

Основне мисаоне операције

Методика наставе

математике

рачунарства

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

Стварање појма		Решавање проблема
Предмети, појаве, представе, формирани појмови, ...	Мисаоне операције	Искуство, знање, вештине стечено решавањем одређених проблема
Уочавање сличности (разлика) са познатим представама и појмовима	Аналогија	Уочавање сличности са познатим проблемима
Рашчлањавање целине на делове; уочавање особина појединих делова и аспеката ситуације	Анализа	Шта је дато? Шта се тражи? Рашчлањавање онога што се тражи због уочавања веза са оним што је дато?
Састављање делова и дубље сагледавања целине. На који начин својства делова утичу на својства целине?	Синтеза	Конструкција онога што се тражи на основу датих података и делова добијених анализом.
Одбацивање неважних особина предмета, одн. аспеката појаве	Апстракција	Уочавање суштински важних веза између датог и траженог
Стварање појма на основу апстрахованих особина	Генерализација	Формирање општег приступа решавању проблема одговарајућег типа

Упоређивање/аналогија

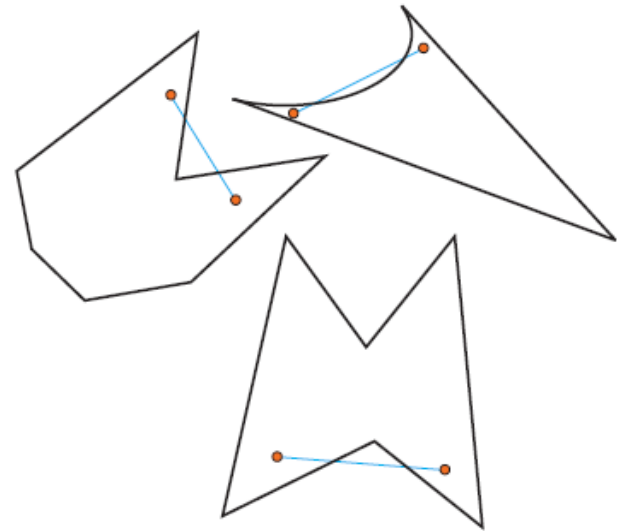
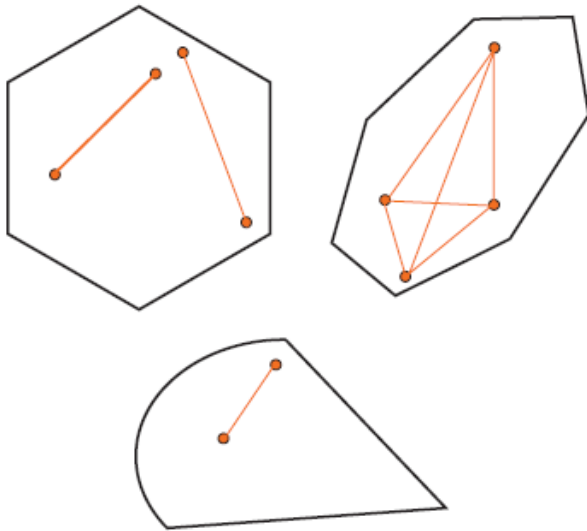
- **Упоређивање** или аналогија је мисаони процес који се састоји у утврђивању сличности међу предметима; разликовање или дискриминација јесте процес налажења разлика међу предметима и појавама.

[грч. *аналогиа* – склад, правилност, однос, сродност]

- **Људска меморија ради по принципу препознавања шаблона.**
- Позитивна аналогија = сличности
- Негативна аналогија = разлике

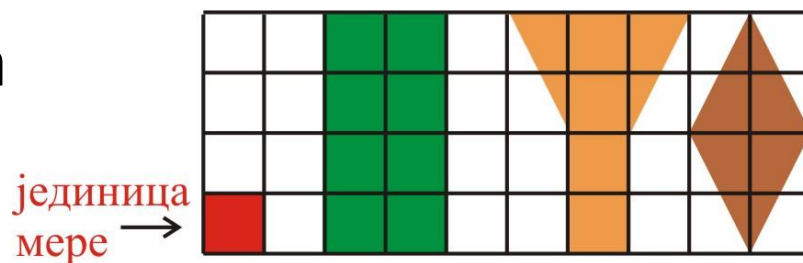
Упоређивање/аналогија

Можеш ли да наслутиш које својство имају сви објекти приказани на слици лево, а нема га ниједан објекат приказан на слици десно?

