

Дидактички принципи (1-3) крѓз примере

Методика наставе
математике
рачунарства

Постулати дидактике математичког образовања

- Дидактика $\approx$ општа методика

Први постулат

Водити ученика кроз континуиран низ адекватних активности које не скрећу ученика са развојног пута његове интелигенције.

Други постулат

Допустити ученику слободу да сам изграђује појмове, да сам открива чињенице и правила, да сам решава проблем, да стваралачки ради.

Трећи постулат

Математичко образовање је дужно да убрзава, да интензивира учеников ментални развој, да максимално скраћује и проширује спонтани развој интелигенције.

Дидактички принципи

1. Принцип прилагођавања узрасту и индивидуалним особинама ученика
2. Принцип очигледности
3. Принцип научности
4. Принцип кохерентности, поступности и систематичности
5. Принцип економичности
6. Принцип повезивања теорије и праксе
7. Принцип трајности знања
8. Принцип свесне активности

1. Прилагођавање узрасту и индивидуалним особинама ученика

- Принцип проистиче из законитости психо-физичког развоја ученика.
- Настава би требало да буде мало изнад ученикових способности, таман толико да подстиче и убрзава развој.
- **Интелектуалне способности ученика нису само услов, већ и резултат наставе.**
- Подједнако је штетно и потцењивање и прецењивање ученикових способности.
- Реални ученик и замишљени “просечни ученик”.
- Диференцијација и индивидуализација при разредној организацији наставе.

1. Прилагођавање узрасту и индивидуалним особинама ученика

Веома младим ученицима могу су презентовати неке фундаменталне математичке идеје:

- изометријске трансформације

Подударност (I разред) – појам изометрије

► Основна теорема о изометријама равни

Ако су (A, B, C) и (A', B', C') две тројке неколинеарних тачака равни π такве да је $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ и $CA \cong C'A'$, онда постоји јединствена изометрија $\mathcal{I}$ равни π таква да је $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$ и $\mathcal{I}(C) = C'$.

► Својства изометрија

Изометријом се колинеарне тачке сликају у колинеарне тачке. Штавише, чува се и распоред тачака: ако је $A - B - C$ и $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$, $\mathcal{I}(C) = C'$, онда је и $A' - B' - C'$.

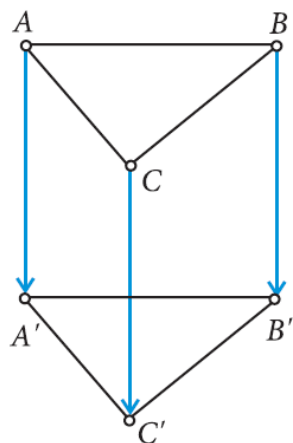
- Изометријом се дуж пресликава у дуж:
ако је $\mathcal{I}(A) = A'$ и $\mathcal{I}(B) = B'$, онда је $\mathcal{I}(AB) = A'B'$.
- Изометријом се права пресликава у праву при чему се чува распоред тачака:
ако су A и B две тачке праве p и ако је $\mathcal{I}(A) = A'$ и $\mathcal{I}(B) = B'$, онда је $\mathcal{I}(p) = p'$, где је p' права одређена тачкама A' и B' .
- Изометријом се полуправа пресликава у полуправу:
ако је B тачка полуправе Ap_1 и ако је $\mathcal{I}(A) = A'$ и $\mathcal{I}(B) = B'$, онда је $\mathcal{I}(Ap_1) = A'p'_1$, где је $A'p'_1$ полуправа која садржи тачку B' .

Подударност (I разред) – појам изометрије

- Изометријом се полураван пресликава у полураван.
- Изометријом се конвексан угао пресликава у конвексан угао:
 - ако је $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$ и $\mathcal{I}(C) = C'$, онда је $\mathcal{I}(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle B'A'C'$.
 - ако је $\mathcal{I}(Op) = O'p'$ и $\mathcal{I}(Oq) = O'q'$, онда је $\mathcal{I}(\sphericalangle pOq) = \sphericalangle p'O'q'$.
- Изометријом се троугао пресликава у троугао:
ако је $\mathcal{I}(A) = A'$, $\mathcal{I}(B) = B'$ и $\mathcal{I}(C) = C'$, онда је $\mathcal{I}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

► Став подударности ССС

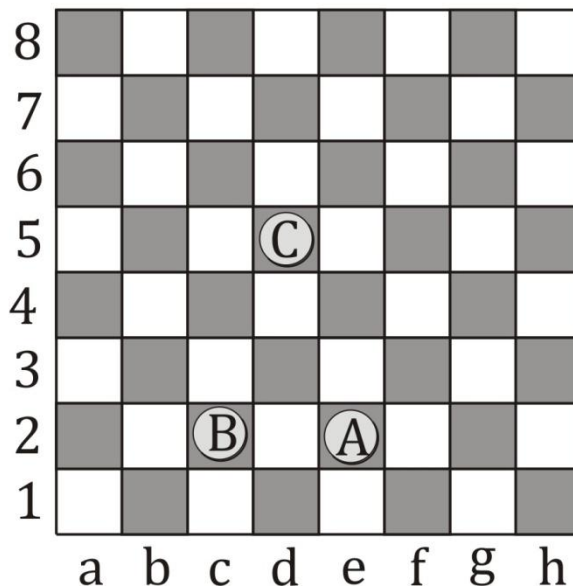
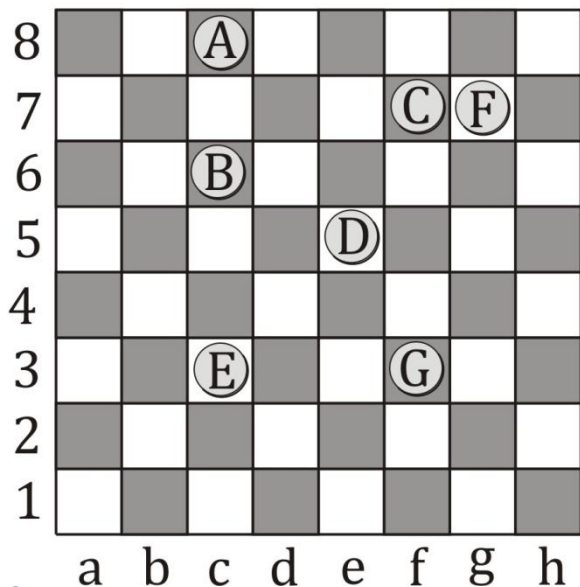
Два троугла су подударна ако су им одговарајуће странице подударне.



Задатак.

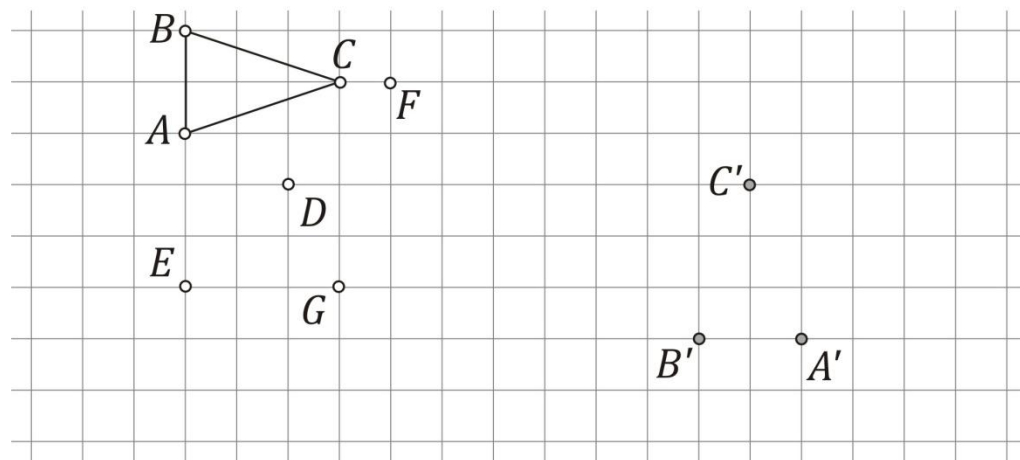
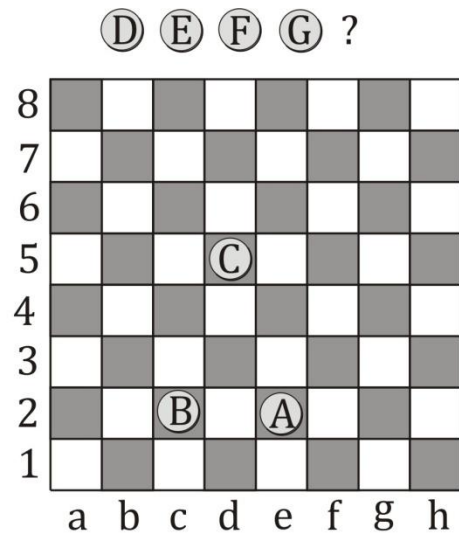
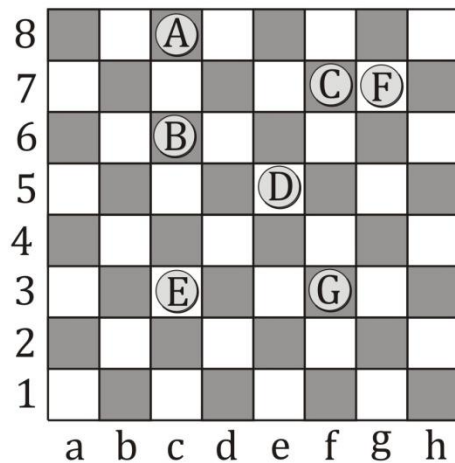
Посматрајмо шаховску таблу на којој су постављени жетони A, B, C, D, E, F и G. Жетони A, B и C су премештени на другу таблу тако да су растојања између свака два жетона остала иста као на претходној табли. На које позиције треба преместити жетоне D, E, F и G тако да растојања међу жетонима остану иста?

