

Дидактички принципи кроз примере (4-8)

Методика наставе
математике
рачунарства

4. Принцип кохеретности, систематичности и поступности

- Овај принцип подразумева кохерентну организацију онога што треба научити уз одговарајућу систематизацију претходно наученог, поштујући тзв. Дистервегова правила поступности: од лакшег ка тежем, од познатог ка непознатом, од једноставнијег ка сложенијем, од ближег ка даљем.
- Ново знање мора бити проширење и надоградња наученог; ново не сме да одбацује претходно већ да се на њега природно наслања и логички надовезује.

Комплексни бројеви

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

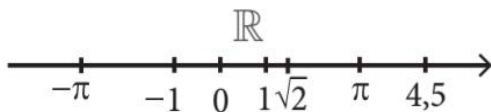
скуп природних бројева

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

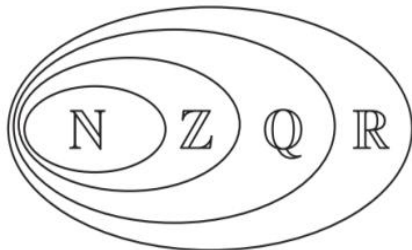
скуп целих бројева

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

скуп рационалних
бројева



скуп реалних бројева



$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

скуп комплексних
бројева



Хенкел: При грађењу неке нове врсте бројева захтева се да операције и релације уведене за нове бројеве „пошићују“ операције и релације старих бројева, што значи да треба сачувати рад са старим бројевима.

Комплексни бројеви

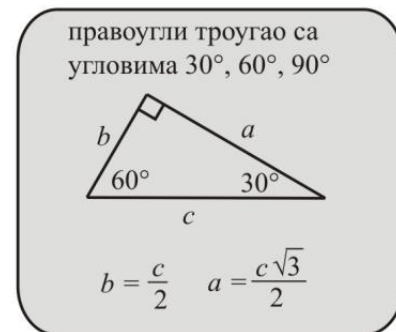
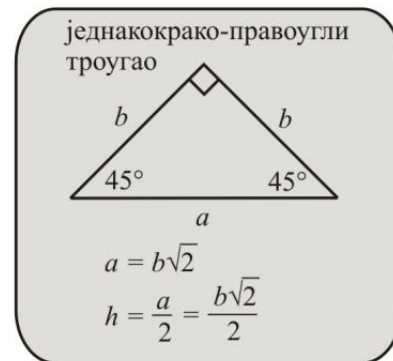
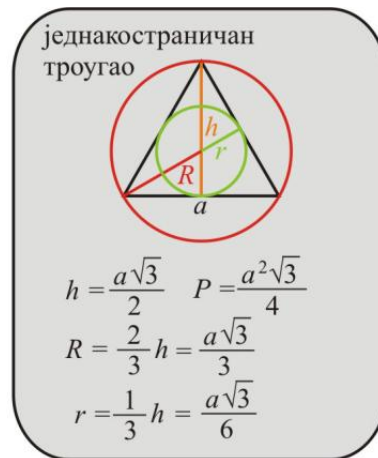
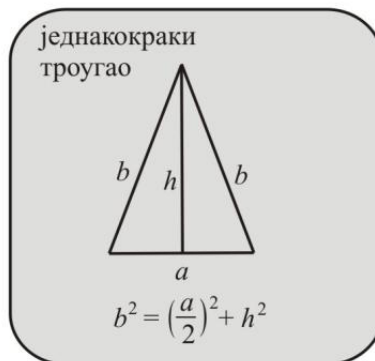
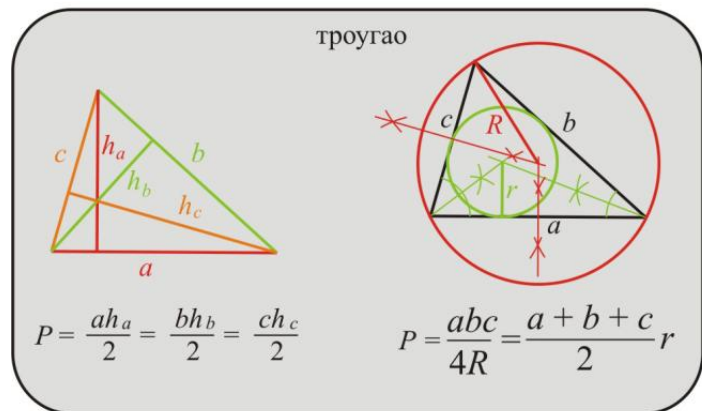
Пример

$\mathbb{F}$ скуп свих остатака који се добијају при дељењу полинома са реалним коефицијентима полиномом $x^2 + 1$; наравно остатак може бити било који полином највише првог степена са реалним коефицијентима па је $\mathbb{F} = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. У овом скупу дефинишимо и две операције $\oplus$ и $\bullet$ са:

$$\begin{aligned}(ax + b) \oplus (cx + d) &= \text{остатак дељења полинома } ax + b + cx + d \text{ са } x^2 + 1 \\ &= (a + c)x + (b + d),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ax + b) \bullet (cx + d) &= \text{остатак дељења полинома } (ax + b) \cdot (cx + d) \text{ са } x^2 + 1 \\ &= \text{остатак дељења полинома } acx^2 + (ad + bc)x + bd \text{ са } x^2 + 1 \\ &= \text{остатак дељења полинома } ac(x^2 + 1) + (ad + bc)x + bd - ac \\ &\quad \text{са } x^2 + 1 \\ &= (ad + bc)x + bd - ac.\end{aligned}$$

Систематизација



5. Принцип економичности

- Важни фактори утичу на организацију учења јесу: време, енергија, средства. Учење треба да буде економично: постићи што већи дидактички учинак са што мањим утрошком времена, енергије и средстава. Уштеда времена, енергије и средстава не сме да умањује квалитет наставе.
- Суштина принципа је да се не улаже више времена, енергије и средстава него што је неопходно. Под временом, енергијом и средствима подразумева се и ученичко и наставничко време, енергија и средства.