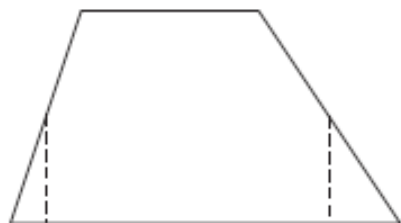
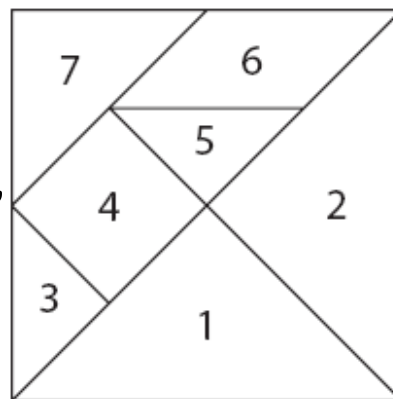


Шта је битније формула или поступак?

- Површина правоугаоника
(МЕТОДА 1 “прекри”)

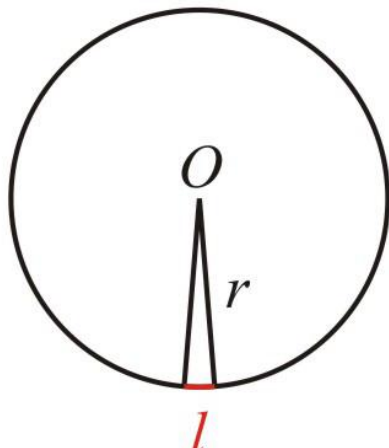
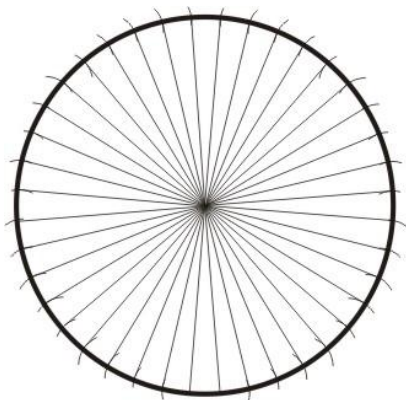


- Површине полигона
(МЕТОДА 2 “препакуј”)

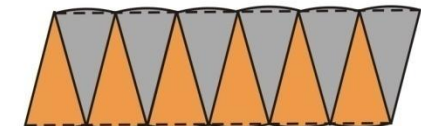
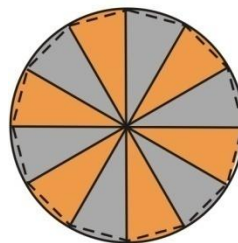
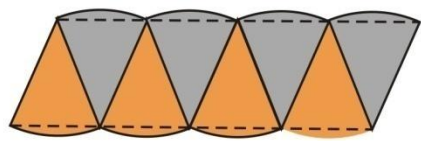
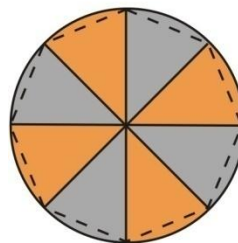
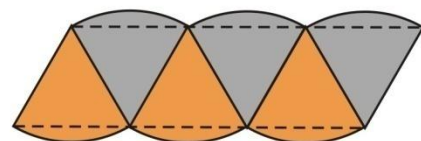
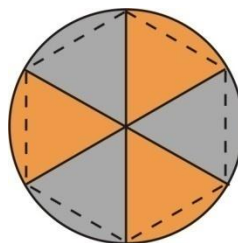


Шта је битније формула или поступак?

