

**1. [8 поена]**

Нека је n природан број. Показати да $n + 3$ и $n^2 + 3n + 3$ не могу истовремено бити потпуни кубови.

2. [8 поена]

Нека је O центар уписаног круга троугла ABC . Показати да се центар описаног круга троугла ABO налази на описаном кругу троугла ABC .

3. [8 поена]

Одредити вредност верижног разломка

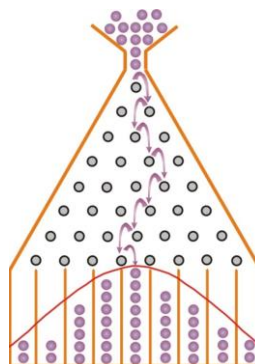
$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\dots}}}}$$

4. [8 поена]

Детаљно (коректно и прецизно) објаснити Еуклидов алгоритам. Навести и неформалан опис програма којим се одређује највећи заједнички делилац два природна броја.

5. [8 поена]

На слици десно је приказана варијанта Галтонове табле (уређаја који се често користи за популаризацију математике). Са врха табле испуштају се куглице које треба да прођу кроз правилну троугаону мрежу клинова и стигну до преграда на дну табле. Путјујући кроз мрежу клинова, куглица се на сваком нивоу судара са по једним клином и скреће лево или десно са једнаком вероватноћом. Што више има хоризонталних редова клинова и пуштених куглица, у преградама ће се гомилати куглице тако да формирају познату криву.



а) О којој кривој је реч?

б) Ако су клинови постављени у 8 редова, као на слици десно, за сваку од девет преграда на дну одредити вероватноћу да куглица са врха упадне у ту преграду.

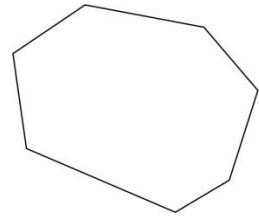
в) Које познате математичке законитости илуструје Галтонова табла?

6. [6 поена]

Један од најпознатијих математичких проблема, формулисан пре више од две и по хиљаде година, познат је под називом **Квадратура круга**. Вековима су математичари (научници и многобројни аматери и љубитељи математике) покушавали да одговоре на питање „Да ли је могуће лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је

површина једнака површини датог круга?". Тек је у 19. веку показано да је одговор на ово питање негативан.

Ученик вас пита да ли је могућа квадратура било ког задатог конвексног полигона. Прецизније, да ли је могуће лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је површина једнака површини задатог конвексног полигона? Како ћете одговорити? Описати конструкцију или објаснити зашто је она немогућа.



7. [6 поена]

Навести нивое постигнућа ученика према Блумовој таксономији образовних циљева.

8. [6 поена]

Описати основне мисаоне операције значајне за стварање појмова и решавање проблема.

9. [6 поена]

Навести основна начела наставе на која се односи Принцип очигледности. Начела илустровати примерима.

10. [6 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак. Одредити за које вредности реалног параметра a неједнакост

$$25^x + 4(a - 1)5^x + a > 1$$

важи за свако реално x .

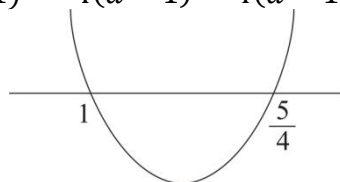
Решење ученика Н.Н.

Ако уведемо смену $t = 5^x$ добијамо неједнакост

$$t^2 + 4(a - 1)t + a - 1 > 0.$$

Ова неједнакост је тачна за свако реално t ако је дискриминанта D тринома са леве стране мања од 0, $D < 0$.

$$D = 16(a - 1)^2 - 4(a - 1) = 4(a - 1)(4a - 5) < 0$$



Дакле, $a \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$.