Ⓓ Ⓔ Ⓕ Ⓖ ?

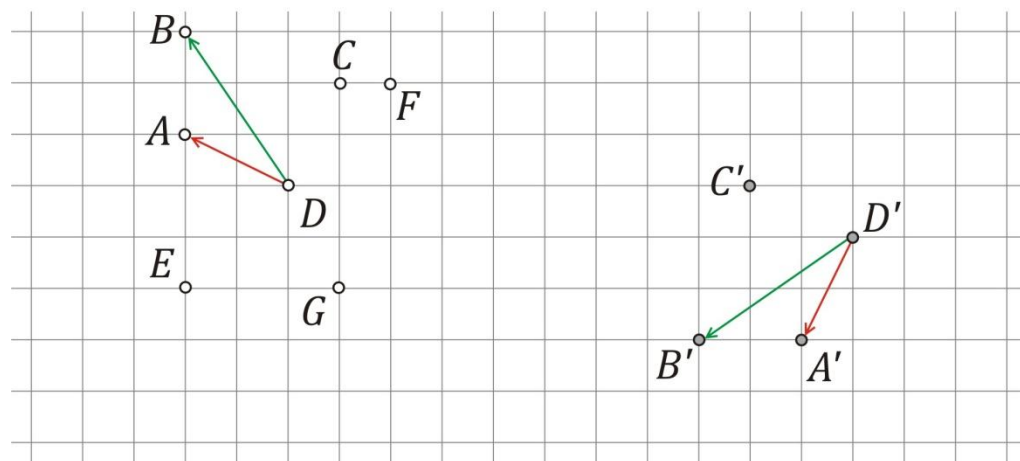
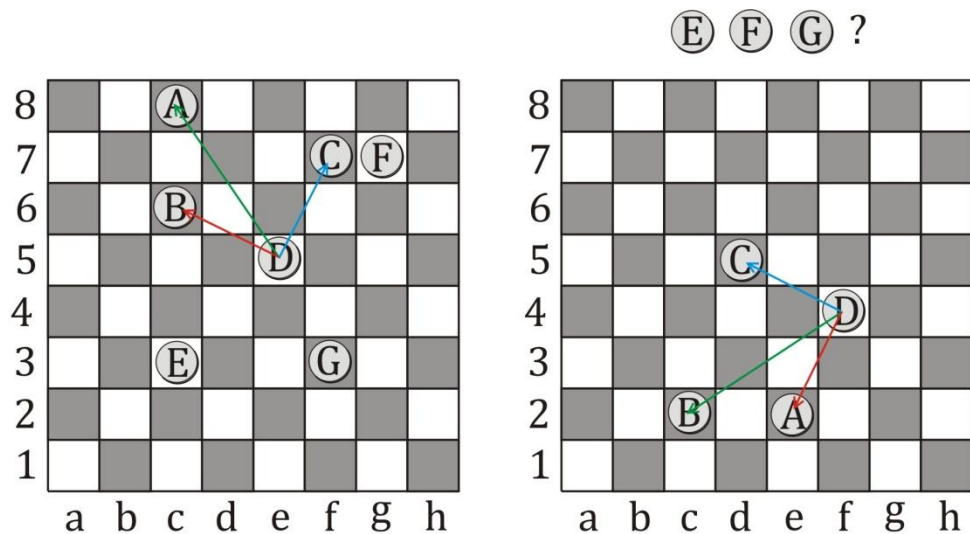


Реч *изометрија* је грчког порекла и настала је од речи *изос* – *неизмењен*, *једнак* и речи *метрон* – *мера*.

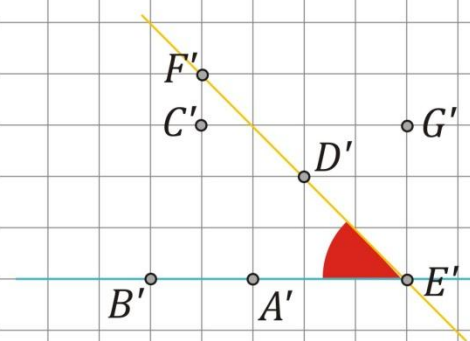
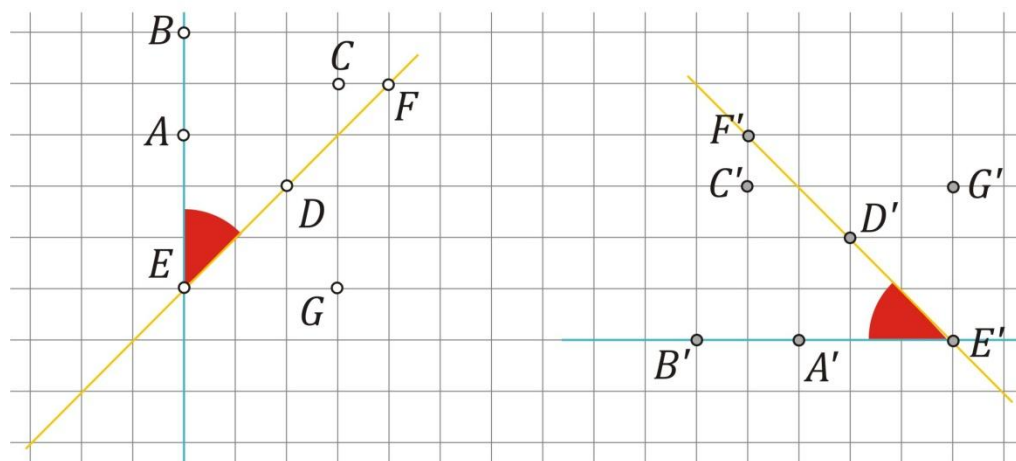
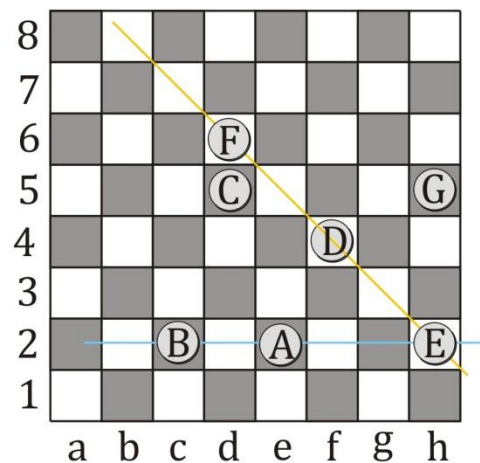
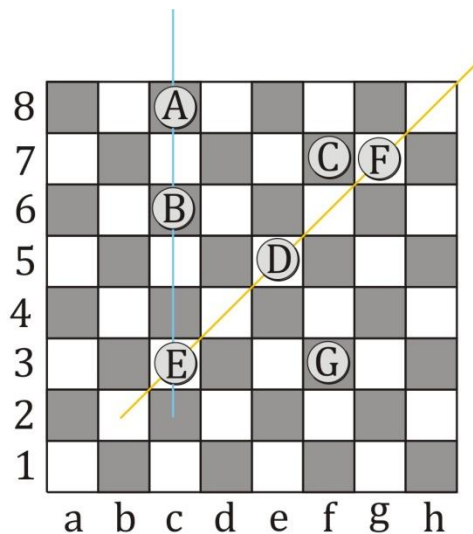
Задатак. - Решење