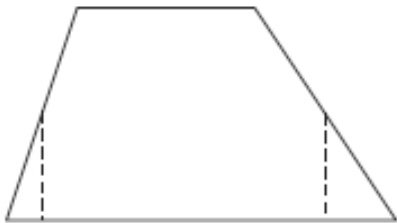
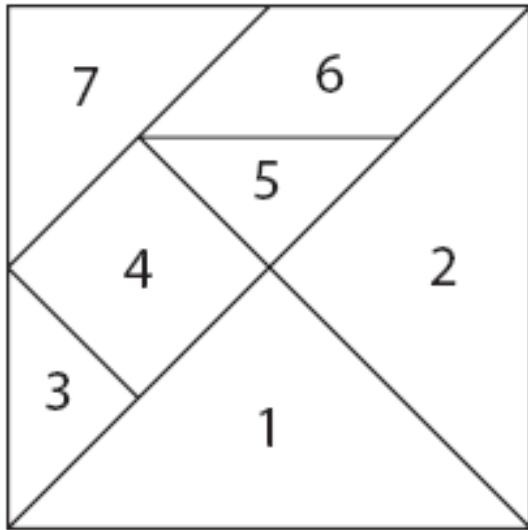
- Површина круга (МЕТОДА 3 “исцрпи”)



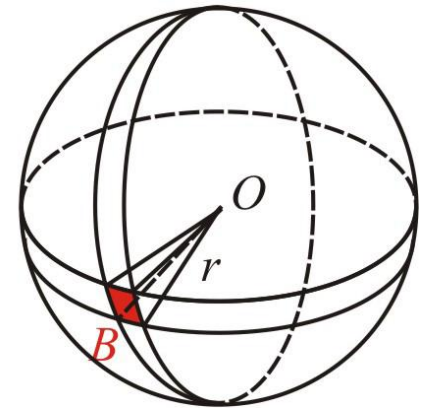
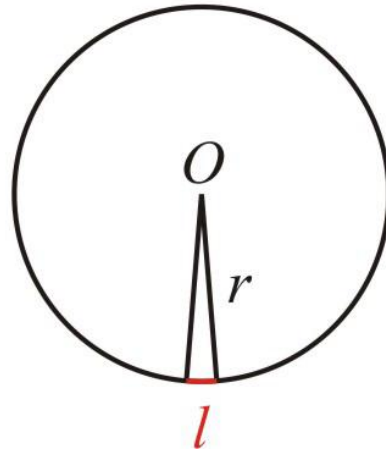
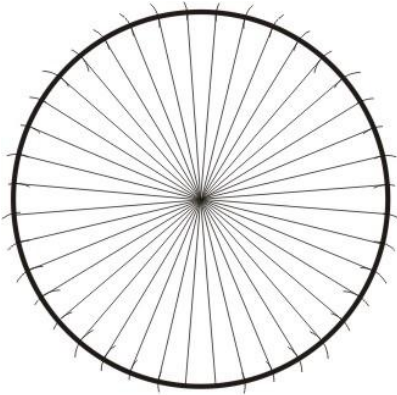
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\ell_1 r + \frac{1}{2}\ell_2 r + \cdots + \frac{1}{2}\ell_n r \\ &= \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n)r \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r \\ &= r^2\pi \end{aligned}$$



Аналогија



Аналогија



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\ell_1 r + \frac{1}{2}\ell_2 r + \dots + \frac{1}{2}\ell_n r \\
 &= \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n)r \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r \\
 &= r^2\pi
 \end{aligned}$$

