

**1. [8 поена]**

Нека је $ABCD$ двориште квадратног облика странице 1. У теменима A и C је завезан по један коњ, а дужина ужета је таква да сваки од коња може да се креће по делу дворишта површине $\frac{1}{2}$. Ако је X део дворишта по коме могу да се крећу оба коња, показати да је

обим фигуре X једнак $4 \arccos \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, а површина X једнака $\frac{4}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

2. [8 поена]

Колико делилаца има број 2020^{20} ?

3. [8 поена]

Троје људи Алфа, Бета и Гама седе у истој соби. Један од њих увек говори истину, други увек лаже, а трећи насумично говори истину или лаже. У свакој од следећих ситуација одредити ко шта ради и образложити одговор.

а) Алфа: „Ја увек лажем“, Бета: „Да, то је истина“.

б) Алфа: „Бета увек говори истину“, Бета: „То није тачно“.

в) Алфа: „Гама је онај који одговара насумично“, Бета: „Алфа увек лаже“, Гама: „Чули сте довољно да закључите ко увек говори истину“.

4. [8 поена]

Детаљно описати поступак познат као Ератостеново сито. Навести и неформалан опис програма којим се испитује да ли је дати природан број прост или није прост.

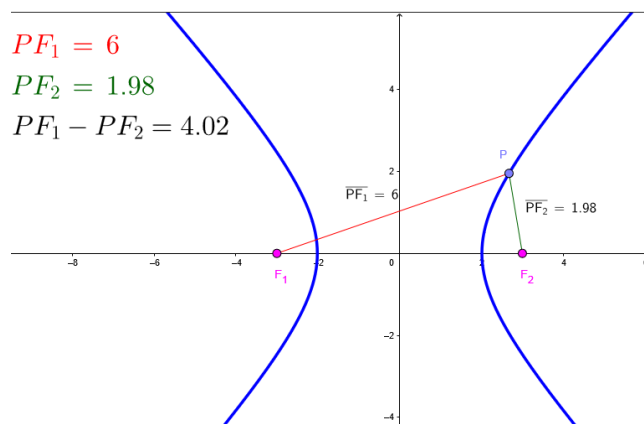
5. [8 поена]

ГеоГebra интерактивни прилози могу бити веома корисни приликом обраде конусних пресека.

а) Одредити једначину хиперболе у односу на координатни систем приказан на слици.

б) Реч *хипербола* је грчког порекла и значи *претеривање, вишак* (па се сходно томе реч користи и да означи претеривање приликом изражавања). Зашто је крива линија, на коју се односи приказани ГеоГebra прилог, названа *хипербола*? О каквом „вишку“ је реч?

в) Навести дидактичке принципе који оправдавају употребу интерактивних прилога наведеног типа.



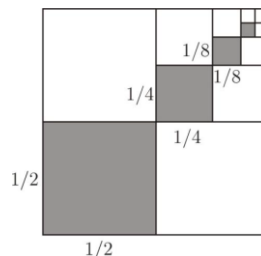
6. [6 поена]

а) Слика са десне стране често се користи да илуструје збир једног бесконачног реда. О ком реду је реч и колико је његов збир.

б) Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1,75.$$

в) Ученик пита: „Да ли постоји реалан број M такав да за сваки природан број n важи неједнакост $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < M$?“ Одговор детаљно образложити.

**7. [6 поена]**

Укратко описати периоде у развоју интелигенције које разликује Пијаже.

8. [6 поена]

Навести основне фазе проблемске наставе.

9. [6 поена]

Навести основна начела наставе на која се односи Принцип научности. Начела илустровати примерима.

10. [6 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак. Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које једначина

$$2^{|x|} - 2^{-|x|} = a \cdot 2^x$$

има максималан број решења.

Решење ученика Н.Н.

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ Ако је } x \geq 0, \text{ онда} \quad & 2^x - 2^{-x} = a \cdot 2^x \quad / : 2^{-x} \\ & 2^{2x} (1-a) = 1 \\ & 2x = \log_2 \frac{1}{1-a} \\ & 2x = -\log_2 (1-a) \\ & x = -\frac{1}{2} \log_2 (1-a) < 0 \quad \nmid x \geq 0 \quad \text{нема решења.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ Ако је } x < 0, \text{ онда} \quad & 2^{-x} - 2^x = a \cdot 2^x \\ & 2^{-x} = (1+a) 2^x \\ & -2x = \log_2 (1+a) \\ & x = -\frac{1}{2} \log_2 (1+a) \quad \text{има решења ако је} \quad \begin{matrix} a+1 > 0 \\ a > -1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Решење је $\boxed{a > -1}$.