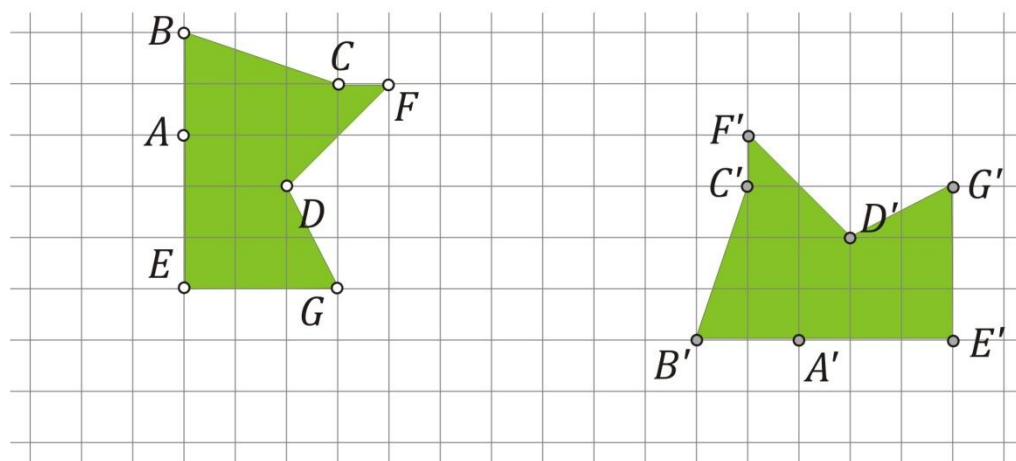
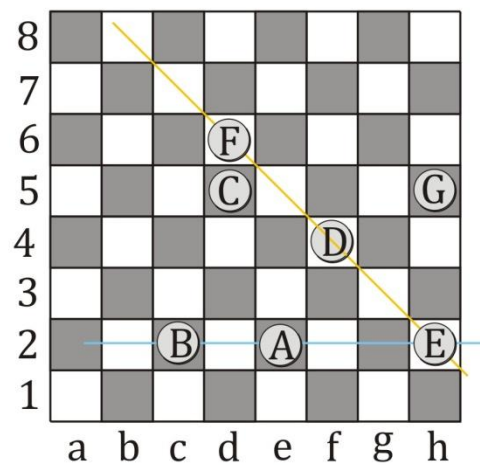
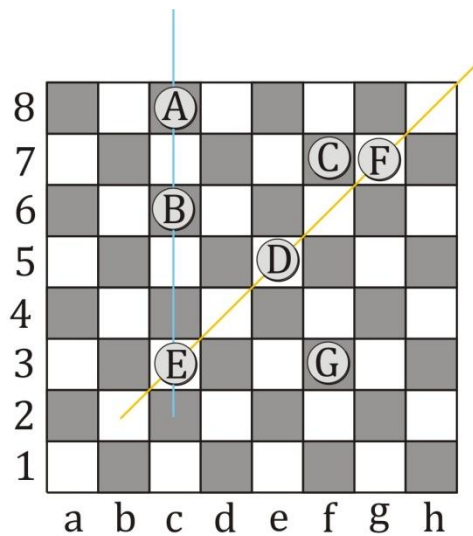
Особине изометрије



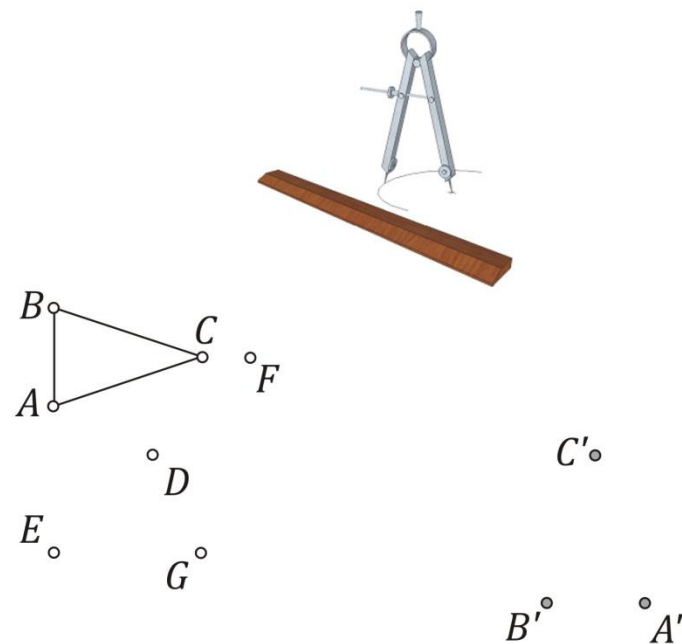
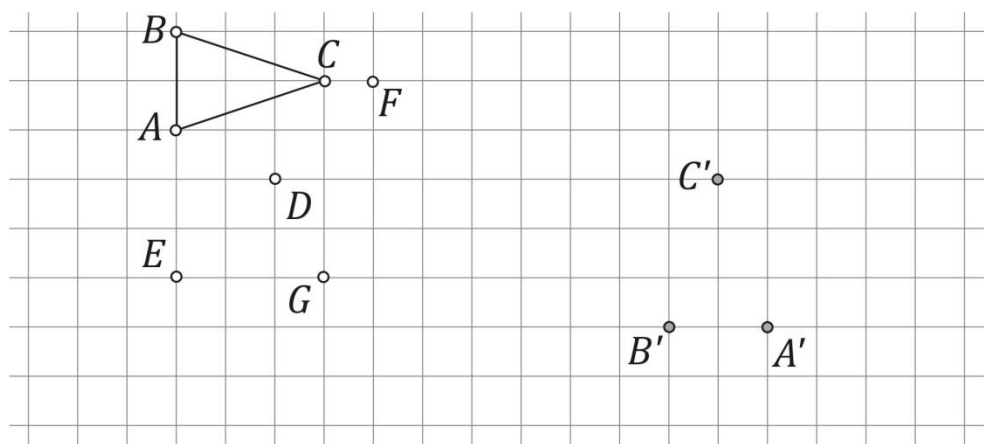
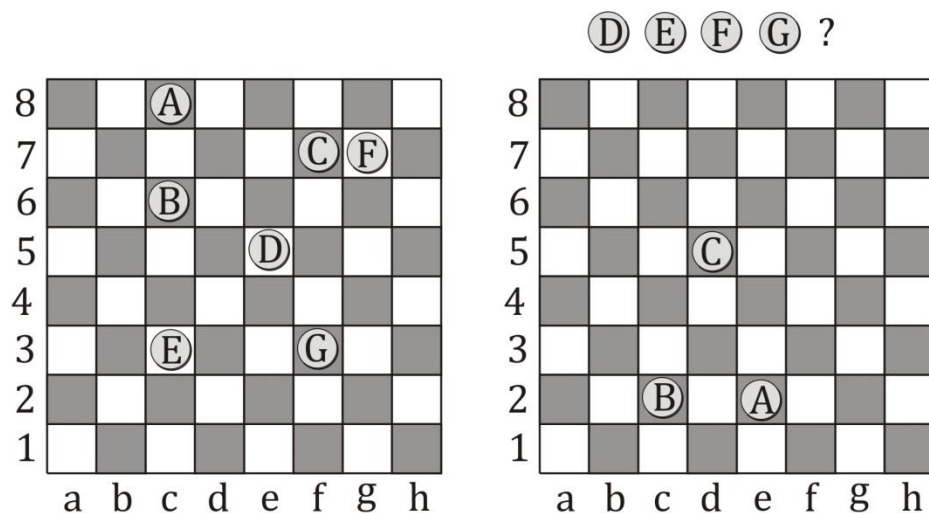
Особине изометрије