Квадратне једначине

- Централно место теме заузима анализа тзв. канонског облика квадратног тринома.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad [\text{Подели обе стране једначине са } a.]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \quad [\text{Допуни } x^2 + \frac{b}{a}x \text{ до квадрата бинома.}]$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad [\text{Означимо ову једначину са (*)}.]$$

Готове формуле (обрасци)

Задатак: *Докажи једнакост*

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = 3(b - c)(c - a)(a - b),$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$

$$\begin{aligned} & (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 - 3(b - c)(c - a)(a - b) \\ & \stackrel{(*)}{=} ((b - c) + (c - a) + (a - b))(\dots) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Готове формуле (обрасци)

За свака два реална броја x и y важи

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{и} \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Адиционе формуле
за косинус

За свака два реална броја x и y важи

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \quad \text{и} \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x.$$

Адиционе формуле
за синус

Трансформације
производа у збир

За све реалне бројеве x и y важи:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)], \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

За све реалне бројеве x и y важи:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

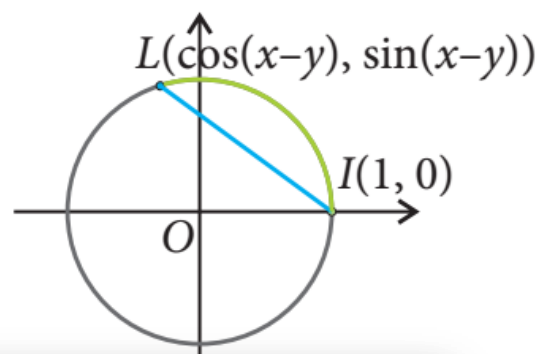
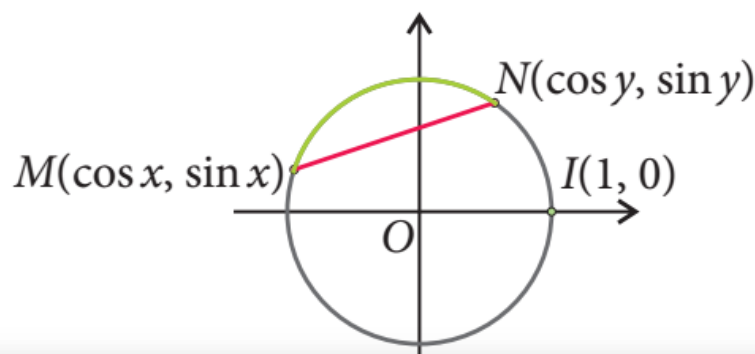
Трансформације збира
у производ

Готове формуле (обрасци)

За свака два реална броја x и y важи

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{и} \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Адиционе формуле
за косинус



$$\begin{aligned} MN^2 &= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \\ &= \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 1 + 1 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y), \end{aligned}$$

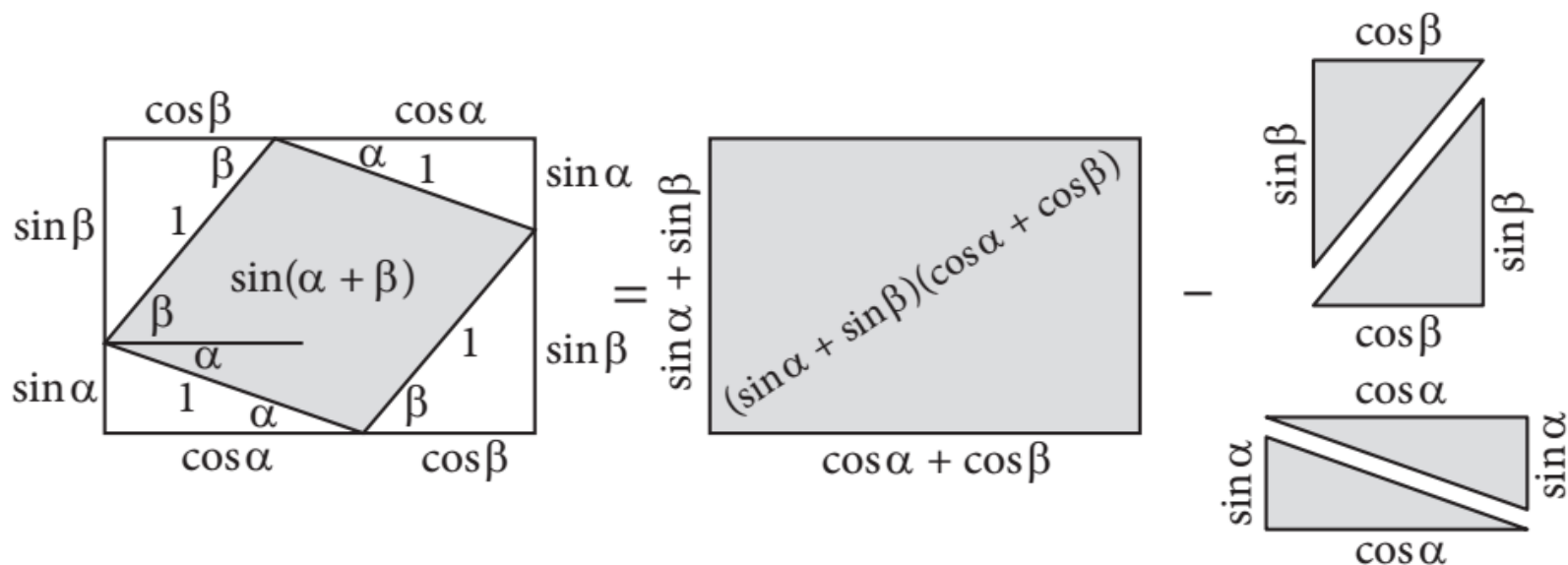
$$\begin{aligned} IL^2 &= (\cos(x-y) - 1)^2 + (\sin(x-y) - 0)^2 \\ &= \cos^2(x-y) - 2 \cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y) \\ &= (\cos^2(x-y) + \sin^2(x-y)) - 2 \cos(x-y) + 1 \\ &= 1 - 2 \cos(x-y) + 1 \\ &= 2 - 2 \cos(x-y). \end{aligned}$$

Готове формуле (обрасци)