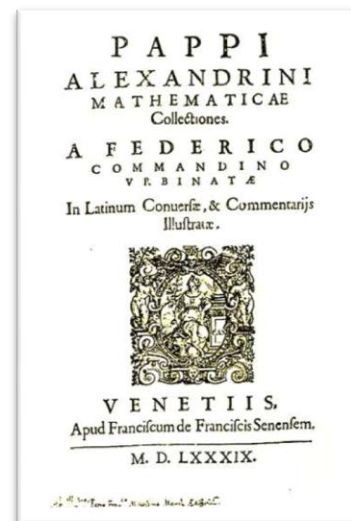
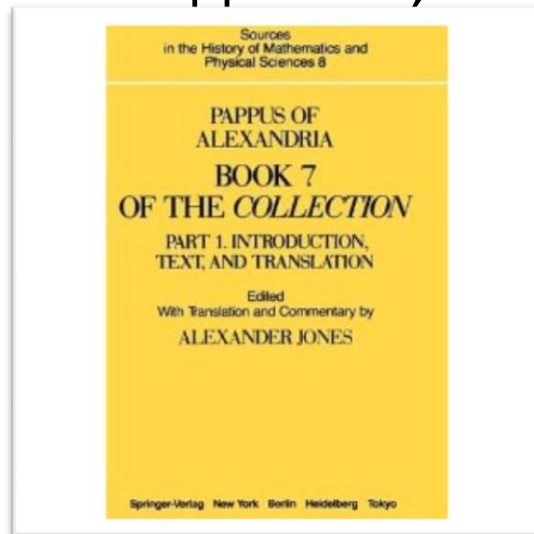
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3}B_1 r + \frac{1}{3}B_2 r + \dots + \frac{1}{3}B_n r \\
 &= \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots + B_n)r \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 4r^2\pi \cdot r \\
 &= \frac{4}{3}r^3\pi
 \end{aligned}$$

Анализа и синтеза

- **Анализа** је рашчлањавање појава и предмета на једноставније делове.
- **Синтеза** је повезивање рашчлањених делова.
- Најчешће се примељују комбиновано, дајући јединствену **аналитичко-синтетичку методу**.

Вештина решавања задатака

- ▶ **Папус** (грчки математичар, живео око 300. год.) Седма књига његовог чувеног дела *Collectiones* садржи “Ризницу анализе” (у слободном преводу “вештине решавања задатака”, или “хеуристике”).



- ▶ **Папсова** “Ризница анализе” почиње дефиницијама анализе и синтезе:

Вештина решавања задатака

- ▶ *Анализа* узима оно што се тражи као да је већ нађено и полази од тога преко узастопних полседица до нечега што се узима као почетак синтезе; јер у анализи узимамо да је оно што се тражи већ учињено и питамо се чија је то последица, и опет шта је узрок последњег, и тако даље све док идући оваквим корацима не стигнемо до нећег што је већ познати или што припада класи првих начела. Овакву методу називамо анализом као решавање уназад.
- ▶ *Синетза* је обнут процес, у њој узимамо као учињено то што је у анализи било последње достигнуто и сређујући у њиховом природном поретку као последице оно што су пре биле претпоставке и спајајући их редом једну за другом коначно долазимо до конструкције онога што је било тражено; и то зовео синтезом.



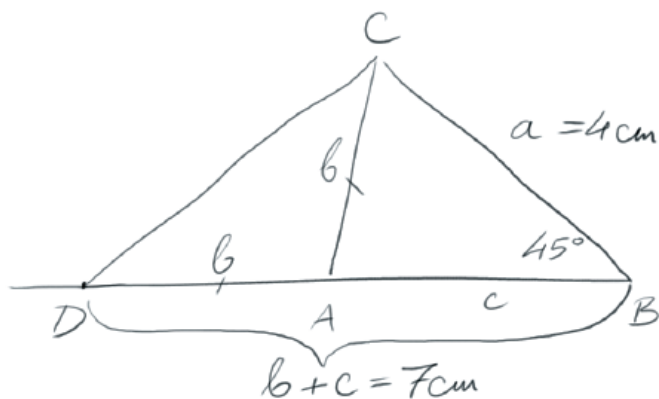
Вештина решавања задатака

Папус је своју методу решавања задатак илустровао на **конструктивним задацима**.