Особине изометрије

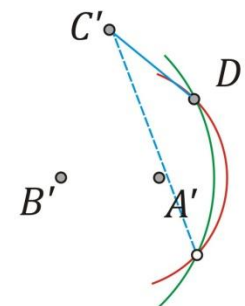
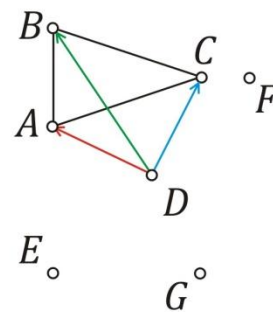
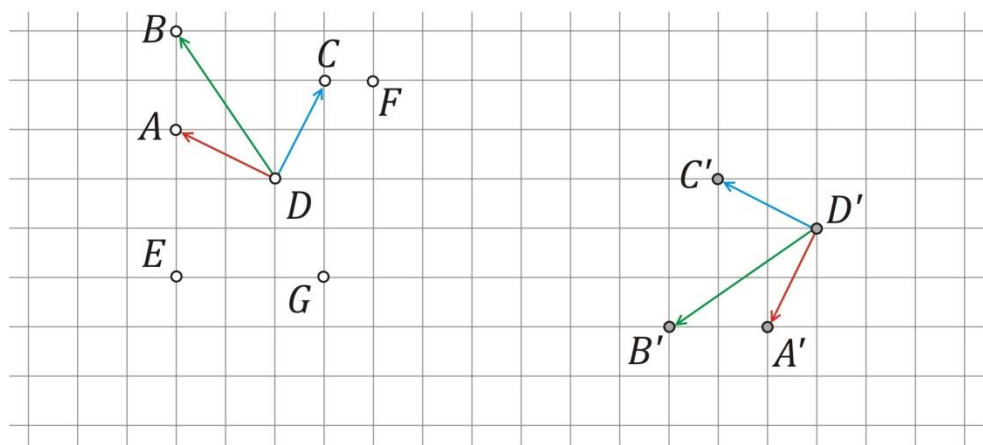
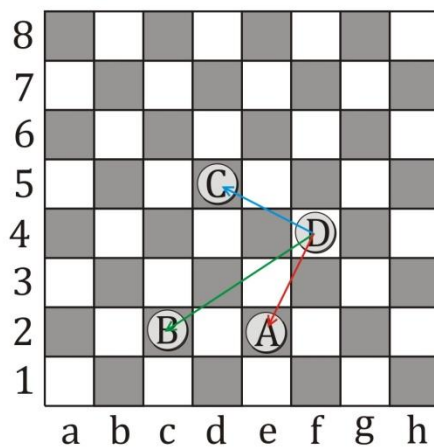
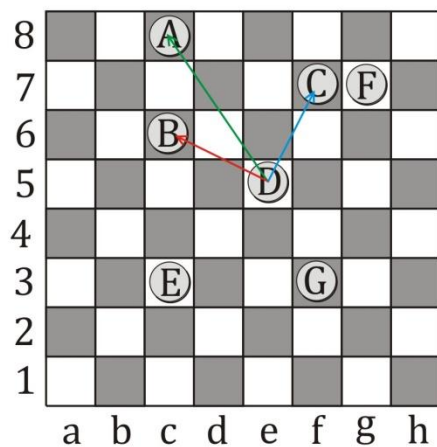


Особине изометрије



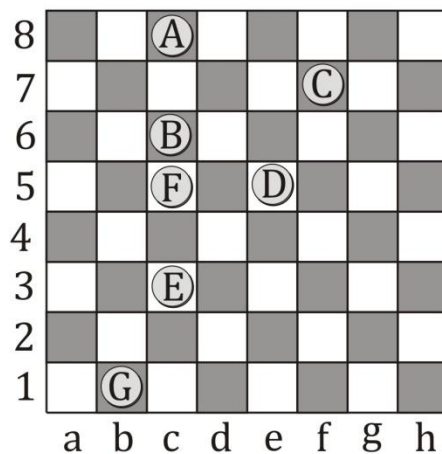
Особине изометрије

Ⓔ Ⓕ Ⓖ ?

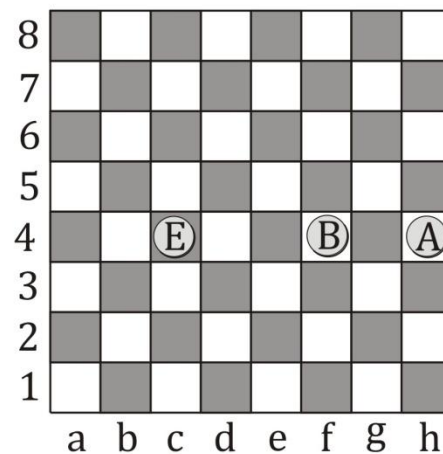


Задатак са два решења

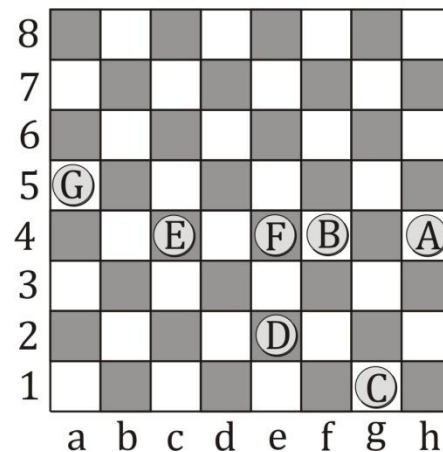
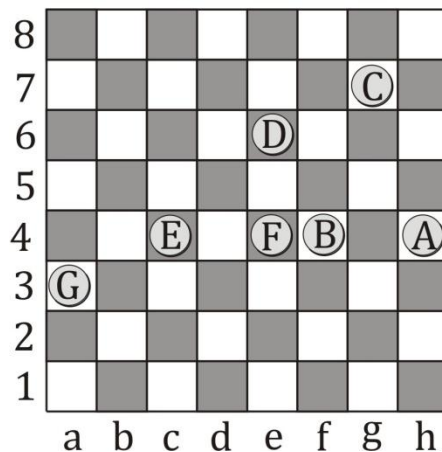
Ⓒ Ⓓ Ⓕ Ⓖ ?



I решење



II решење



1. Прилагођавање узрасту и индивидуалним особинама ученика

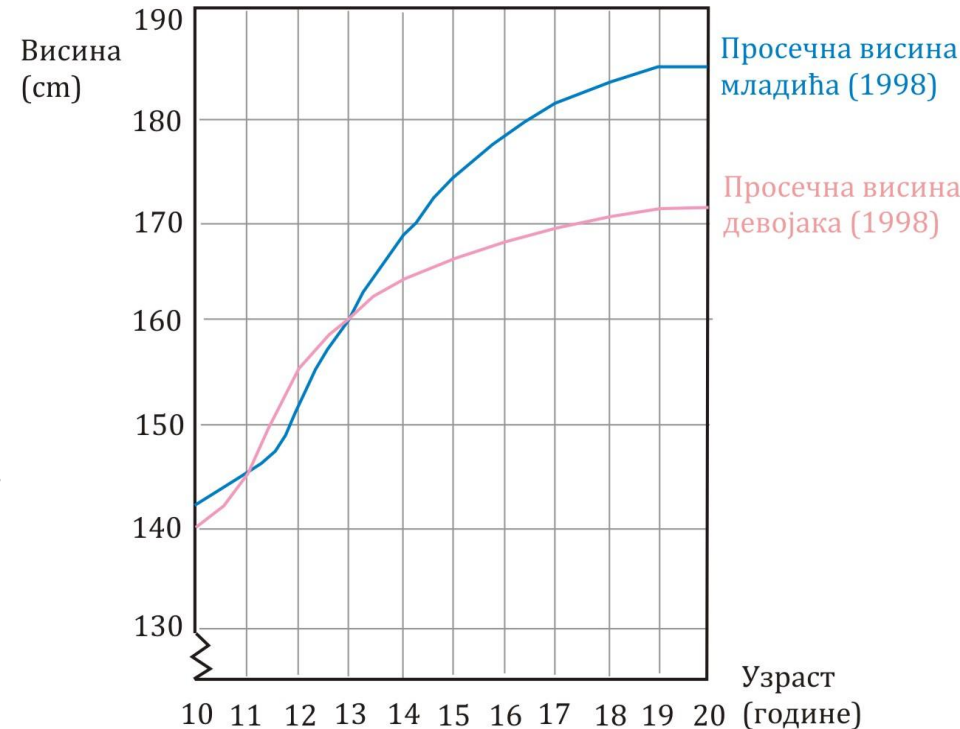
Веома младим ученицима могу су презентовати неке фундаменталне математичке идеје:

- ▶ изометријске трансформације
- ▶ брзина промене

Брзина промене

Задатак. На слици су приказане просечне висине младића и девојака у Холандији 1998. год.

