

Задатак Доказати следећу теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. (Теорема о остацима) Нека је $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$. Тада постоје јединствени бројеви $q, r \in \mathbb{Z}$ такви да је

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Број q назива се *количник*, а број r *остатак* при дељењу броја a бројем b .

Задатак а) Описати и објаснити Еуклидов алгоритам.

б) Одредити највећи заједнички делилац бројева 942 и 444.

в) Одредити целе бројеве α и β тако да је $942\alpha + 444\beta = \text{nzd}(942, 444)$.

Задатак

Свака од три машине може да прочита картицу на којој је уписан пар целих бројева (m, n) и да затим одштампа нову картицу. При томе,

- ако машина А учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром $(m - n, n)$;
- ако машина В учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром $(m + n, n)$;
- ако машина С учита картицу на којој је пар (m, n) , она штампа нову картицу са паром (n, m) .

На почетку је дата картица на којој је уписан пар $(19, 81)$. Да ли је могуће употребом ове три машине у произвољном поретку добити картицу на којој је уписан пар:

а) $(7, 13)$; б) $(12, 21)$?

Задатак Нека су m и n природни бројеви и $m < n$. Од правоугаоника чије су димензије $m \times n$ одсецани су квадрати странице m док год није остао правоугаоник чија је једна страница краћа од m . Од добијеног правоугаоника одсецани су квадрати чије су странице једнака дужини краће странице правоугаоника, док год је то било могуће. На ново добијени правоугаоник је поново примењен исти поступак. Наравно поступак се зауставља када се након одсецања одговарајућих квадрата добије квадрат. Одредити димензије последњег квадрата добијеног резањем правоугаоника.

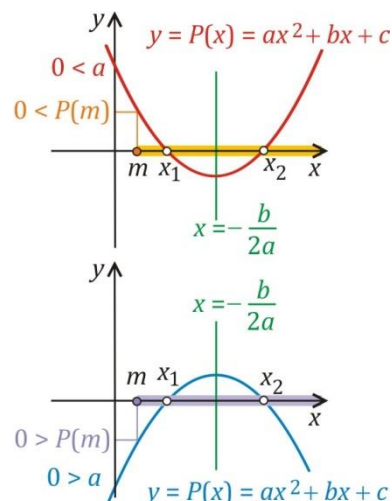
Задатак

Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) и нека је m неки реалан број. Означимо са $P(x)$ полином $ax^2 + bx + c$.

а) Доказати да су оба решења x_1 и x_2 дате једначине већа од m

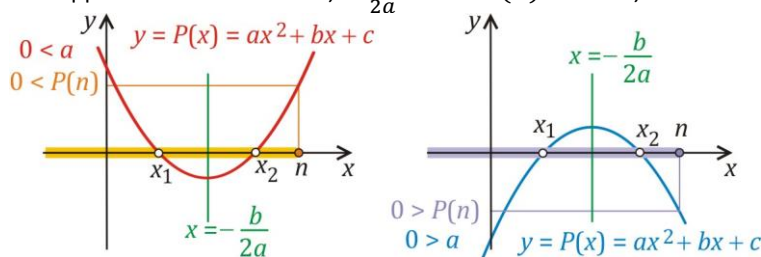
акко важи $D \geq 0$, $m < -\frac{b}{2a}$ и $P(m) \cdot a > 0$.

б) Докажи да је једно решење мање од m , а друго веће од m акко важи $D > 0$ и $P(m) \cdot a > 0$.



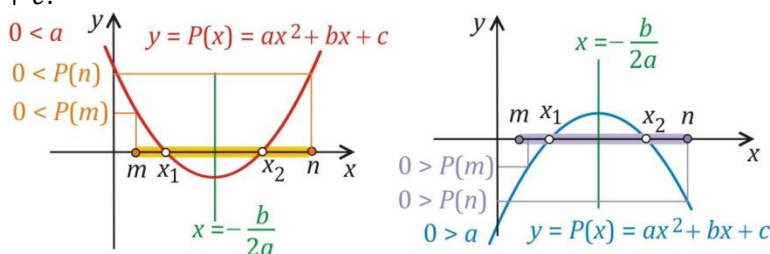
Задатак

Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) и нека је n неки реалан број. Означимо са $P(x)$ полином $ax^2 + bx + c$. Докажи да су оба решења x_1 и x_2 дате једначине мања од n ако важи $D \geq 0$, $-\frac{b}{2a} < n$ и $P(n) \cdot a > 0$,



Задатак

Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$), а m и n неки реални бројеви такви да је $m < n$. Докажи да оба решења x_1 и x_2 припадају интервалу (m, n) ако и само ако је $D \geq 0$, $m < -\frac{b}{2a} < n$, $P(m) \cdot a > 0$ и $P(n) \cdot a > 0$, при чему је $P(x) = ax^2 + bx + c$.



