

Задатак

Одредити модул и аргумент комплексног броја $-\sin \frac{\pi}{9} - i \cos \frac{\pi}{9}$

Решење ученика Н.Н.

1. $z = -\sin \frac{\pi}{9} - i \cos \frac{\pi}{9}$

~~$-\sin \frac{\pi}{9} - i \cos \frac{\pi}{9}$~~ ~~$-\cos \frac{\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$~~

$|z| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9}} = 1$

~~$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} + 2k\pi$~~ ~~$-\cos \frac{\pi}{9} = \sin \frac{\pi}{9}$~~

~~$\varphi = \frac{2\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = 0$~~ $\cos \frac{\pi}{9} = \sin \alpha$

$\cos \varphi = -\cos \alpha$ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$

$-\sin \frac{\pi}{9} = -\cos \alpha$ $\alpha = \frac{(9-2)\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$

$\sin \frac{\pi}{9} = \cos \alpha$

$\sin \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$

$\alpha = \frac{(9-2)\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$

$\cos \frac{7\pi}{18} = -\cos \varphi$

$\varphi = \pi - \frac{7\pi}{18} = \frac{11\pi}{18}$

Задатак

У скупу реалних бројева решити једначину по x

$$\frac{a+4b}{x+2b} + \frac{4b-a}{x-2b} = \frac{4b}{a}, \quad a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}.$$

Решење ученика Н.Н.

$$\Leftrightarrow \frac{(a+4b)(x-2b) + (4b-a)(x+2b)}{(x+2b)(x-2b)} = \frac{4b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax - 2ab + 4bx - 8b^2 + 4bx + 8b^2 - ax - 2ab}{(x+2b)(x-2b)} = \frac{4b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8bx - 4ab}{(x+2b)(x-2b)} = \frac{4b}{a}, \quad x \neq 2b, x \neq -2b, a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b(2x-a)}{x^2-4b^2} = \frac{4b}{a} \quad (*)$$

$$\text{за } b=0: \quad \frac{4 \cdot 0 \cdot (2x-a)}{x^2-0} = \frac{4 \cdot 0}{a} \quad \text{Т}$$
$$0=0 \quad \text{Т}$$

За $b \neq 0$ претходну једнакост $(*)$ поделимо са b :

$$\Leftrightarrow \frac{2x-a}{x^2-4b^2} = \frac{4}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4b^2=2ax-a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2-4b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2-4b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2=4b^2$$

$$\Leftrightarrow x=a+2b \vee x=a-2b, \quad b \neq 0$$

Решење. За $b \neq 0$ два различита решења $x_1=a+2b, x_2=a-2b$
За $b=0$, $\forall x$ је решење једначине.

Задатак

Решити неједначину $\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x < 2$.

Решење ученика Н.Н.

Рад.

Како је $\log_{x+1} x = \frac{1}{\log_x(x+1)}$, имамо

$$\log_x(x^3+1) \cdot \frac{1}{\log_x(x+1)} < 2$$

$$\frac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)} < 2$$

$$\log_x[(x^3+1)-(x+1)] < 2$$

$$\log_x[x^3-x] < 2$$

$$x^3-x < x^2$$

$$x(x^2-x+1) < 0$$

Како је $x^2-x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ јер је $\Delta < 0$, закључујемо да је
скуп решења положителне једначине $\underline{(-\infty, 0]}$.

$$\boxed{x \in (-\infty, 0]}$$

Задатак.

Одредити за које вредности реалног параметра a неједнакост $25^x + 4(a - 1)5^x + a > 1$ важи за свако реално x .

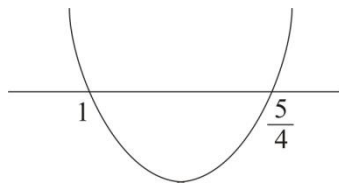
Решење ученика Н.Н.

Ако уведемо смену $t = 5^x$ добијамо неједнакост

$$t^2 + 4(a - 1)t + a - 1 > 0.$$

Ова неједнакост је тачна за свако реално t ако је дискриминанта D тринома са леве стране мања од 0, $D < 0$.

$$D = 16(a - 1)^2 - 4(a - 1) = 4(a - 1)(4a - 5) < 0$$



Дакле, $a \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$.

Задатак.