- 1) Објасни како графикон показује да је у просеку, раст девојака после 12 година успорен.
- 2) У ком периоду живота су девојке више од младића истих година?

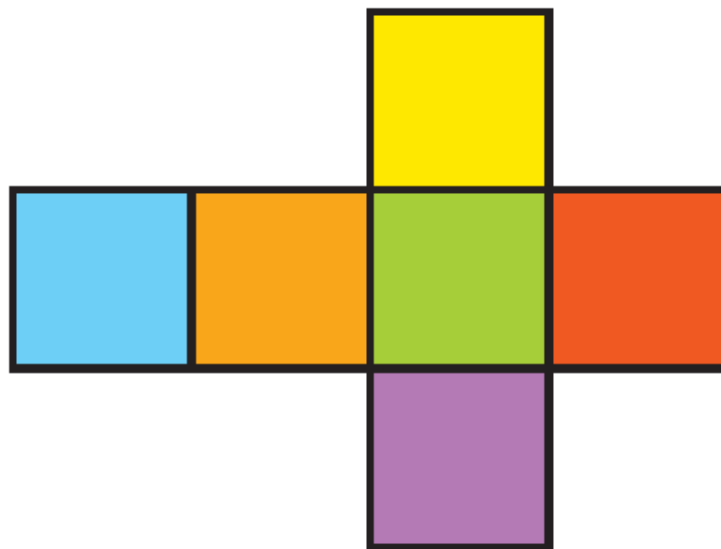


1. Прилагођавање узрасту и индивидуалним особинама ученика

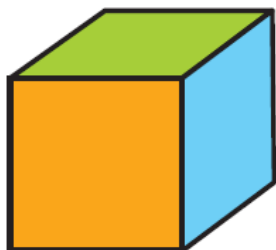
Доста је примера задатака чије решавање не зависи много од узраста, већ од индивидуалних способности (нпр. способности “просторног резонувања”)

Задатак за сваки узраст.

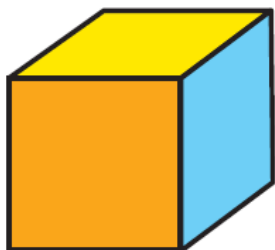
► Задатак.



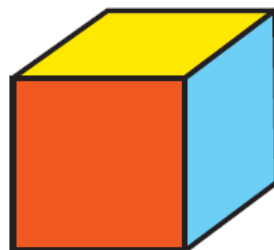
а)



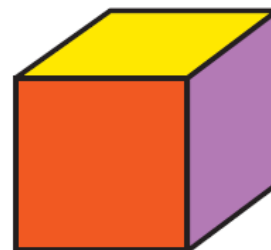
б)



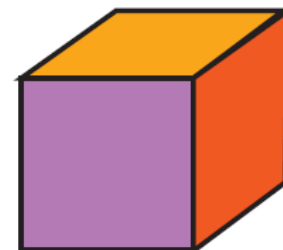
в)



г)

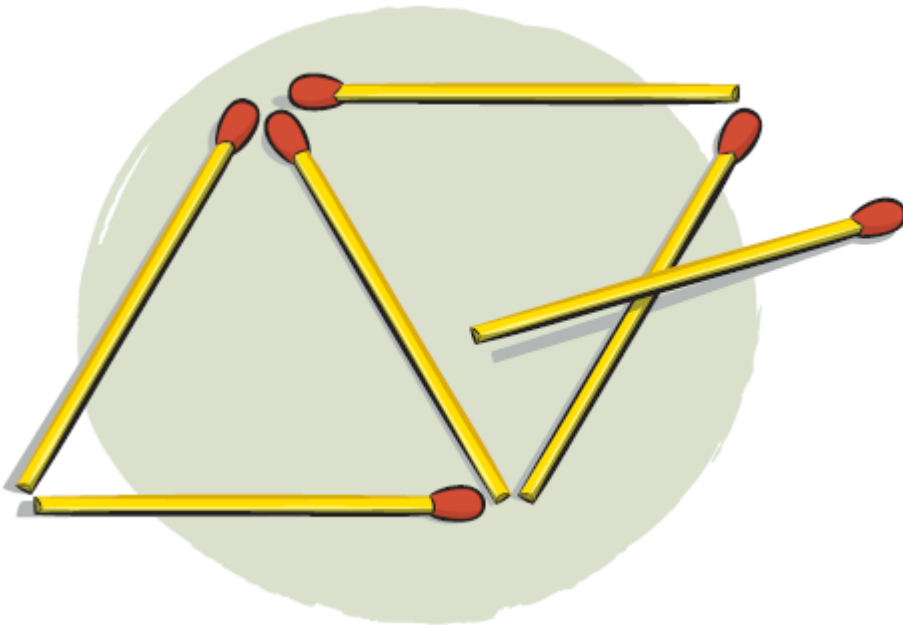


д)



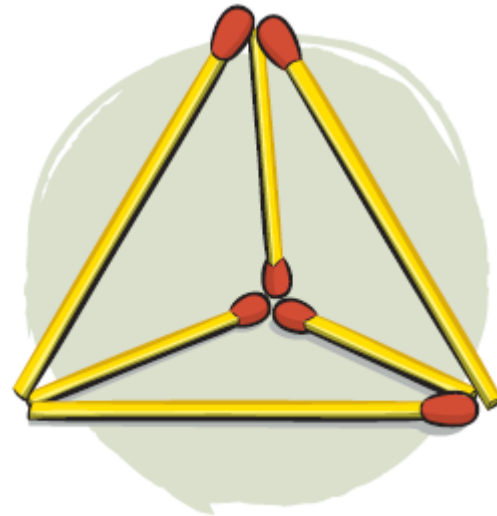
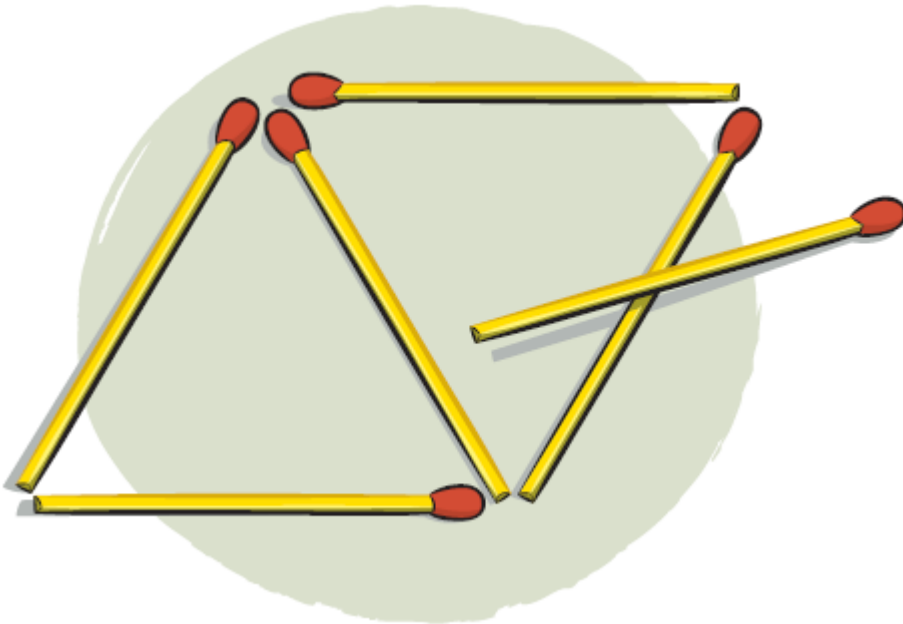
Задатак за сваки узраст.

Задатак. Од шест палидрваца састави четири једнакостранична троугла.



Задатак за сваки узраст.