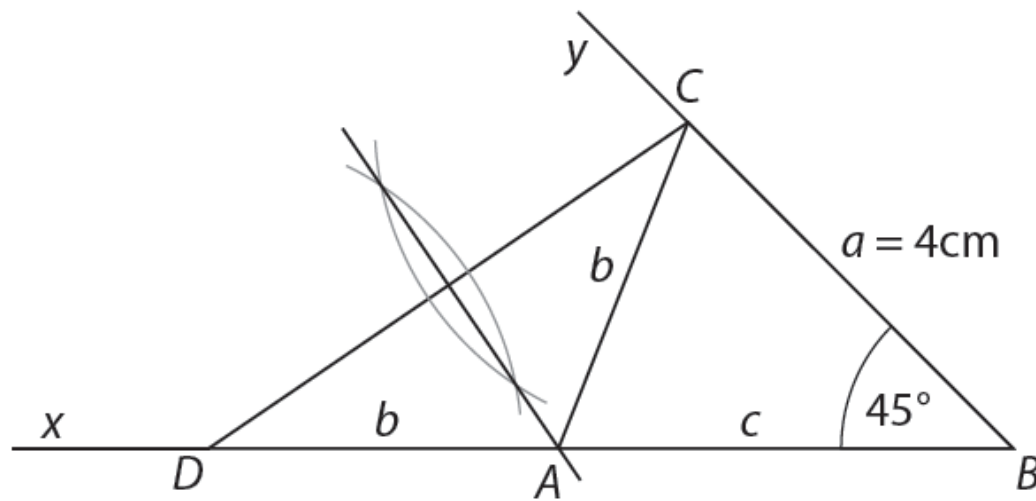
Задатак 33. Конструйши $\triangle ABC$ ако је дато a , $b + c$, β .

Конструйшимо $\triangle ABC$ тако да је $a = 4\text{cm}$, $b + c = 7\text{cm}$, $\beta = 45^\circ$.

АНАЛИЗА



КОНСТРУКЦИЈА



Доказ

Дискусија

Задатак. Доказати неједнакост (AG)

Пођимо од очигледне
неједнакости ...

Математика се не може
учити из збирке задатака!

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$



Анализа и синтеза

Неједнакост јесте очигледна, али
има и других које су очигледне па
не полазимо од њих ...

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

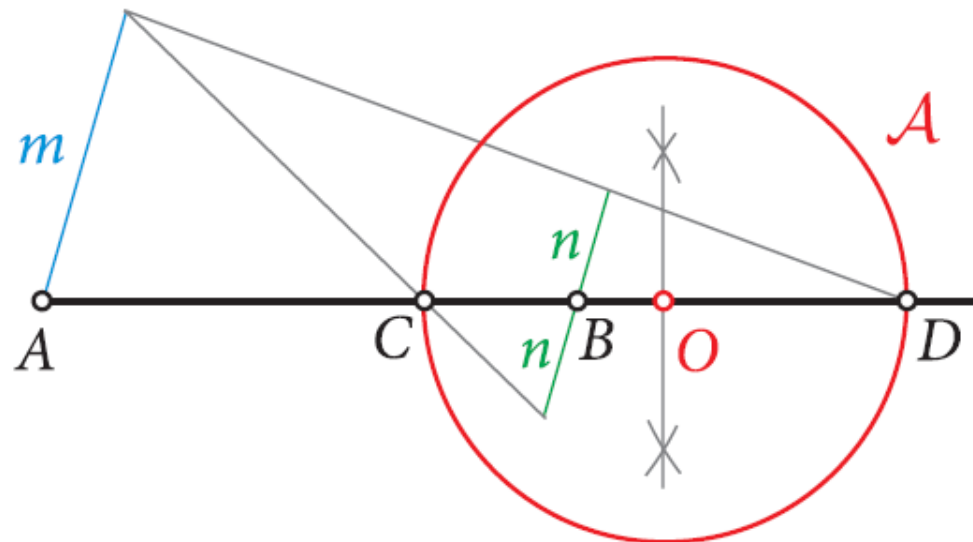


Анализа и синтеза

- АНАЛИЗА (Како да докажем?)
 - СИНТЕЗА (Ево доказа!)
-
- Аналитичка и синтетичка геометрија

Аполонијева кружница

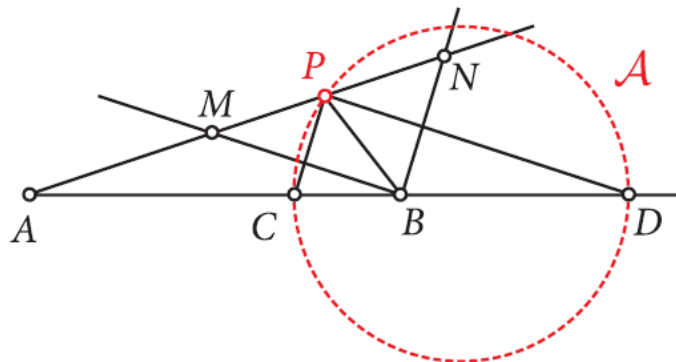
Нека су A и B две дате тачке и m и n дате неподударне дужи. Докажи да скуп свих тачака P таквих да је $PA : PB = m : n$ представља кружницу.