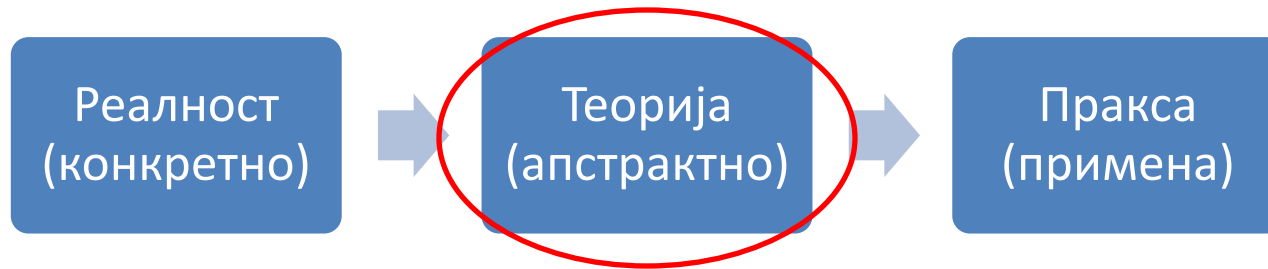
За свака два реална броја x и y важи

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{и} \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Адиционе формуле
за косинус



6. Повезаности теорије и праксе



Познати реални контекст треба да мотивише теоријска разматрања.

Значај теоријских разматрања треба да се покаже у реалним применама.

Проста каматна формула

Уложена сума новца назива се **главница**, док се очекивана добит након одређеног времена назива **камата** или **интерес**. Колика ће камата (добит) бити зависи од договорене **каматне стопе** која се изражава у процентима и представља добит коју би донело инвестирање суме од 100 динара (евра или неке друге валуте која се користи) за годину дана и временског **периода** израженог у годинама.

улог	време	добит
100 дин	1 год	p
G дин	t год	$K (?)$

$$\frac{K}{p} = \frac{t}{1} \cdot \frac{G}{100}$$

$$K = G \cdot \frac{p}{100} \cdot t = G \cdot p\% \cdot t$$

Штедња и број е

- *Сложена каматна формула:* $K = G(1 + p\%)^t$

K је сума новца коју ће добити неко након t година ако је орочио суму G са годишњом каматном стопом $p\%$ при чему се након истека сваке године главница увећава за камату, па се даље рачуна са новом главницом.

- Ако је главница G уложена са каматном стопом $p\%$ која ће се обрачунавати m пута годишње, онда ће укупна сума K након t година бити

$$K = G \left(1 + \frac{p\%}{m} \right)^{mt}$$

Штедња и број e

- Задатак. Препоставимо да је неко уложио 1000€ са каматном стопом 9% и да жели да подигне новац након 2 године. Испитај колику суму новца ће подићи у зависности од тога колико пута годишње ће бити обрачунавана камата.

Обачунавање камате	m	$K = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,09}{m}\right)^{2m}$
Годишње	1	1018,081
Полугодишње	2	1192,519
Тромесечно	4	1194,831
Месечно	12	1196,414
Недељно	52	1197,031
Дневно	365	1197,191
На сваких сат времена	8760	1197,216

Штедња и број e

$$K = G \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{p\%}} \right)^{\frac{m}{p\%}} \right)^{p\%t} = G \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{p\%t}$$

x	$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$
10	$1,1^{10} = 2,5937424601$
100	$1,01^{100} \approx 2,7048138294215260932671947108075$
1 000	$1,001^{1000} = 2,7169239322358924573830881219476$
10 000	$1,0001^{10000} \approx 2,7181459268252248640376646749131$
100 000	$1,00001^{100000} \approx 2,718268237174489668035064824426$
1 000 000	$1,000001^{1000000} \approx 2,7182804693193768838197997084544$

$$K = Ge^{p\%t}$$

Рихтерова скала

Енергија ослобођена најачим забележеним земљотресом, мерена у џулима, 100 милиона пута је већа од енергије неког слабог земљотреса који се једва осећа. Због овако великог распона, енергија није погодна мера јачине земљотреса.

Чувени амерички сеизмолог Чарлс Рихтер смислио је логаритамску скалу за мерење јачине земљотреса.

Јачина M по Рихтеровој скали неког земљотреса дата је формулом

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

где је E ослобођена енергија земљотреса мерена у џулима, а E_0 је јачина ослобођена веома слабим земљотресима; E_0 је стандардизовано и износи $E_0 = 10^{4,4} \text{J}$.

Рихтерова скала

- **Задатак.**

Један од најразорнијих земљотреса који су икада забележени погодио је Колумбију 1906. године када је ослобођена енергија од $1,99 \cdot 10^{17}$ J. Одреди јачину овог земљотреса по Рихтеровој скали.

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{3} \log \frac{1,99 \cdot 10^{17}}{10^{4,4}} \\ &= \frac{2}{3} (\log(1,99 \cdot 10^{17}) - \log 10^{4,4}) = \frac{2}{3} (\log 1,99 + \log 10^{17} - \log 10^{4,4}) \\ &\approx \frac{2}{3} (0,3 + 17 - 4,4) = 8,6 \end{aligned}$$

7. Принцип трајности знања

- Принцип трајности знања заснован је на древној спознаји *Понављање је мајка учења.*

