и прву децималу иза децималне запете броја $\sqrt[3]{10,7}$.

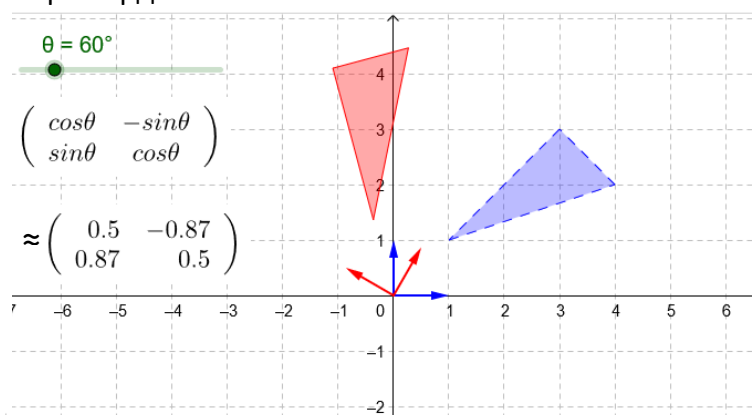
в) Укратко описати поступак одређивања цифара децималног развоја кубног корена неког природног броја.

5. [8 поена]

На наредној слици приказан је исечак ГеоГебра прилога којим је илустрована матрична репрезентација ротације чији је центар координатни почетак.

а) Користећи матричну репрезентацију доказати да је ротација изометрија (тј. да се свака дуж пресликава у подударну дуж).

в) Навести дидактичке принципе који оправдавају употребу интерактивних прилога наведеног типа.

**6. [6 поена]**

Решити Диофантове једначине:

а) $300x + 252y = 24$; б) $300x + 252y = 34$.

Напомена. Наћи сва целобројна решења или доказати да не постоје.

7. [6 поена]

Навести нивое постигнућа ученика према Блумовој таксономији образовних циљева.

8. [6 поена]

Навести основне фазе проблемске наставе.

9. [6 поена]

Навести основна начела наставе на која се односи Принцип прилагођавања узрасту и индивидуалним особинама ученика. Начела илустровати примерима.

10. [6 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак. У зависности од реалних параметара a, b, c, d решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ax + by + cz &= d \\a^2x + b^2y + c^2z &= d^2,\end{aligned}$$

при чему је $d \neq a, d \neq b, d \neq c$.

Решење ученика Н.Н.

Систем решавам Крамеровим правилом.

Детерминанта датог система је

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\&= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b \\&= bc(c - b) - a(c^2 - b^2) + a^2(c - b) \\&= (c - b)(bc - ac - ab + a^2) = (c - b)(c - a)(b - a).\end{aligned}$$

Како се $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ од Δ разликује само по томе што уместо a

стоји d , имамо да је $\Delta_x = (b - d)(c - d)(c - b)$.

Слично је $\Delta_y = (d - a)(c - a)(c - d)$ и $\Delta_z = (b - a)(d - a)(d - b)$.

1° Ако је $a \neq b \neq c$, тада је $\Delta \neq 0$, па је решење система:

$$x = \frac{(b - d)(c - d)}{(b - a)(c - a)}, \quad y = \frac{(b - a)(c - d)}{(b - a)(c - b)}, \quad z = \frac{(d - a)(d - b)}{(c - a)(c - b)}.$$

2° Ако је $a = b \neq c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.

3° Ако је $a \neq b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_y \neq 0$, па систем нема решења.

4° Ако је $a = b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па систем има бесконачно много решења.