Аполонијева кружница

Нека су C и D тачке праве AB такве да је $AC : BC = AD : BD = m : n$. C и D су и једине тачке праве AB које задовољавају постављени услов.

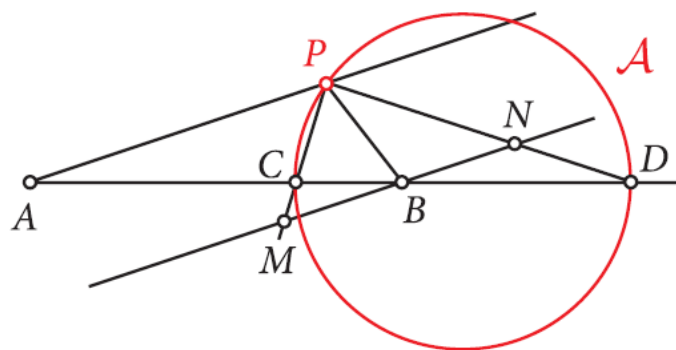
Нека је P произвољна тачка која није колинеарна са A и B таква да је $AP : BP = m : n$. Доказаћемо да је угао CPD прав (а тиме и да P припада кружници над пречником CD).



Конструишимо кроз B праве BM и BN такве да је $BM \parallel PD$ и $BN \parallel PC$, при чему M и N припадају правој AP (види слику изнад). Тада је $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{PN} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{PM} = \frac{m}{n} = \frac{AP}{BP}$, па је $PN \cong PM \cong BP$, одакле следи да је $\angle MBN$ прав. Због подударности углова са паралелним крацима, следи да је и $\angle CPD$ такође прав, што је и требало доказати.

Аполонијева кружница

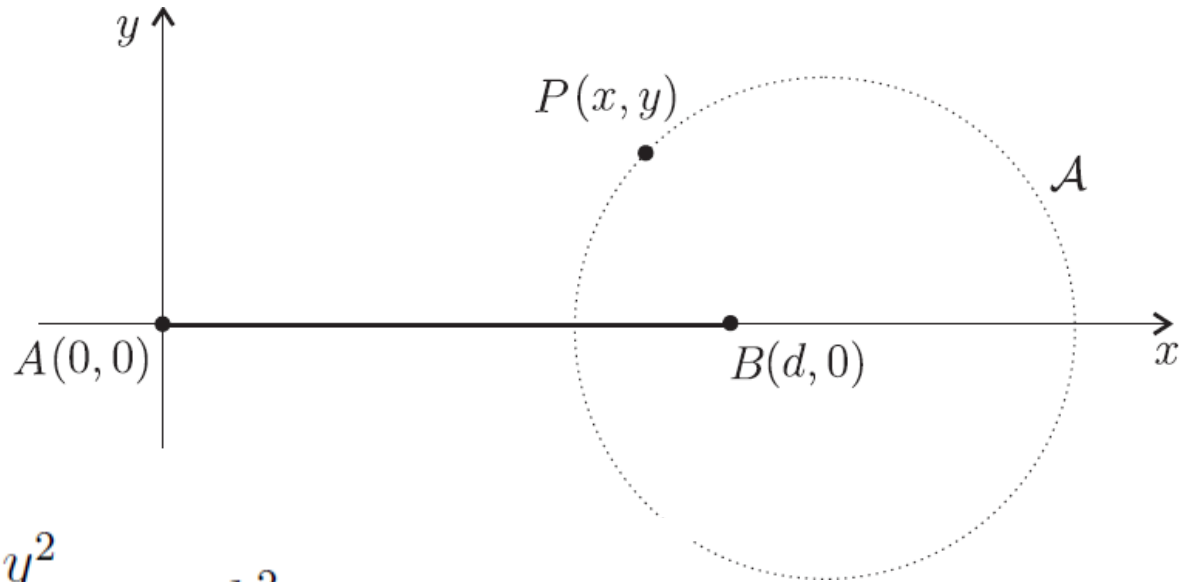
Докажимо и обрнуто, да свака тачка P кружнице над пречником CD задовољава једнакост $AP : BP = m : n$. Нека је P произвољна тачка кружнице над пречником CD . Конструиримо кроз B праву паралелну са AP и означимо са M и N пресеке ове праве са дужима PC и PD (види слику испод).



