

**1. [8 поена]**

Показати да је $\sin 10^\circ$ ирационалан број.

2. [8 поена]

За квадрат и правилан шестоугао важи да је површина једног једнака обиму другог и обрнуто. Израчунати странице тог квадрата и шестоугла.

3. [8 поена]

Нека су a, b, c, d, e и f цифре такве да је број $\overline{abcdef}$ дељив са 7. Показати да је тада и број $\overline{fabcde}$ дељив са 7.

4. [8 поена]

а) Метода бесконачног спуста, коју је доста користио Ферма у доказима, заснована је на добром уређењу скупа природних бројева. Применом ове методе доказати да је $x = y = z = 0$ једино решење једначине $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ у скупу $\mathbb{N}$.

б) У Паскаловим радовима појављује се примена принципа математичке индукције у савременом облику. Међу првим тврђењима које је Паскал на тај начин доказао јесте једнакост $\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \frac{k+1}{n-k}$, за све $n > k \geq 0$. Доказати ово тврђење.

в) Укратко објаснити везу између Методе бесконачног спуста и Принципа математичке индукције.

5. [8 поена]

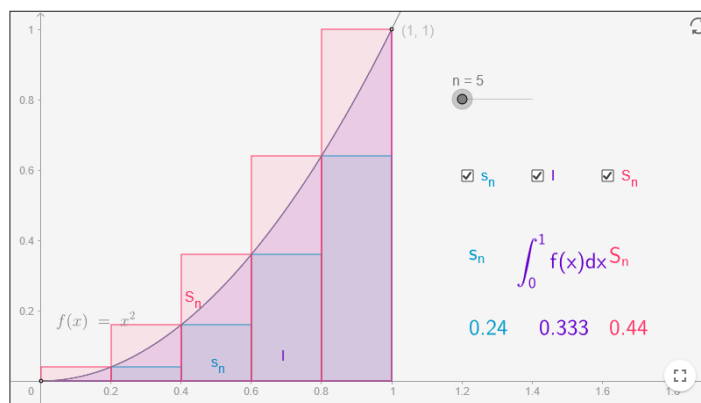
ГеоГebra прилози често се користе приликом увођења одређеног интеграла.

а) Објаснити појам одређеног интеграла $\int_a^b f(x) dx$ непрекидне функције f на одсечку $[a, b]$.

б) Израчунати по дефиницији

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

в) Навести дидактичке принципе који оправдавају употребу интерактивних прилога наведеног типа.



Напомена. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$

6. [6 поена]

а) Доказати основне особине тежишних дужи троугла:

i) све три тежишне дужи троугла секу се у једној тачки;

ii) заједничка тачка тежишних дужи дели сваку од њих у размери 2 : 1.

б) Повезати доказано геометријско тврђење са физичким појмом тежишта – центра равнотеже.

7. [6 поена]

Описати основне нивое апстракције.

8. [6 поена]

Описати основне мисаоне операције значајне за стварање појмова и решавање проблема.

9. [6 поена]

Навести основна начела наставе на која се односи Принцип трајности знања. Начела илустровати примерима.

10. [6 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак

Наћи скуп свих вредности реалног параметра a тако да неједнакост

$$\log_{a^2+a+1} \frac{3x^2+4}{x^2+1} > 1 \text{ важи за сваки реалан број } x.$$

Решење ученика Н. Н.

Лева страна неједнакости је дефинисана ако је $a^2+a+1 > 0$, $a^2+a+1 \neq 1$

$$\text{и } \frac{3x^2+4}{x^2+1} > 0. \text{ Пошто је}$$

$$a^2 + a + 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1,$$

а неједнакости $a^2 + a + 1 > 0$ и $\frac{3x^2+4}{x^2+1} > 0$ важе за свако a , односно за свако x , следи да је лева страна дате неједнакости дефинисана ако $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Дата неједнакост је еквивалентна са $\frac{3x^2+4}{x^2+1} > a^2 + a + 1$, тј. са

$$(a^2 + a - 2)x^2 + a^2 + a - 3 < 0.$$

Последња неједнакост важи за свако реално x ако је $a^2 + a - 2 \leq 0$. Како је

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ тј. } a_1 = -2, a_2 = 1,$$

скуп решења неједначине $a^2 + a - 2 \leq 0$ је затворени интервал $[-2, 1]$. Имајући у виду услове дефинисаности, скуп свих вредности реалног параметра a за који дата неједнакост важи је $[-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1]$.