Задатак

Одреди све вредности реалног параметра p тако да решења једначине $4x^2 - 2x + p = 0$ припадају интервалу $(-1, 1)$.

Задатак У једном уџбенику математике за први разред средње школе описан је поступак познат под називом **рачун мешања**. Поступак је описан на следећем уопштеном примеру.

Треба помешати две врсте робе, чије су цене a дин/kg и b дин/kg, $a > b$, да би се добила роба по цени од c дин/kg. Одредити у којој размери треба мешати ове две врсте робе.

Даље у уџбенику стоји да се до решења долази помоћу следеће шеме:

$$\begin{array}{lcl} x \text{ kg по } a \text{ дин.} & c - b & \\ & \text{с дин.} & \\ y \text{ kg по } b \text{ дин.} & a - c & \end{array} \quad \left| \quad x : y = (c - b) : (a - c) \right.$$

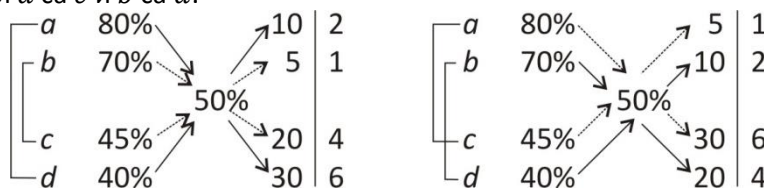
а) Како се наведени уопштени задатак може решавати без наведене шеме? Одговор заправо треба да представља образложење наведе шеме.

У истом уџбенику, након наведеног уопштеног примера, појављује се и следећи сложенији пример.

(*) У којој размери треба помешати растворе алкохола јачине 80%, 70%, 45% и 40% да би се добио раствор са 50% алкохола?

Дато је следеће решење:

Помешаћемо један јачи и један слабији раствор. Постоје две комбинације: a са d и b са c , или a са c и b са d .

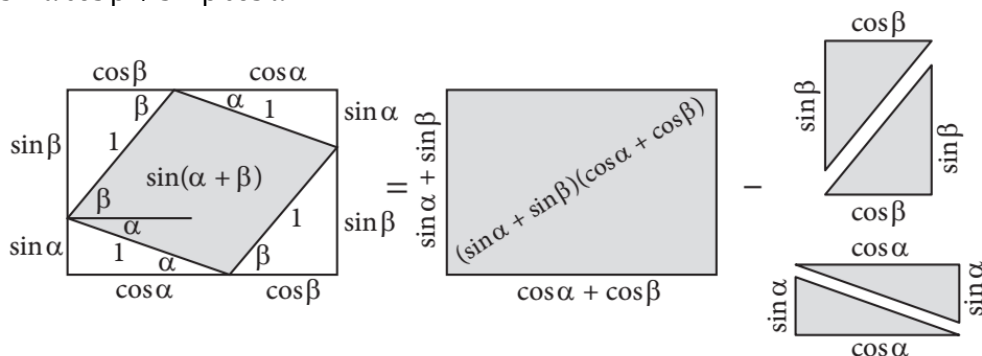


Једно решење је $a : b : c : d = 2 : 1 : 4 : 6$, а друго $a : b : c : d = 1 : 2 : 6 : 4$.

б) Решити проблем (*) без наведених шема?

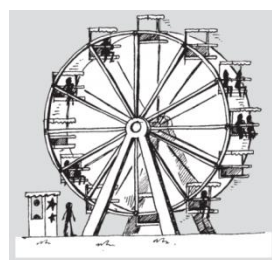
Задатак

а) Користећи слику, доказати да за свака два оштра угла α и β важи једнакост $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.



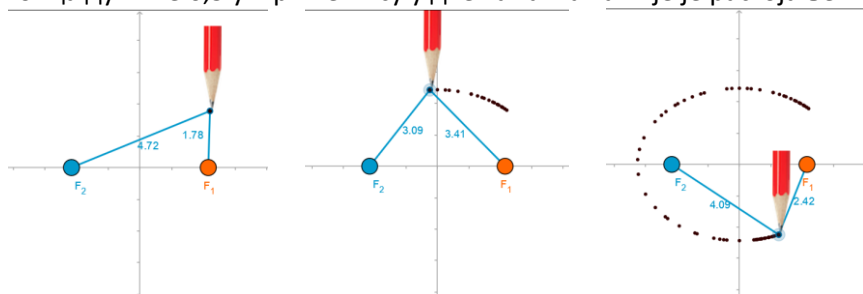
б) Доказати да за свака два реална броја x и y важи једнакост $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

Задатак Уводни проблеми за тему Тригонометријске функције често се односе на ротациона кретања. На пример, посматра се кретање Панорамског точка. Панорамски точак полупречника 10 m креће се константном брзином и пун круг обиђе за 100 секунди. На свакој корпи налази се по једна сијалица: када је корпа у најнижем положају, сијалица је 2 m изнад земље.