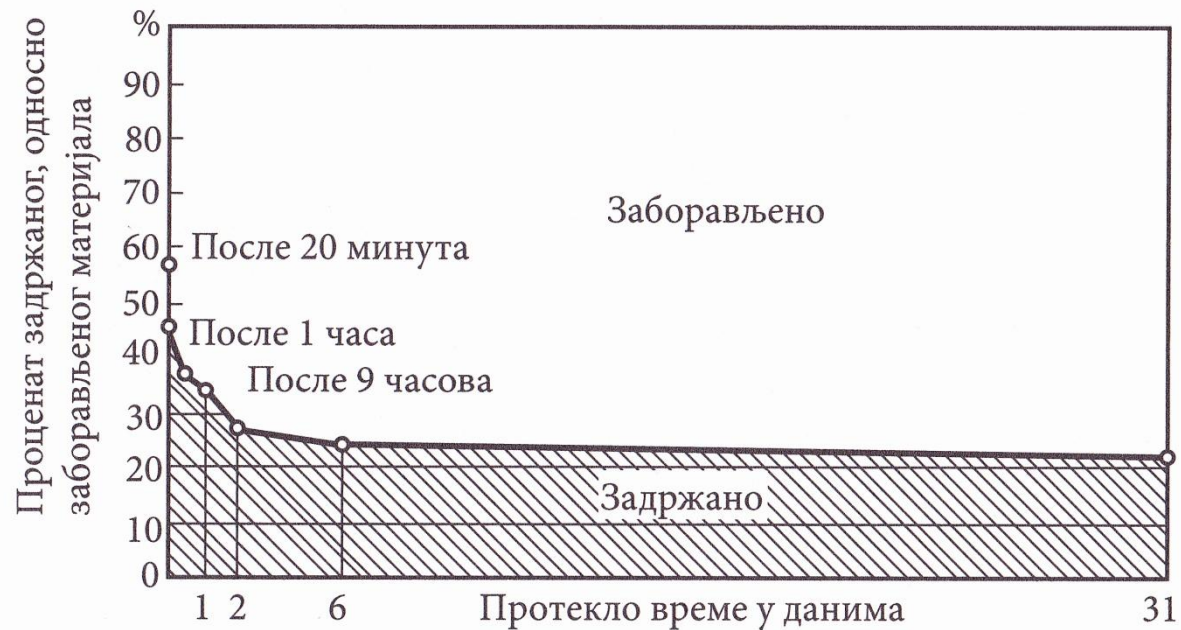
[Repetitio mater studiorum est.]

- Да би знања била трајна неопходна су понављања и увежбавања. Сврха понављање и вежбање није да обнови заборављено, већ да предупреди заборављање.
- Трајности знања, вештина и навика у великој мери доприноси начин његовог стицања.

Памћење и врсте памћења

- Памћење има своју физиолошку основу коју чине промене у кори великог мозга.
- Постоје значајне индивидуалне разлике у способности памћења.
- Разликују се три система памћења:
 - Сензорно
[важно за сналажење и активност човека; веома кратко траје]
 - Краткорочно
 - **Дугорочно**

Заборављање



Слика 33. – Ебингхаусова кривуља заборављања

Узроци заборављања

- Сличност

[Не треба један за другим учити сличне садржаје]

- Време

[Веома је корисно да постоји одмеор између учења два материјала]

- Степен научености [учити ново тек пошто је претходно добро научено]

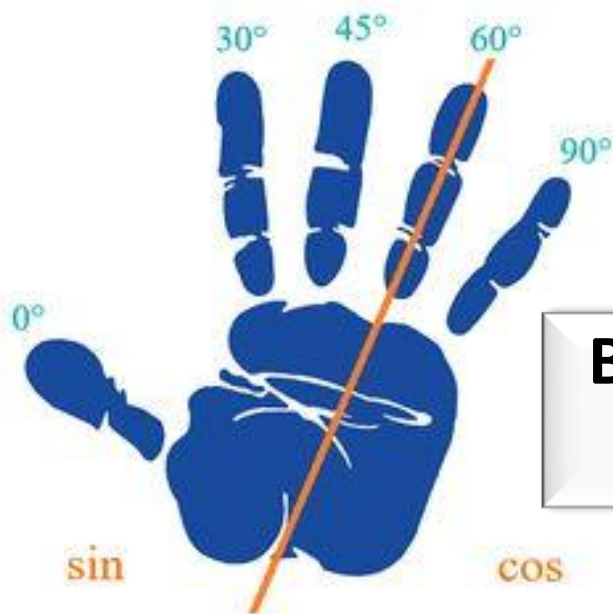
- Степен организованости [читаво градиво повезати у целину]

- Специфичности онога што треба научити

[упоређивати са другим градивом и учити сличности и разлике]

Ефектна прича или илустрација

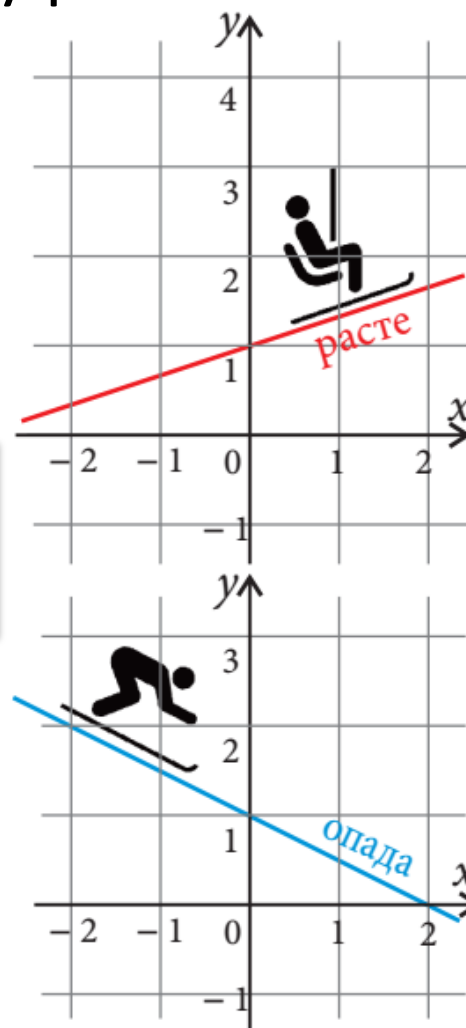
Мнемотехничка средства обухватају разне начини којима се олакшава памћење.