Тада је $\frac{AP}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{NB}$, одакле следи да је $MB \cong NB$, то јест да је B средиште хипотенузе MN правоуглог троугла MPN . Дакле, $BM \cong BN \cong PB$, па из претходних једнакости добијамо да је $AP : BP = m : n$.

Аполонијева кружница

- II начин



$$\frac{PA}{PB} = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x - d)^2 + y^2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \frac{dk^2}{k^2 - 1} x + \frac{d^2 k^2}{k^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{dk^2}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{d^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Апстракција и генерализација

- Основни процеси при формирању појмова јесу **апстракција** и **генерализација**.
- Апстракција је издвајање одређених карактеристика групе предмета, а занемаривање других својстава предмета која се одбацују као небитна.

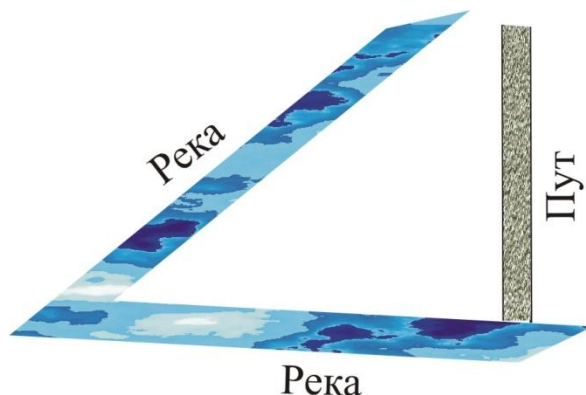
[abstrahere = извлачити, одвајати; trahere = вући]

- Генерализација или уопштавање састоји се у повезивању апстракцијом издвојених карактеристика у једну целину, а уз знање да се те одвојене одлике могу наћи и у другим случајевима и да ћемо увек кад буду те карактеристике заједно дате, имати посла са истом врстом предмета или појава.

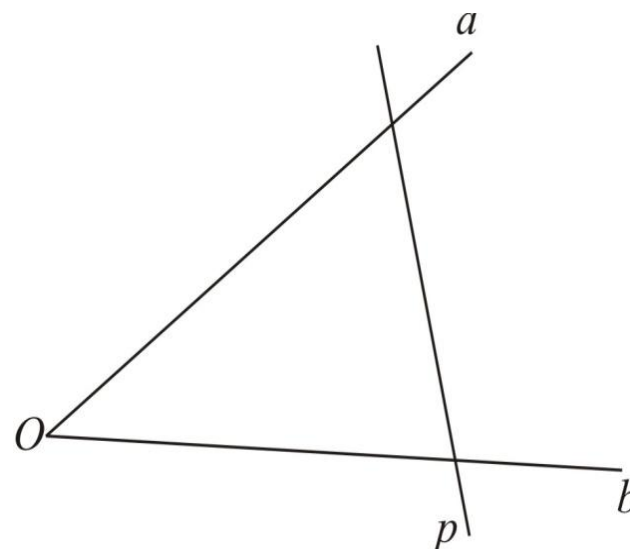
[generalisatio – уопштавање]

Конкретно и апстрактно

Задатак 66. Близу ушћа једне реке у другу налази се пут. Које место за кућу на подручју ограниченом рекама и путем треба да изабере неко ко жели да кућа буде поред пута и подједнако удаљена од обе реке?