Решити по x једначину $\sin x + \cos x = 1$.

Решење ученика Н.Н.

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= 1 \\ (\sin x + \cos x)^2 &= 1 \\ \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \sin 2x &= 1 \\ \sin 2x &= 0 \\ 2x &= k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Задатак.

Решити по x једначину $x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} - 5x^2 \cdot \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$.

Решење ученика Н.Н.

$$x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} - 5x^2 \cdot \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$$

$$x^3 \cdot \sqrt[12]{x^{10}} - 5x^2 \sqrt[12]{x} = 6\sqrt[12]{x^4}$$

Смена: $x = t^{12}$

$$t^{36} \cdot t^{10} - 5t^{24} \cdot t = 6t^4$$

$$t^{46} - 5t^{25} = 6t^4 / : t^4$$

$$t^{42} - 5t^{21} = 6$$

Смена: $z = t^{21}$

$$z^2 - 5z - 6 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$z_1 = 6, z_2 = -1$$

$$z_1 = 6 \Rightarrow t_1 = \sqrt[21]{6} \Rightarrow x_1 = \sqrt[12]{6^{12}} = \sqrt[7]{6^4} = \sqrt[7]{1296}$$

$$z_2 = -1 \Rightarrow t_2 = \sqrt[21]{-1} = -1 \Rightarrow x_2 = (-1)^{12} = 1$$

Дакле решења дате једначине су $\sqrt[7]{1296}$ и 1.

Задатак

Решити неједначину $\sqrt{-x^2 - x + 20} > 3 - x$.

Решење ученика Н.Н.

20

$$\sqrt{-x^2 - x + 20} > 3 - x$$

10

$$-x^2 - x + 20 > 9 - 2x + x^2$$

$$-2x^2 + x + 11 > 0$$

$$2x^2 - x - 11 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 88}}{4}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{89}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{89}}{4}$$

3 - x > 0

$$x < 3$$

$x \in [-5, 4]$

$x \in \left[-5, \frac{1 - \sqrt{89}}{4}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{89}}{4}, 3\right)$

20

3 - x < 0

$$-x < -3$$

$$x > 3$$

$-x^2 - x + 20 > 0$

$$x \in [-5, 4]$$

$x \in (3, 4]$

$x \in \left[-5, \frac{1 - \sqrt{89}}{4}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{89}}{4}, 3\right) \cup (3, 4]$

Задатак

Решити једначину $\log_{25}^2 x^2 = \log_5 x \cdot \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$

Решење ученика Н.Н.

$$\textcircled{6} \log_{25}^2 x^2 = (\log_5 x) / \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$$

$$2 \log_{25}^2 x = (\log_5 x) / \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$$

$$\log_5^2 x = (\log_5 x) \cdot \log_{5^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{x+5}-1)$$

$$\log_5^2 x = (\log_5 x) \cdot 2 \log_5(\sqrt{x+5}-1)$$

$$\textcircled{p} \log_5 x = 2 \log_5(\sqrt{x+5}-1) \quad \text{or} \quad \log_5 x = 0 \quad \log_5 x = 0$$

$$x = (\sqrt{x+5}-1)^2$$

$$x = x+5 - 2\sqrt{x+5} + 1$$

$$\sqrt{x+5} = 3$$

$$x+5=9$$

$$\boxed{x=4}$$

$$x+5 \geq 0$$

$$x \geq -5$$

$$\boxed{x \in \{4, 1\}}$$

Задатак

Решити једначину $\sqrt{x-5} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$.

Решење ученика Н.Н.

① $\sqrt{x-5} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$

$\sqrt{x-5} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$

$x-5 + 4x+13 + 2\sqrt{(x-5)(4x+13)} = 3x+12$

$5x+8 + 2\sqrt{4x^2+13x-4x-13} = 3x+12$

$2x-4 + 2\sqrt{4x^2+9x-13} = 0$

$2\sqrt{4x^2+9x-13} = -2x+4$

$4(4x^2+9x-13) = 4x^2 + 76 + 96x$

$4x^2+9x-13 = x^2+19x+19$

$3x^2-10x-32=0$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{225+1824}}{6}$

$\frac{10 \pm \sqrt{3049}}{6}$

$\frac{10 - \sqrt{3049}}{6} < 0$

Handwritten notes on the right side of the grid:

- $x-5 \geq 0$
- $x \geq 5$
- $3x+12 \geq 0$
- $3x \geq -12$
- $x \geq -4$
- $4x+13 \geq 0$
- $4x \geq -13$
- $x \geq -\frac{13}{4}$

Задатак

Решити једначину $\sqrt{x-5} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$.