Вода у киселину
ВУК

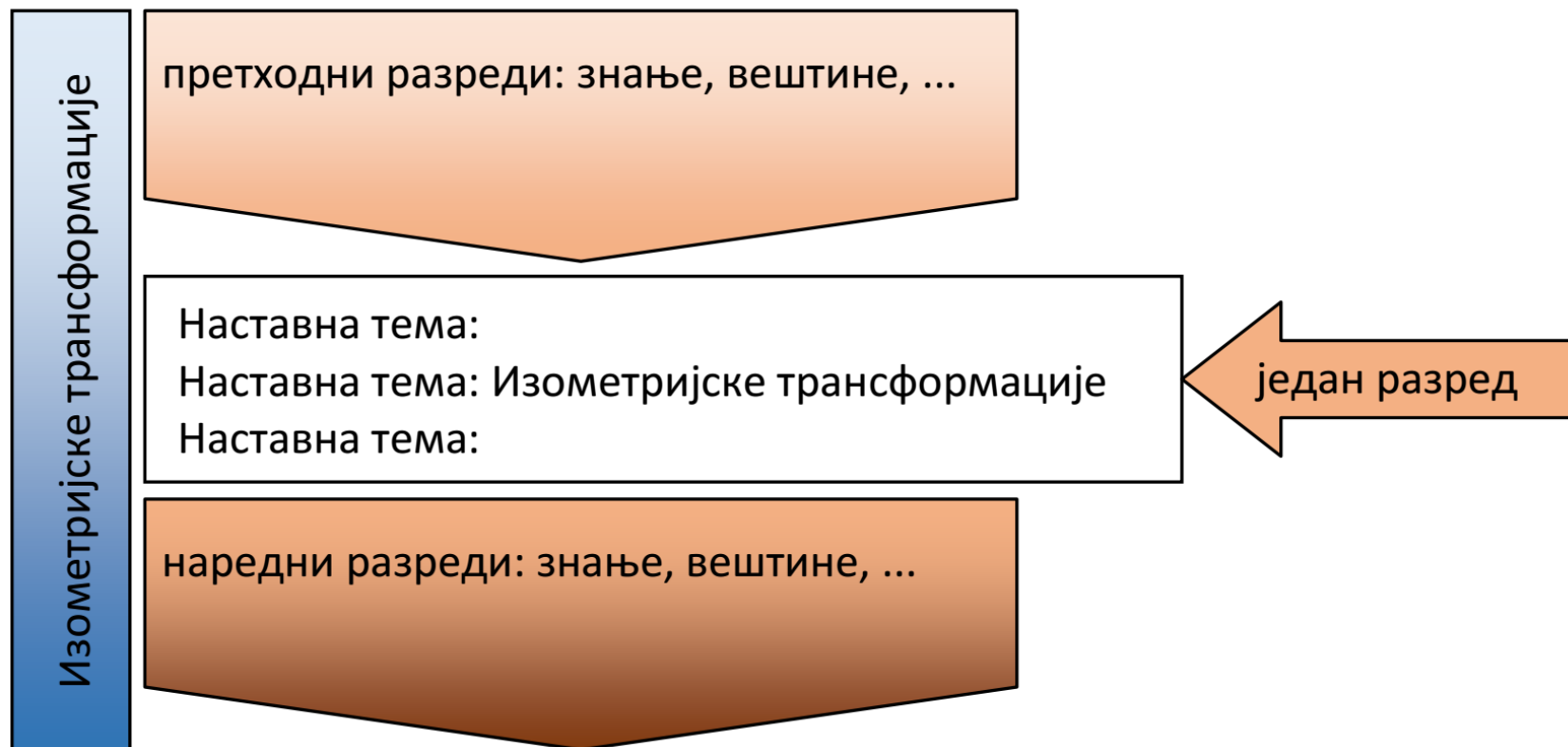
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

2



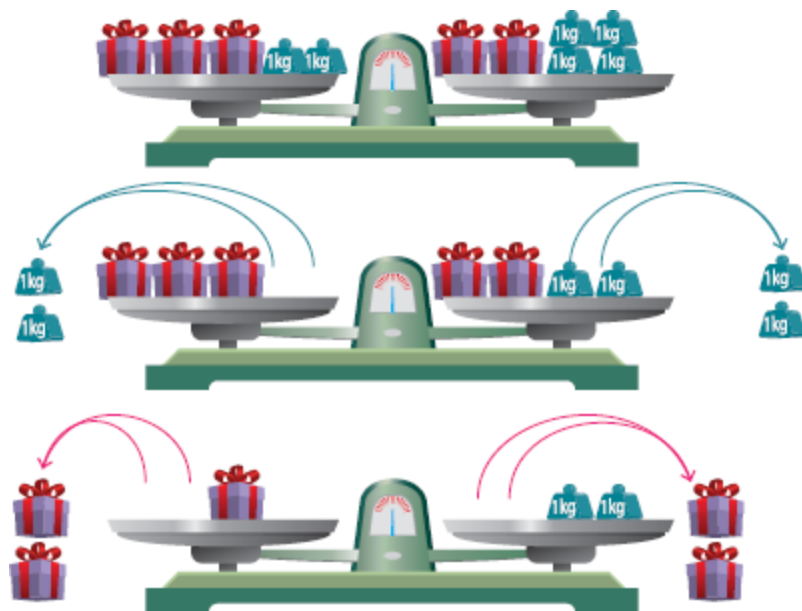
Хоризонтална и вертикална повезаност градива

- Хоризонтална повезаност градива у оквиру једног разреда
- Вертикална повезаност градива кроз разреде



Хоризонтална и вертикална повезаност градива

- Линеарне једначине



$$3x + 2 = 2x + 4 \quad / -2$$

$$3x + 2 - 2 = 2x + 4 - 2$$

$$3x = 2x + 2 \quad / -2x$$

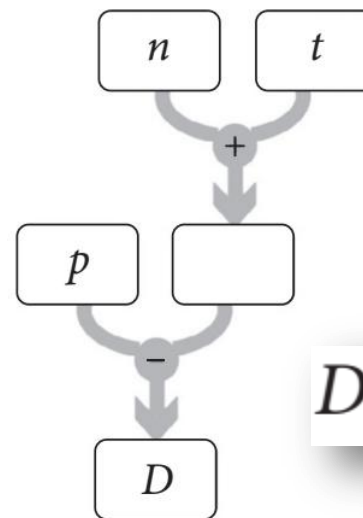
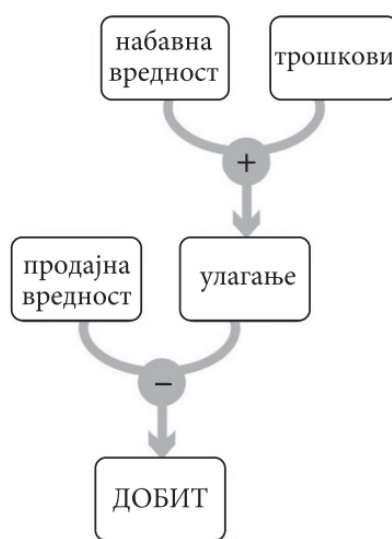
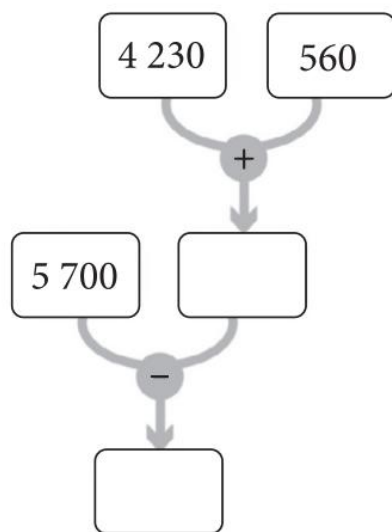
$$3x - 2x = 2x + 2 - 2x$$