Задатак 67. Одреди тачку праве p која је подједнако удаљена од кракова угла aOb .



Уопштење Питагорине теореме

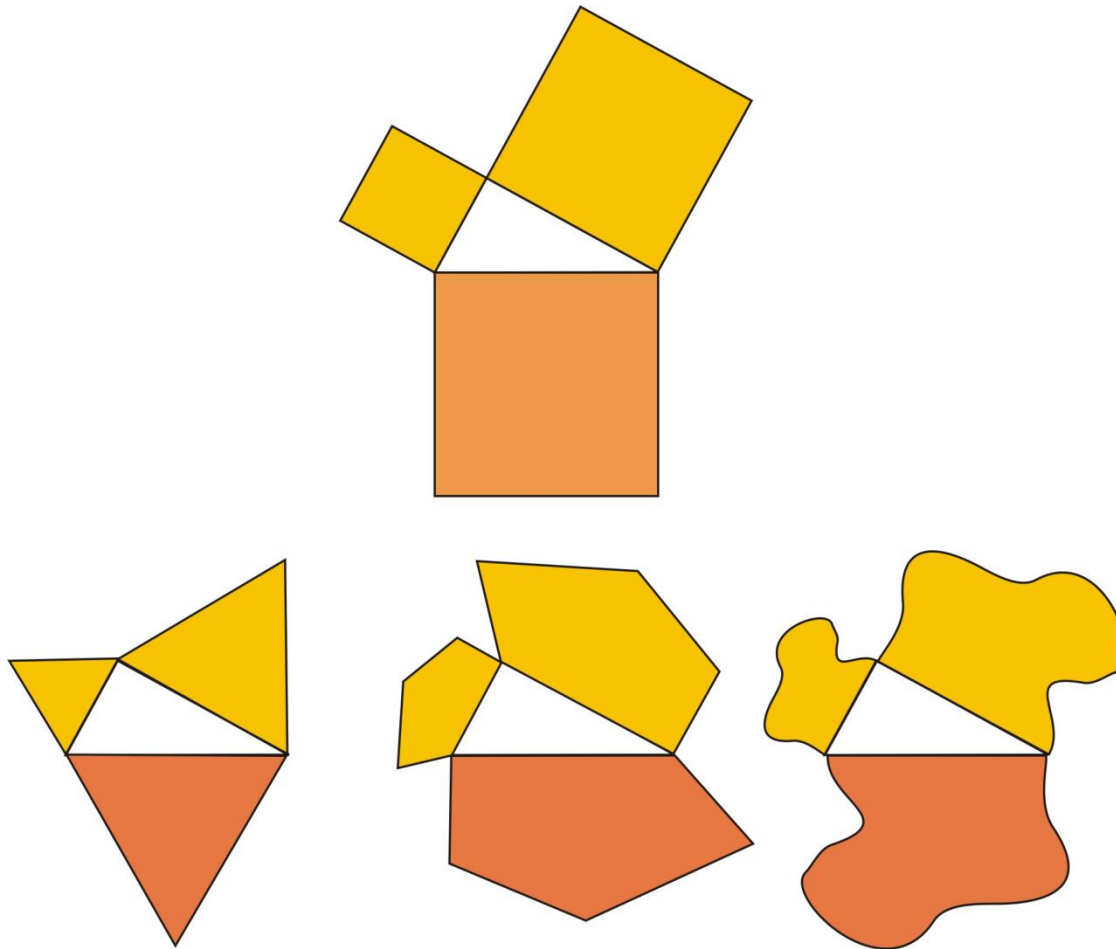
Задатак 1. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су једнакостранични троуглови.

Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Задатак 2. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су правилни шестоуглови. Испитај да ли је збир површина шестоуглова над катетама једнак површини шестоугла над хипотенузом.

Задатак 3. Странице правоуглог троугла су основице једнакокрако-правоуглих троуглова конструисаних са спољашње стране. Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Генерализација



Уопштење задатка

- **Задатак.** Дати су права и правилан октаедар. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.
- **Општији задатак.** Дати су права и централно симетрично тело. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог тела.