Решење ученика Н.Н.

$$\text{До } \sqrt{x-1} - \sqrt{3x+12} + \sqrt{4x+13} = 0$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12} \quad |^2$$

$$x-1 \geq 0 \\ x \geq 1$$

$$4x+13 \geq 0 \\ 4x \geq -13 \\ x \geq -\frac{13}{4}$$

$$3x+12 \geq 0 \\ 3x \geq -12 \\ x \geq -4$$

$$x \geq 1$$

$$x-1+4x+13+2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12$$

$$5x+12+2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12$$

$$2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = 3x+12-5x-12$$

$$2\sqrt{(x-1)(4x+13)} = -2x$$

$$\sqrt{(x-1)(4x+13)} = -x \quad |^2$$

$$(x-1)(4x+13) = x^2$$

$$4x^2+13x-4x-13 = x^2$$

$$3x^2+9x-13=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9-4 \cdot 3 \cdot (-13)}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{165}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{165}}{6} \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{165}}{6} \quad x_2 < 1$$

pa nije resenje

$x_1 \geq 1$ pa
jestе решење

Задатак

Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које једначина

$$2^{|x|} - 2^{-|x|} = a \cdot 2^x$$

има максималан број решења.

Решење ученика Н.Н.

1° Ако је $x \geq 0$, онда $2^x - 2^{-x} = a \cdot 2^x \quad / : 2^{-x}$

$$2^{2x} (1-a) = 1$$

$$2x = \log_2 \frac{1}{1-a}$$

$$2x = -\log_2 (1-a)$$

$$x = -\frac{1}{2} \log_2 (1-a) < 0 \quad \downarrow \quad x \geq 0 \quad \text{нема решења.}$$

2° Ако је $x < 0$, онда

$$2^{-x} - 2^x = a \cdot 2^x$$

$$2^{-x} = (1+a) \cdot 2^x$$

$$-2x = \log_2 (1+a)$$

$$x = -\frac{1}{2} \log_2 (1+a) \quad \text{има решења ако је} \quad \begin{matrix} a+1 > 0 \\ a > -1 \end{matrix}$$

Решење је $\boxed{a > -1}$.

Задатак

У скупу реалних бројева решити систем линеарних неједначина по x

$$(a-2)x > a-1,$$

$$(a-1)x > a-2,$$

где је a реални параметар.

Решење ученика Н.Н.

$$1^\circ \text{ Ако је } a > 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > \frac{a-1}{a-2} \\ x > \frac{a-2}{a-1} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left(\frac{a-1}{a-2}, +\infty \right)$$

$$2^\circ \text{ Ако је } a = 2 \Rightarrow 0 > 1 \Rightarrow \text{нема решења}$$

$$3^\circ \text{ Ако је } 1 < a < 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{a-1}{a-2} \\ x > \frac{a-2}{a-1} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left(\frac{a-2}{a-1}, \frac{a-1}{a-2} \right)$$

$$4^\circ \text{ Ако је } a = 1 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{има решење } \forall x$$

$$5^\circ \text{ Ако је } a < 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x < \frac{a-1}{a-2} \\ x < \frac{a-2}{a-1} \end{array} \right\} \Rightarrow x < \frac{a-2}{a-1}$$

Решење система:

$$a < 1 \Rightarrow x < \frac{a-2}{a-1}$$

$$a = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$1 < a < 2 \Rightarrow x \in \left(\frac{a-2}{a-1}, \frac{a-1}{a-2} \right)$$

$$a = 2 \Rightarrow \text{нема решења}$$

$$a > 2 \Rightarrow x > \frac{a-1}{a-2}$$

ЗадатакРешити неједначину $\log_{\sqrt{x}} \log_2(4^x - 12) \leq 4$.**Решење ученика Н.Н.**