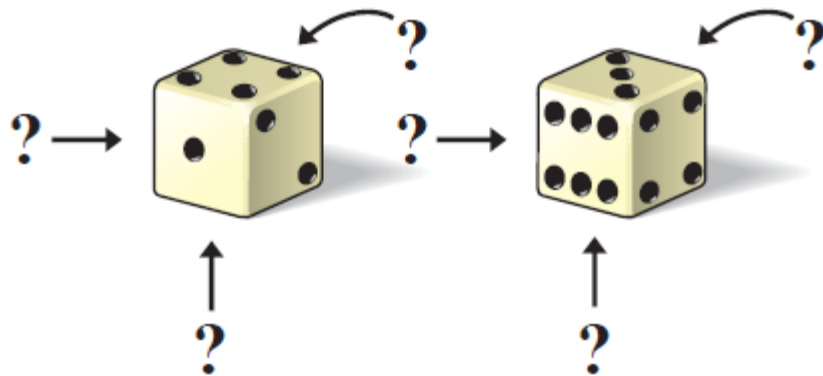
Задатак. Од шест палидрваца састави четири једнакостранична троугла.



Задатак за сваки узраст.

Задатак. Једна иста коцкица за игру постављена је у два различита положаја.

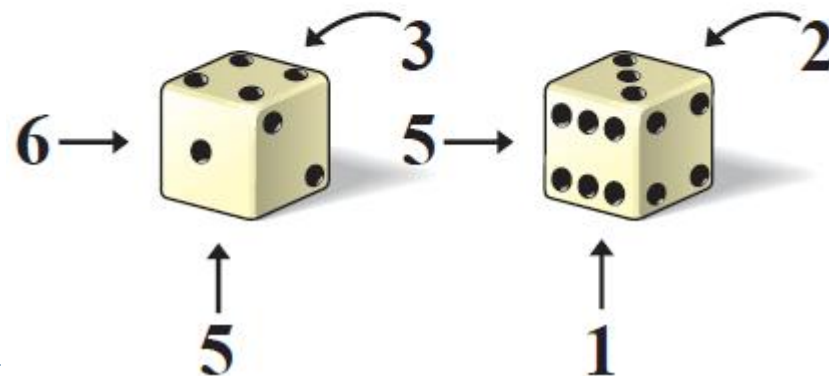
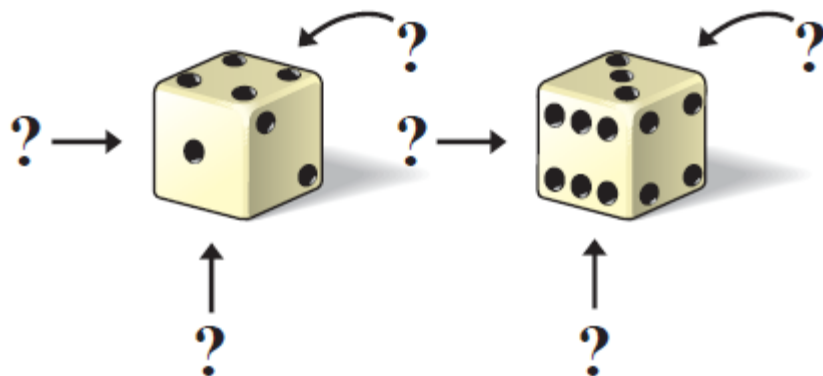
У оба случаја одреди бројеве који се налазе на странама коцкице које се не виде.



Задатак за сваки узраст.

Задатак. Једна иста коцкица за игру постављена је у два различита положаја.

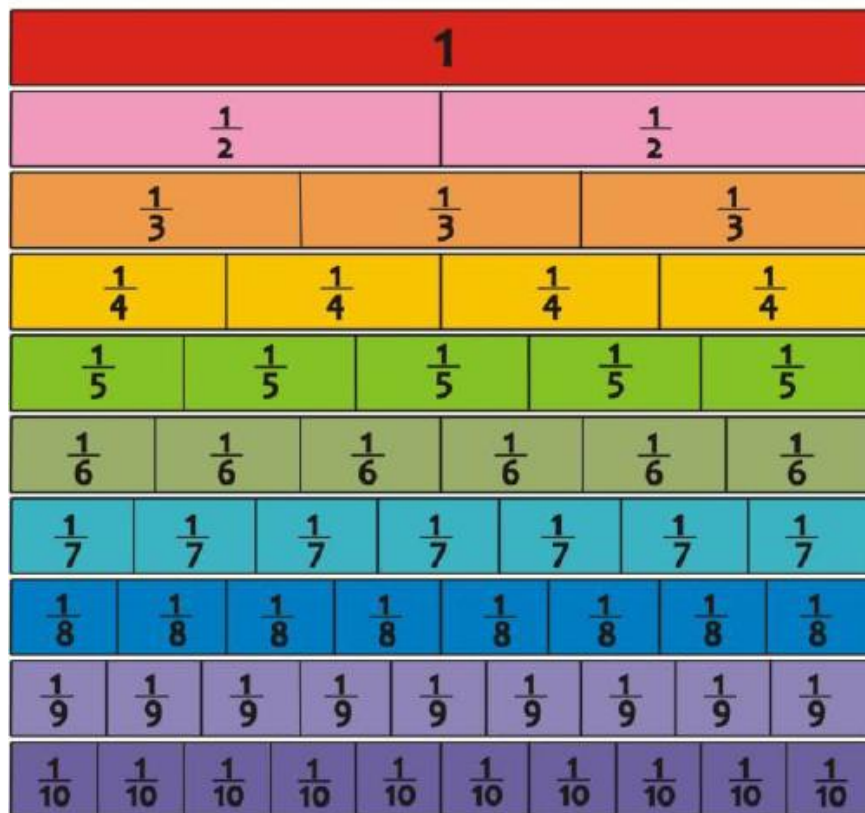
У оба случаја одреди бројеве који се налазе на странама коцкице које се не виде.



2. Принцип очигледности

- ▶ Уопшено, очигледним се може сматрати све што људи сматрају потпуно прихватљивим на основу својих (урођених или стечених) способности, као што су опажање, манипулативна активност и мишљења.
- ▶ Очигледност је један од најефикаснијих начина да се побуди и развије интуиција, која је важних ослонац људске делатности уопште.

Пример. Траке разломака



1. Упореди разломке:

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{7}$;

в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$; д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{6}{9}$.

2. Да ли важи:

а) $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$? Зашто?

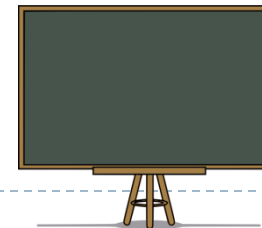
3. Израчунај збир:

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$; д) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Од ученика после решавања конкретних задатака (конкретизације) захтевамо уопштавање ученог (генерализација).

Тежиште троугла (чињенице)

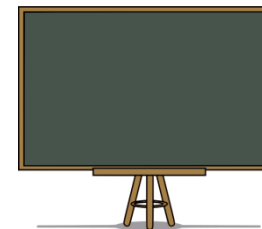


Све три тежишне дужи секу у једној тачки и та тачка дели сваку тежишну дуж у размери 2 : 1.

Доказ

Означимо са A_2 средиште дужи AT . Доказаћемо да је $AA_2 = TA_1$.	Нека је D_2 средиште дужи AC_1 , а D_1 средиште дужи C_1B .	A_2D_2 је средња линија $\triangle AC_1T$, па је $A_2D_2 \parallel TC_1$, а тиме и $A_2D_2 \parallel CC_1$.
A_1D_1 је средња линија $\triangle C_1BC$, па је $A_1D_1 \parallel CC_1$. Дакле, $A_1D_1 \parallel A_2D_2$.	Нека је D пресек дужи A_1D_1 и праве кроз T паралелне са AB .	Тада је $TD = C_1D_1$. Зашто?

Тежиште троугла (чињенице)

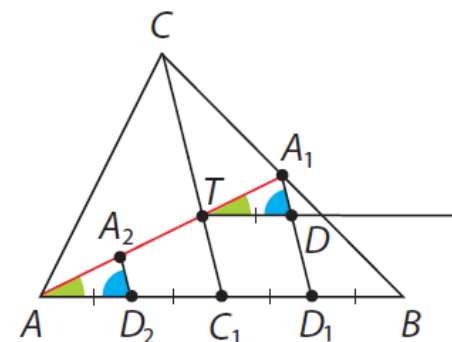


Све три тежишне дужи секу у једној тачки и та тачка дели сваку тежишну дуж у размери 2 : 1.

Доказ

Посматрајмо троуглове AD_2A_2 и TDA_1 .