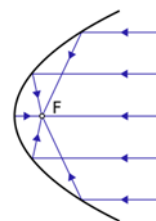
а) Описати законитост $h = F(t)$ којом се одређује висина h једне изабране сијалице од земље у тренутку t , претпостављајући да је у почетном тренутку ($t = 0$) висина те сијалица најмања.

Задатак ГеоГebra интерактивни прилог приказује познати поступак цртања елипсе: крајеви конца дужине 6,5 учвршћени су у два тачкама чије је растојање 4.



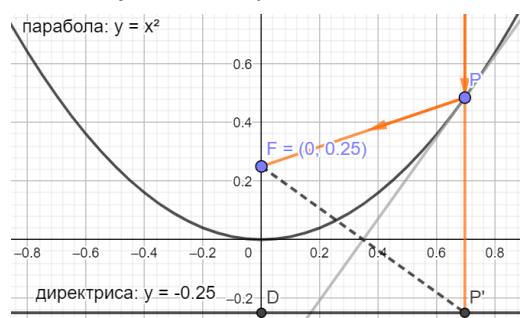
Одредити једначину елипсе у односу на координатни систем приказан на слици.

Задатак Параболична огледала имају примене од давнина, након што је старогрчки математичар Диокле доказао да се паралелни зраци светлости након одбијања од параболичног огледала скупљају у једну тачку, жижу. Позната је прича о томе како је Архимед параболичним огледалом „сакупио“ Сунчеве зраке у жижу огледала, усмерио их на непријатељске бродове и тако их запалио.

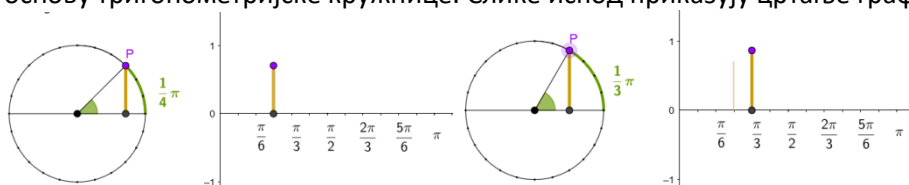


На примеру параболе $y = x^2$ објаснити и доказати *закон одбијања од параболичног огледала*: зраци паралелни оси симетрије параболе након одбијања пролазе кроз жижу те параболе.

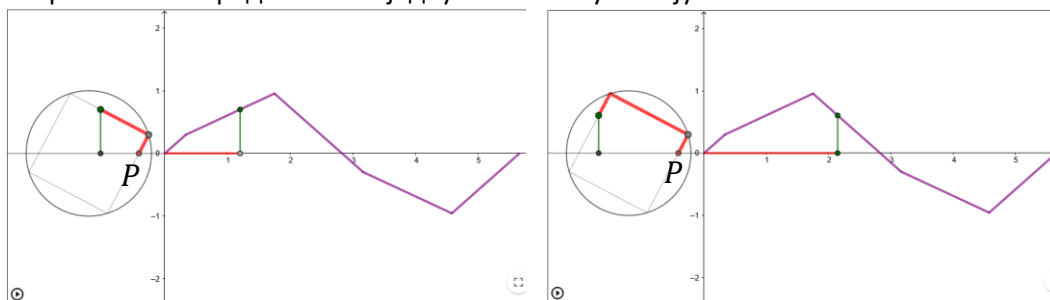
НАПОМЕНЕ: (1) У доказу се могу користити и изводи. (2) Угао између упадног зрака и тангенте у одговарајућој тачки једнак је углу између одбојног зрака и тангенте.



Задатак ГеоГebra прилози често се користе за цртање графика тригонометријских функција на основу тригонометријске кружнице. Сlike испод приказују цртање графика $y = \sin x$.



Аналогно се може поступити када се кружница замени неком другом фигуром, на пример, квадратом који је уписан у јединичну кружницу. Ако замислимо да се тачка креће дуж страница квадрата, полазећи са позиције P , зависност између пређеног пута и ординате покретне тачке представљаће једну изломљену линију.



а) Одредити једначину изломљене линије добијене на описани начин.

Напомена. Једначина изломљене линије се састоји од описа свих дужи које чине ту линије. Опис сваке дужи треба да буде облика $y = kx + n$, $a \leq x \leq b$, где су k , n , a , b параметри које треба одредити.