$$x > 0, x \neq 1$$

$$1^\circ \quad 0 < x < 1$$

$$\log_2(4^x - 12) \geq x$$

$$4^x - 2^x - 12 \geq 0$$

$$t^2 - t - 12 \geq 0, t > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$



$$t_1 = 4 \quad \vee \quad t_2 = -3$$

$$t \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$$

$$2^x > 4 \Rightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$2^\circ \quad x > 1 \quad \log_2(4^x - 12) \leq x$$

$$4^x - 2^x - 12 \leq 0$$

$$t^2 - t - 12 \leq 0, t > 0$$



$$t \in [-3, 4]$$

$$-3 \leq t \leq 4$$

$$-3 \leq 2^x \leq 2^2$$

$$x \leq 2$$

$$\stackrel{1^\circ}{\Rightarrow} \stackrel{2^\circ}{\Rightarrow} x \in (-\infty, 2] \cup [2, +\infty) \Rightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

Задатак

Решити неједначину $\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1}x < 2$.

Решење ученика Н.Н.

Рад.

Како је $\log_{x+1}x = \frac{1}{\log_x(x+1)}$, имамо

$$\log_x(x^3+1) \cdot \frac{1}{\log_x(x+1)} < 2$$

$$\frac{\log_x(x^3+1)}{\log_x(x+1)} < 2$$

$$\log_x[(x^3+1)-(x+1)] < 2$$

$$\log_x[x^3-x] < 2$$

$$x^3-x < x^2$$

$$x(x^2-x+1) < 0$$

Како је $x^2-x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ јер је $\Delta < 0$, закључујемо да је
скуп решења позитивне једначине $\boxed{(-\infty, 0]}$.

$$\boxed{x \in (-\infty, 0]}$$

Задатак

Решити по x једначину $\frac{a}{x-b} + \frac{a}{x+b} = \frac{2b}{x^2-b^2}$, у којој су a, b реални параметри.

Решење ученика Н. Н.

Дата једначина је еквивалентна са следећим једначинама:

$$\frac{ax + ab + ax - ab}{x^2 - b^2} = \frac{2b}{x^2 - b^2},$$

$$\frac{2ax}{x^2 - b^2} = \frac{2b}{x^2 - b^2},$$

$$ax = b.$$

Дакле,

1° ако је $a \neq 0$ једначина има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$;

2° ако је $a = 0$ и $b = 0$, решење дате једначине је сваки реалан број;

3° ако је $a = 0$ и $b \neq 0$ једначина нема решења.

Задатак

У зависности од реалних параметара a и b у скупу реалних бројева решити по x једначину

$$\frac{ax + b}{x^2 + ax + b} = 0.$$

Решење ученика Н. Н.

Дата једначина је еквивалентна са

$$ax = -b \text{ и } x^2 + ax + b \neq 0.$$

Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, тада дата једначина нема решења јер је немогуће да је $0 \cdot x = -b \neq 0$.

Ако је $a = b = 0$, тада је решење дате једначине сваки реалан број. Нека је $a \neq 0$. Пошто једначину решавамо у скупу реалних бројева потребно је и да дискриминанта тринома $x^2 + ax + b$ буде ненегативна тј. $D = a^2 - 4b \geq 0$. Такође, решење $ax = -b$, тј. број $x = -\frac{b}{a}$ не сме да буде нула имениоца, тј. мора да буде

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = \frac{b^2}{a^2} \neq 0,$$

што је испуњено ако је $b \neq 0$.

Дакле, у случају $a \neq 0$, једначина има јединствено решење $x = -\frac{b}{a}$ ако и само ако је $a^2 \geq b$ и $b \neq 0$, а нема решења ако је $a^2 \leq b$ или $b = 0$.

Задатак

Дата је права p , кружница k и на њој тачка A , при чему права p и кружница k немају заједничких тачака. Конструисати кружницу која додирује праву p и круг k у тачки A .

Решење ученика Н. Н.

Анализа.

Тангента a датог круга k у тачки A биће заједничка тангента датог и траженог круга. Центар траженог круга је на правој OA , где је O центар круга k . Како тражени круг треба да додирује праве a и p , центар му припада симетрали угла одређеног правима a и p .

Конструкција.