$$x = 2$$

Хоризонтална и вертикална повезаност градива

- Алгебарски изрази

Задатак. Трговац је од једног произвођача купио одређену количину неког производа и за њу платио 4 230 динара. Трошкови транспорта су износили 560 динара. Укупна вредност ове робе у његовој продавници износила је 5 700 динара. Колику добит од продаје овог производа очекује трговац?



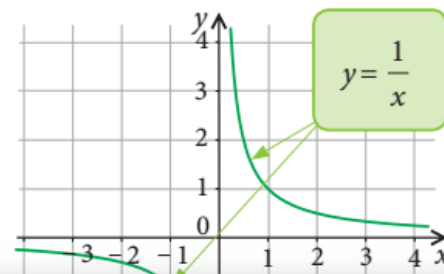
$$D = p - (n + t)$$

Хоризонтална и вертикална повезаност градива

- Алгебарски закони

	За произвољне бројеве x, y, z важи:	За произвољне изразе X, Y, Z важи:
Комутативност сабирања	$x + y = y + x$	$X + Y = Y + X$
Асоцијативност сабирања	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
0 је неутрал за сабирање	$x + 0 = x$	$X + 0 = X$
Инверз у односу на сабирање	$x + (-x) = 0$	$X + (-X) = 0$
Комутативност множења	$x \cdot y = y \cdot x$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
Асоцијативност множења	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
1 је неутрал за множење	$x \cdot 1 = x$	$X \cdot 1 = X$
Дистрибутивност множења према сабирању	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
Везе између операције „супротан број” и осталих операција	$\begin{aligned} -(-x) &= x \\ -(x + y) &= (-x) + (-y) \\ x + (-y) &= x - y \\ (-x) \cdot (-y) &= x \cdot y \\ (-x) \cdot y &= x \cdot (-y) = -(x \cdot y) \end{aligned}$	$\begin{aligned} -(-X) &= X \\ -(X + Y) &= (-X) + (-Y) \\ X + (-Y) &= X - Y \\ (-X) \cdot (-Y) &= X \cdot Y \\ (-X) \cdot Y &= X \cdot (-Y) = -(X \cdot Y) \end{aligned}$

Хоризонтална и вертикална повезаност градива



Гранична вредност

рационални и ирационални бр
обим и површина круга
график обрнуте пропорционалности, асимптоте
график експоненцијалне функције, асимптоте

...

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	$\dots \rightarrow 0$
$\frac{1}{x}$	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	$\dots \rightarrow \infty$

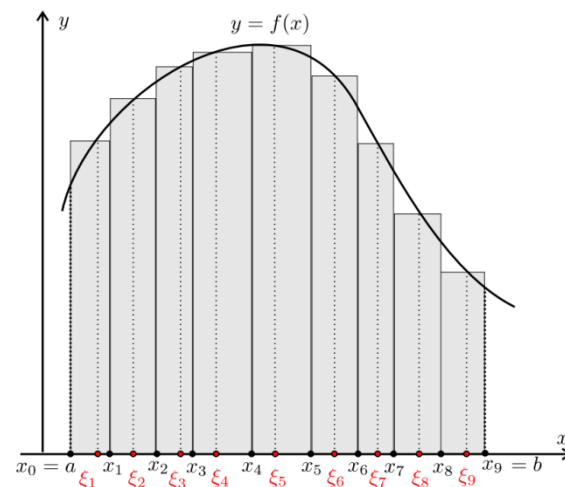
x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	$\dots \rightarrow \infty$
$\frac{1}{x}$	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	$\dots \rightarrow 0$

Наставна тема: Гранична вредност низа
Наставна тема: Гранична вредност функције

III разред

извод функције
одређени интеграл

...



Хоризонтална и вертикална повезаност градива

- Непрекидност функција

Задатак.

Неједнакост $x^3 < 9$ ваži ако је $x = 2$. Доказати да она ваži и у некој околини $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ броја 2, где је ε известан позитиван реалан број. Наћи бар један такав ε .

Задатак.

Нека је ε задат позитиван реалан број. Одreditи бар један позитиван реалан број δ тако да неједнакост $|x^3 - 5x^2 + 6x| < \varepsilon$ ваži кад год је $|x| < \delta$.

Nejednakost $x^3 < 9$ važi ako je $x = 2$. Dokazati da ona važi i u nekoj okolini $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ broja 2, gde je ε izvestan pozitivan realan broj. Naći bar jedan takav ε .

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 9, \checkmark$$

$$x^2 < 9, x \in (2, 2 + \varepsilon)$$

$$\varepsilon = ?$$

$$0 < h, (2 + h)^3 < 9$$

$$\Leftrightarrow 0 < h, 8 + 12h + 6h^2 + h^3 < 9$$

$$\Leftarrow 0 < h < 1, 8 + 12h + 6h^2 + h^3 < 9$$

$$\Leftarrow 0 < h < 1, 8 + 12h + 6h + h < 9$$

$$(0 < h < 1 \Rightarrow h^2 < h \wedge h^3 < h)$$

$$\Leftarrow 0 < h < 1, h < \frac{1}{19}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{19}$$

8. Принцип ученичке активности

- До суштинског знања се долази само сопственом мисаоном активношћу. Право и квалитетно знање стиче се само самосталним сазнајним напорима.
- Учење се не сме сводити на слушање, посматрање, памћење и репродуковање.
- Ученик мора сам реализовати своје учење, јер то нико други не може обавити уместо њега.
- Осамостаљивање у процесу стицања знања требало би да буде основни циљ активног учења.