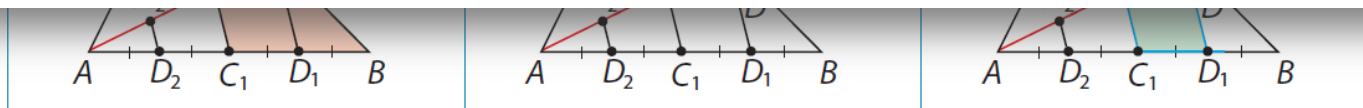
$$\left. \begin{array}{l} AD_2 = TD \\ \sphericalangle A_2D_2A = \sphericalangle A_1DT \text{ (Зашто?)} \\ \sphericalangle A_2AD_2 = \sphericalangle A_1TD \text{ (Зашто?)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AD_2A_2 \cong \Delta TDA_1$$



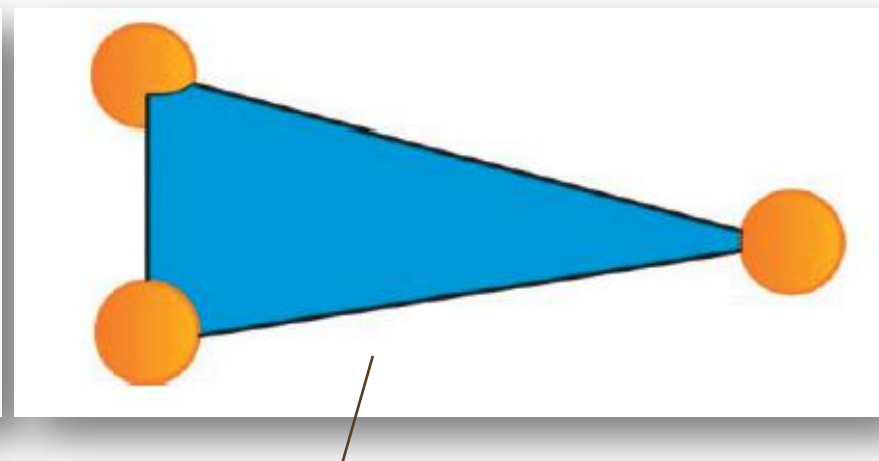
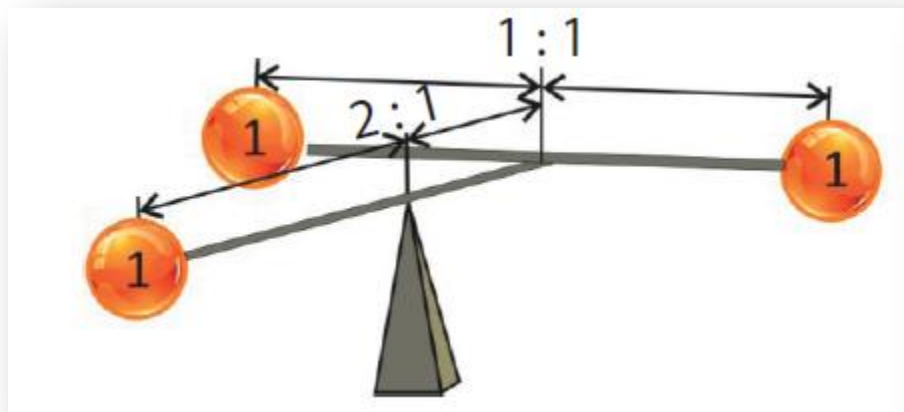
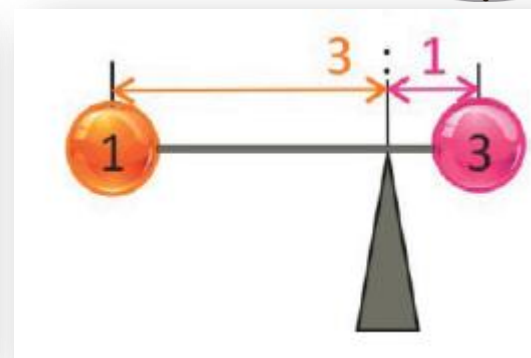
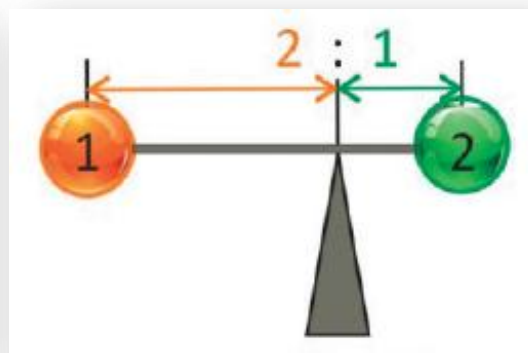
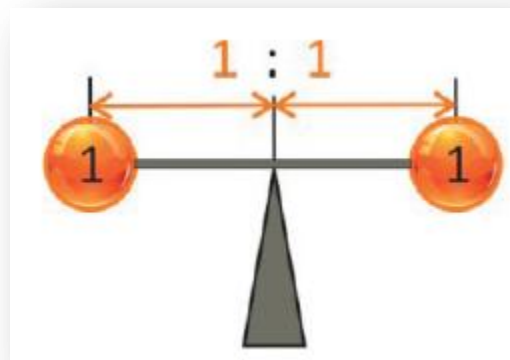
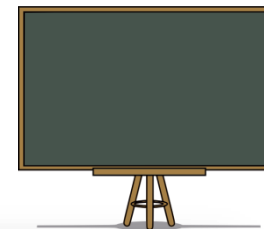
Из $\Delta AD_2A_2 \cong \Delta TDA_1$, следи да је $AA_2 = TA_1$. Како је A_2 средиште дужи AT , одмах добијамо и следеће једнакости:

$$AA_2 = A_2T = TA_1, AT = 2TA_1, AT = \frac{2}{3} AA_1, TA_1 = \frac{1}{3} AA_1, AT : TA_1 = 2 : 1.$$

Слично се доказује да пресечна тачка тежишних дужи t_a и t_b дели ове дужи у размери 2 : 1, при чему већи део сваке од ове две дужи садржи одговарајуће теме троугла. Одавде следи да је пресек дужи t_a и t_b заправо тачка у којој се секу дужи t_a и t_c . Овим је теорема доказана.