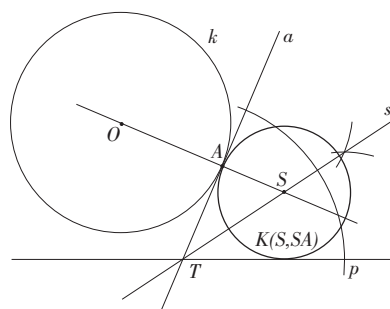
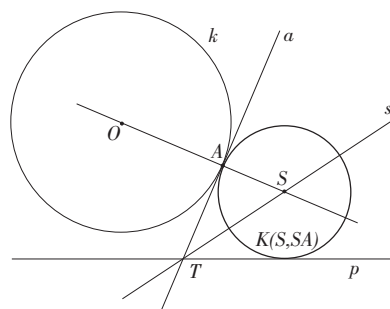
Конструираемо најпре тангенту a датог круга k у тачки A . Затим, конструираемо симетралу s угла кога образују праве a и p . Пресек праве s и праве OA , тј. тачка S , је центар траженог круга. Дакле, тражени круг је $K(S, SA)$.

Доказ.

Да је $K(S, SA)$ тражени круг следи директно из анализе и конструкције.

Дискусија.

Задатак нема решења ако је права a паралелна са p , тј. ако је права OA нормална на p ; иначе задатак има једно решење.



Задатак

Одредити све комплексне бројеве z такве да је $\frac{z-i}{z-1}$ чисто имагинаран број и важи $|z-3+i|=1$.

Решење ученика Н. Н.

За $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z-1} &= \frac{x+yi-i}{x+yi-1} = \frac{x+yi-i}{x-1+yi} \cdot \frac{x-1-yi}{x-1-yi} \\ &= \frac{x^2 + \cancel{xy}i - xi - x - yi + i - \cancel{xy}i + y^2 - y}{(x-1)^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - x + y^2 - y}{(x-1)^2 + y^2} + i \frac{1 - x - y}{(x-1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

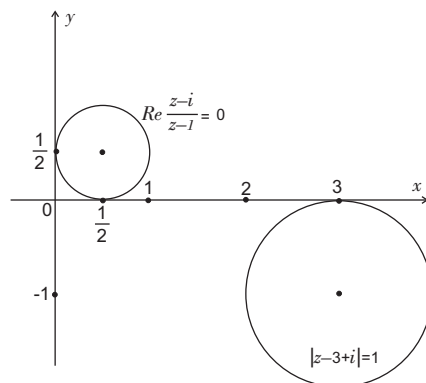
Услов $\operatorname{Re} \left(\frac{z-i}{z-1} \right) = 0$ еквивалентан је са $x^2 - x + y^2 - y = 0$, тј. са

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, што геометријски представља кружницу са центром у тачки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, полупречника $\frac{1}{2}$.

С друге стране, услов $|z-3+i|=1$, еквивалентан је са

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$$

што представља једначину кружнице са центром у $(3, -1)$ полупречника 1.



Са слике се види да комплексни бројеви који задовољавају оба услова не постоје, тј. да је скуп решења $\emptyset$.

Задатак

Наћи скуп свих вредности реалног параметра a тако да неједнакост $\log_{a^2+a+1} \frac{3x^2+4}{x^2+1} > 1$ важи за сваки реалан број x .

Решење ученика Н. Н.

Лева страна неједнакости је дефинисана ако је $a^2+a+1 > 0$, $a^2+a+1 \neq 1$ и $\frac{3x^2+4}{x^2+1} > 0$. Пошто је

$$a^2 + a + 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = -1,$$

а неједнакости $a^2 + a + 1 > 0$ и $\frac{3x^2+4}{x^2+1} > 0$ важе за свако a , односно за свако x , следи да је лева страна дате неједнакости дефинисана ако $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ и $x \in \mathbb{R}$.

Дата неједнакост је еквивалентна са $\frac{3x^2+4}{x^2+1} > a^2 + a + 1$, тј. са

$$(a^2 + a - 2)x^2 + a^2 + a - 3 < 0.$$

Последња неједнакост важи за свако реално x ако је $a^2 + a - 2 \leq 0$. Како је

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ тј. } a_1 = -2, a_2 = 1,$$

скуп решења неједначине $a^2 + a - 2 \leq 0$ је затворени интервал $[-2, 1]$. Имајући у виду услове дефинисаности, скуп свих вредности реалног параметра a за који дата неједнакост важи је $[-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1]$.

Задатак

Решити једначину $\log_{25}^3 x^2 = (\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5} - 1)) \cdot (\log_5 x)^2$.