Нове тенденције у образовању

РАЗВИЈАЊЕ МАКСИМАЛНЕ АКТИВНОСТИ УЧЕНИКА У
НАСТАВНОМ ПРОЦЕСУ И ЊИХОВИ
ОСПОСОБЉАВАЊЕ ЗА ПОТПУНУ САМОСТАЛНОСТ

Нове тенденције у образовању

- Усвајање знања и вештина
↓
- Стратегије учења на које се надовазују знања
- Меморисање чињеница
↓
- Усвајање мисаоних токова

Неколико порука из савремене литературе о настави математике

- Научи ме да мислим, научи ме да учим!
- Учим да мислим, мислим када учим!
- Мислим, дакле учим!
- Када чујем онда заборавим, када видим онда запамтим, када урадим онда разумем.

Неке препреке на путу активизације ученика:

- Превише времена се троши на детаље и појединости.
- Стимулација и обука наставника да организују и воде активну наставу.
- Разредно часовно систем доста отежава организацију активне наставе.

Активна настава

- **Суштина активне наставе је активност мишљења.** Учити активно значи учити расуђивањем и размишљањем.
- Никако се не сме занемарити механичко учење. Идеално је да мишљење претходи памћењу, да га подстиче и подупире. Наравно, знање и памћење јесте основа даљег мишљења.
- Интелектуално осамостављивање ученика спада у најважније задатке наставе.

Мотивација

- Важна претпоставка активног односа према настави јесте мотивација. Мотивација не значи да неко са уживањем обавља неки посао. Значи да неко разуме зашто то ради, види смисао, разуме основне поставке онога што учи.

Центар уписане кружнице

- Уводни задатак

Једна фирма жели да изгради продавницу на троугаоној парцели чија је скица приказана на слици десно. Поред тога, желе да продавница буде једнако удаљена од сва три пута.

- 1) Где се све на скици може уцртати положај продавнице тако да она буде једнако удаљена од нека два пута?
- 2) Где на скици треба да уцртају положај продавнице једнако удаљене од сва три пута?





Симетрале сва три угла троугла секу се у једној тачки.

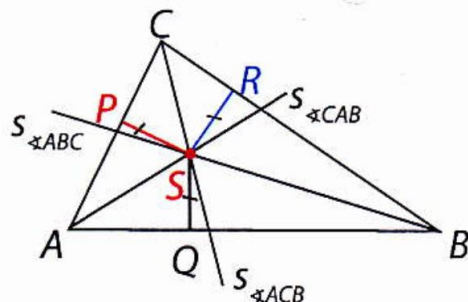
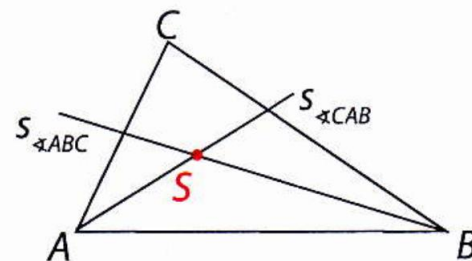
Постоји кружница која додирује све три странице троугла и чији је центар пресек симетрала углова тог троугла.

ЗАШТО? Полазне претпоставке

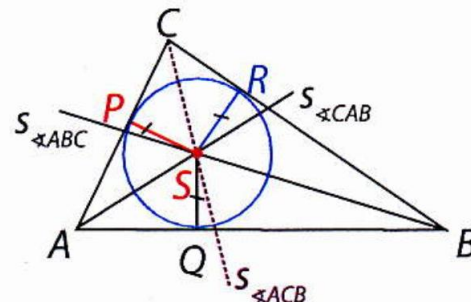
Замислимо произвољан $\triangle ABC$. Конструирамо симетрале два угла троугла ABC . На пример, симетрале углова CAB и ABC . Означимо S пресек ове две симетрале.

Размишљамо имајући на уму позната тврђења

Доказаћемо да тачка S мора припадати и симетрали угла BCA . Означимо P , Q и R подножја нормала из S редом на странице AC , AB и BC .

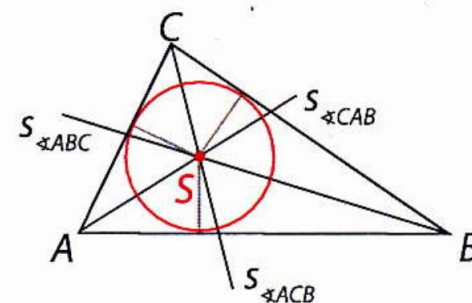


Из $S \in s_{\angle CAB}$ следи $SP = SQ$.
Из $S \in s_{\angle ABC}$ следи $SQ = SR$.
Из $SP = SQ$ и $SQ = SR$ следи $SP = SR$, па $S \in s_{\angle BCA}$.



Главни закључци

Дакле, све три симетрале углова неког троугла секу се у једној тачки. Та тачка је једнако удаљена од страница троугла, што значи да постоји кружница чији је центар пресек симетрала углова и која додирује све три странице троугла.

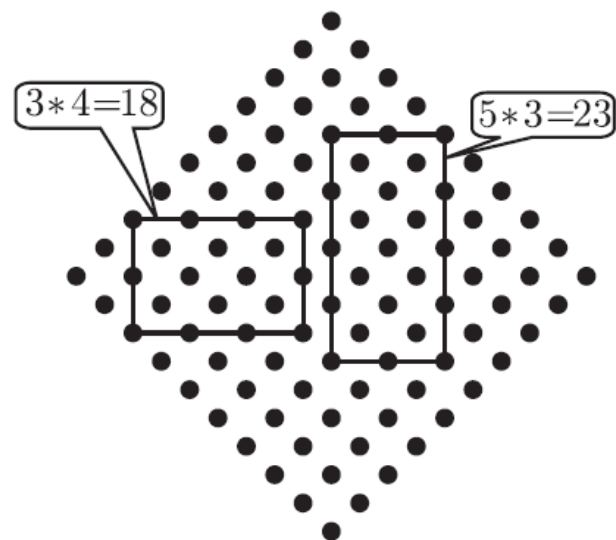


Запремина

- Израчунај запремину лимуна.