Решење ученика Н. Н.

Због дефинисаности израза који се појављују у овој једначини, добијамо услове:

$$x \neq 0, \text{ јер је } x^2 \geq 0,$$

$$x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5,$$

$$\sqrt{x+5} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -4,$$

из којих следи да решење једначине припада скупу $[-4, 0) \cup (0, +\infty)$.

Даље, пошто је

$$\log_{25}^3 x^2 = 2 \log_{5^2}^3 x = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5^3 x = \log_5^3 x = (\log_5 x)^3,$$

$$\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5} - 1) = 2 \log_5(\sqrt{x+5} - 1) = \log_5(\sqrt{x+5} - 1)^2,$$

дата једначина се може записати у облику

$$(\log_5 x)^3 = \log_5(\sqrt{x+5} - 1)^2 \cdot (\log_5 x)^2,$$

а после дељења са $\log_5 x$,

$$\log_5 x = \log_5(\sqrt{x+5} - 1)^2.$$

Последња једначина је еквивалентна са

$$x = (\sqrt{x+5} - 1)^2.$$

$$x = x + 5 - 2\sqrt{x+5} + 1$$

$$2\sqrt{x+5} = 6$$

$$\sqrt{x+5} = 3$$

$$x + 5 = 9$$

$$x = 4$$

Задатак

У зависности од реалних параметара a, b, c, d решити систем једначина:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ax + by + cz &= d \\a^2x + b^2y + c^2z &= d^2,\end{aligned}$$

при чему је $d \neq a, d \neq b, d \neq c$.

Решење ученика Н. Н.

Систем решавам Крамеровим правилом.

Детерминанта датог система је

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\&= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b \\&= bc(c - b) - a(c^2 - b^2) + a^2(c - b) \\&= (c - b)(bc - ac - ab + a^2) = (c - b)(c - a)(b - a).\end{aligned}$$

Како се $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ од Δ разликује само по томе што уместо a стоји d , имамо да је $\Delta_x = (b - d)(c - d)(c - b)$.

Слично је $\Delta_y = (d - a)(c - a)(c - d)$ и $\Delta_z = (b - a)(d - a)(d - b)$.

1° Ако је $a \neq b \neq c$, тада је $\Delta \neq 0$, па је решење система:

$$x = \frac{(b - d)(c - d)}{(b - a)(c - a)}, \quad y = \frac{(b - a)(c - d)}{(b - a)(c - b)}, \quad z = \frac{(d - a)(d - b)}{(c - a)(c - b)}.$$

2° Ако је $a = b \neq c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$, па систем нема решења.

3° Ако је $a \neq b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_y \neq 0$, па систем нема решења.

4° Ако је $a = b = c$, тада је $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, па систем има бесконачно много решења.

Задатак

Одредити скуп свих вредности реалног параметра m таквих да је за свако реално x важи неједнакост

$$\sqrt{5x^2 + mx + 2} > 1 + 2x.$$

Решење ученика Н. Н.

Да би неједнакост важила за сваки реалан број x неопходно је да корен $\sqrt{5x^2 + mx + 2}$ буде увек дефинисан, тј. да за свако x важи $5x^2 + mx + 2 \geq 0$. Последња неједнакост важи за свако x ако дискриминанта није позитивна:

$$D = m^2 - 40 \leq 0, \quad \text{тј. ако} \quad m \in [-\sqrt{40}, \sqrt{40}].$$

За $m \in [-\sqrt{40}, \sqrt{40}]$, дата неједнакост ће важити ако и само ако

$$5x^2 + mx + 2 > 1 + 4x + 4x^2, \quad \text{за свако } x,$$

односно

$$x^2 + (m - 4)x + 1 > 0, \quad \text{за свако } x.$$

Најзад, последња неједнакост важи за свако x ако је одговарајућа дискриминанта негативна:

$$D_1 = (m - 4)^2 - 4 = m^2 - 8m + 12 < 0.$$

$$m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}, \quad m_1 = 6, \quad m_2 = 2,$$

Дакле, $D_1 < 0$ ако $m \in (2, 6)$. Како је

$$[-\sqrt{40}, \sqrt{40}] \cap (2, 6) = (2, 6),$$

добивамо коначно решење: $\boxed{2 < m < 6}$