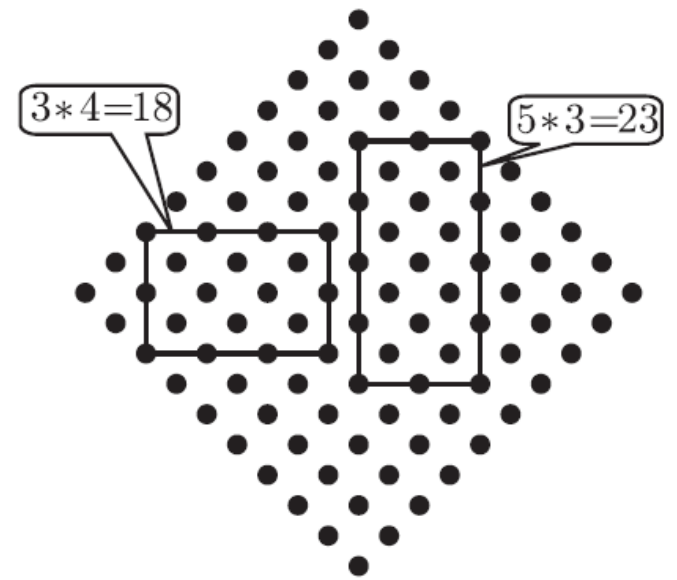


I Нека је звездовање бинарна операција на скупу природних бројева коју ћемо означавати са $*$. Резултат звездовања два природна броја m и n јесте природан број $m * n$ који одређујемо на следећи начин: уочимо произвољан чвор мреже приказане са десне стране, а затим одредимо „вертикалну” дуж на којој се налази m чворова и „хоризонталну” дуж на којој се налази n чворова, при чему је уочени чвор заједничка тачка ових дужи. Број $m * n$ једнак је броју чворова који се налазе на страницама или унутар правоугаоника одређеног овим двама дужима. На пример, $3 * 4 = 18$ и $5 * 3 = 23$ (види слику).



Приметимо да резултат не зависи од избора чвора и смера у односу на изабарни чвор у коме конструшемо дужи.

1. Израчунати: (а) $3 * 2$; (б) $7 * 6$; (в) $23 * 17$.
2. Решити једначину (наравно у скупу природних бројева):
(а) $x * 5 = 23$; (б) $7 * x = 85$; (в) $3 * x = 7$.
3. Да ли је операција $*$ комутативна операција, тј. да ли за било која два природна броја m и n важи $m * n = n * m$? Да ли је асоцијативна $((m * n) * k = m * (n * k))$, за било које природне бројеве m, n, k ?
4. Да ли је звездовање дистрибутивно према сабирању $(m * (n + k) = (m * n) + (m * k))$, $m, n, k \in \mathbb{N}$? А према множењу $(m * (n \cdot k) = (m * n) \cdot (m * k))$, $m, n, k \in \mathbb{N}$?

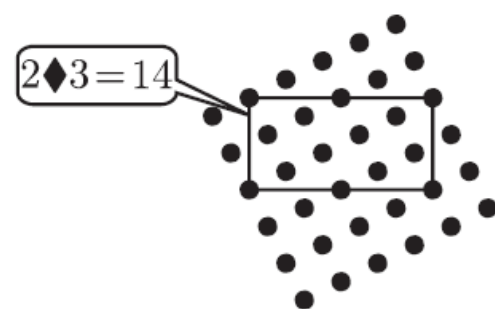


5. Кажемо да је број k $*$ -квадрат, ако постоји $n \in \mathbb{N}$ такав да је $k = n * n$. На пример, 13 је $*$ -квадрат, јер је $13 = 3 * 3$. Да ли је 41 $*$ -квадрат?

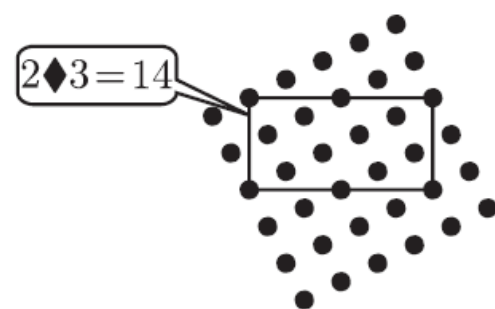
6. Кажемо да број n $*$ -дели m , и пишемо $n \wr m$, ако постоји $k \in \mathbb{N}$ такав да је $m = k * n$ (кажемо и да је n $*$ -делилац броја m). Да ли је $\wr$ релација поретка?

7. Природан број k је $*$ -прост ако су 1 и k једини $*$ -делиоци броја k . Одредити неколико $*$ -простих бројева.

II Звездовање смо дефинисали ослањајући се на чворове квадратне мреже ротиране за 45° . Другим речима, дефиниција операције је заснована на тачкама које су међусобно удаљене $\sqrt{2}$. Ако ротирамо мрежу тако да су тачке на хоризонталним и вертикалним правцима међусобно удаљене $\sqrt{5}$, аналогно можемо дефинисати нову бинарну операцију $\blacklozenge$ (види слику десно). По узору на задатаке у делу I испитати особине операције $\blacklozenge$.



II Звездовање смо дефинисали ослањајући се на чворове квадратне мреже ротиране за 45° . Другим речима, дефиниција операције је заснована на тачкама које су међусобно удаљене $\sqrt{2}$. Ако ротирамо мрежу тако да су тачке на хоризонталним и вертикалним правцима међусобно удаљене $\sqrt{5}$, аналогно можемо дефинисати нову бинарну операцију $\blacklozenge$ (види слику десно). По узору на задатаке у делу **I** испитати особине операције $\blacklozenge$.



III Истражи неке опште особине операција дефинисаних по аналогiji са претходним операцијама у случајевима када се мрежа ротира за разне погодно изабране углове.