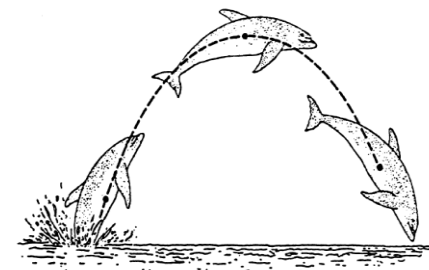
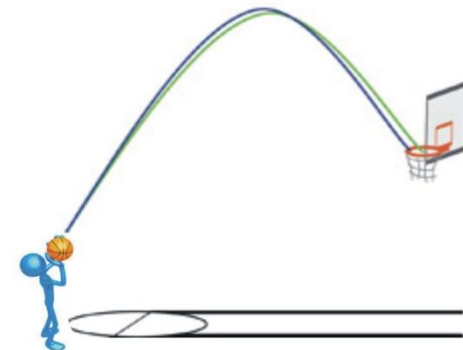
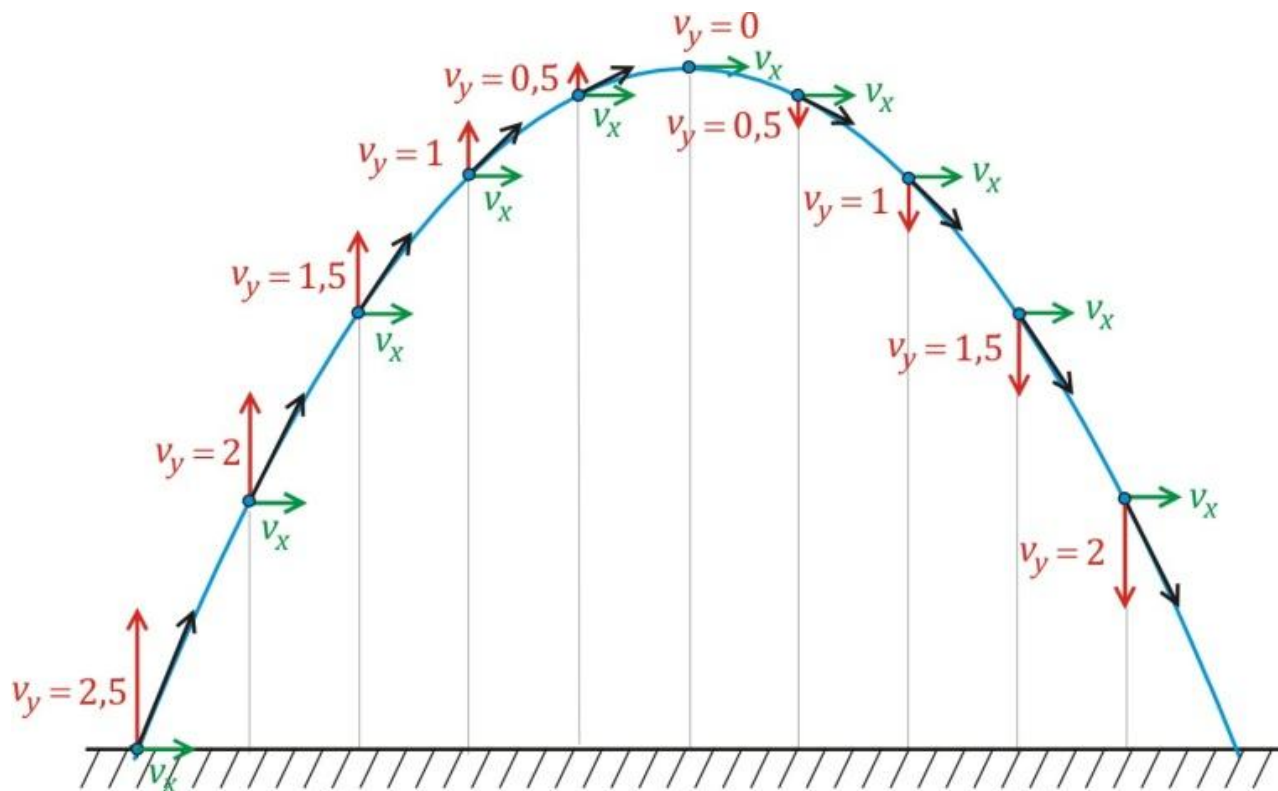
Тежиште троугла (мисони токови)



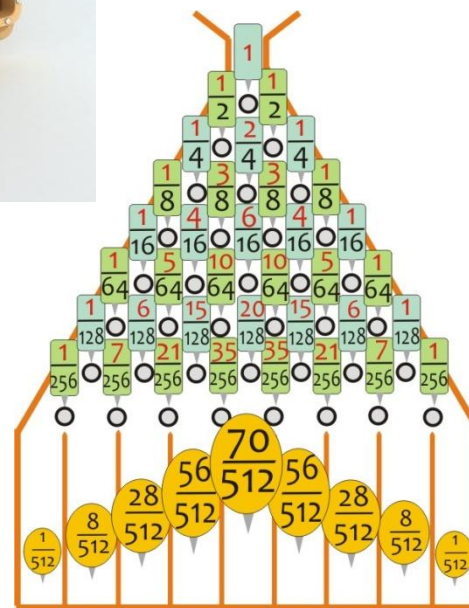
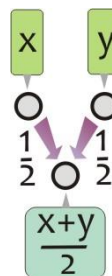
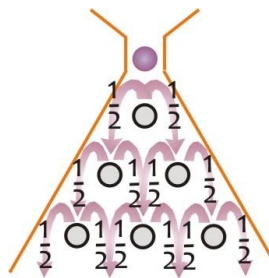
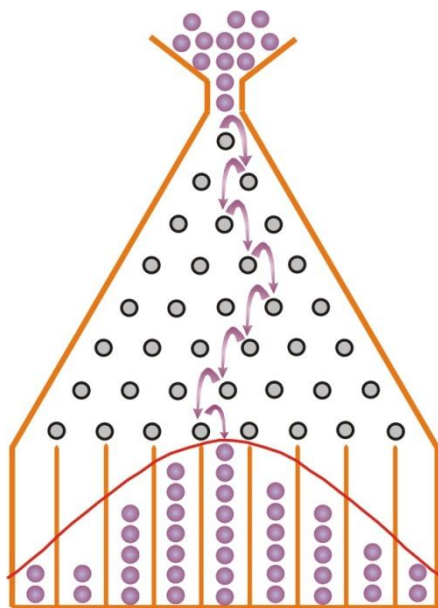
Где је центар равнотеже троугаоне плоче у чијим су
теменима постављене кугле од по 1kg?

Параболе

- Задатак. Коси хитац



Галтонова доска



Задатак.

(1) Одредити обим O_m правилног m -тоугла уписаног у круг јединичног пречника, ако је:

(а) $m = 8$, (б) $m = 16$, (в) $m = 32$.

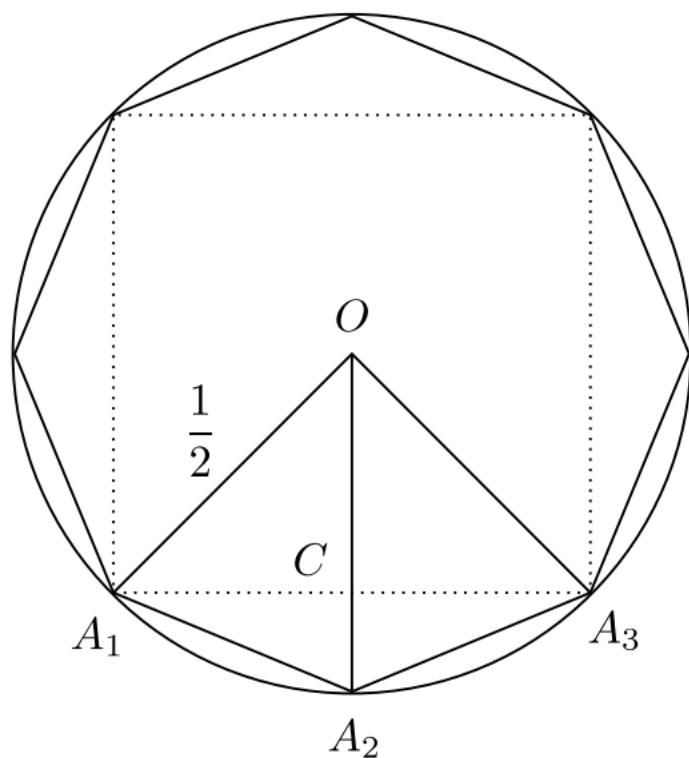
(2) Одредити формулу за обим правилног 2^n -тоугла уписаног у круг јединичног пречника.

(3) Попунити табелу:

m	O_m
4	
8	
16	
32	
128	

одређивањем одговарајућег обима на шест децимала. Шта примећујемо?

Решење задатка.



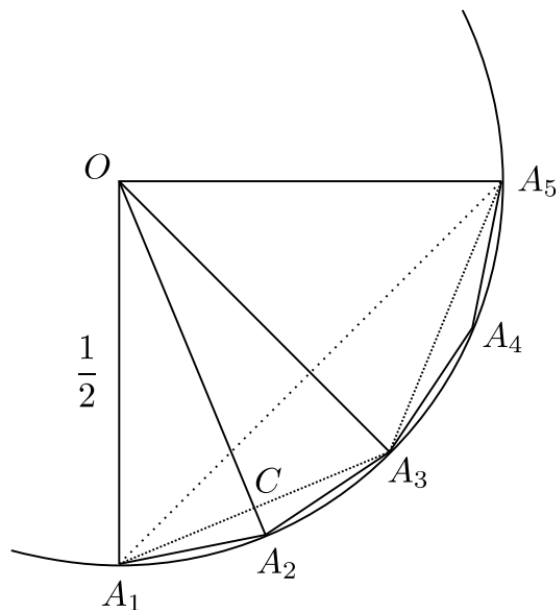
$$A_1C = CA_3 = OC = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= \sqrt{A_1C^2 + CA_2^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_8 &= 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ &\approx 3,061467 \end{aligned}$$

Решење задатка.

(6)



$$A_1C = CA_3 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4},$$

$$OC = \sqrt{OA_1^2 - A_1C^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2 - \sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{16}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{A_1C^2 + CA_2^2} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{16} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2},$$

$$O_{16} = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 3,121445$$

Решење задатка.

(в) Истим поступком се може показати да је

$$O_{32} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 3,136548.$$

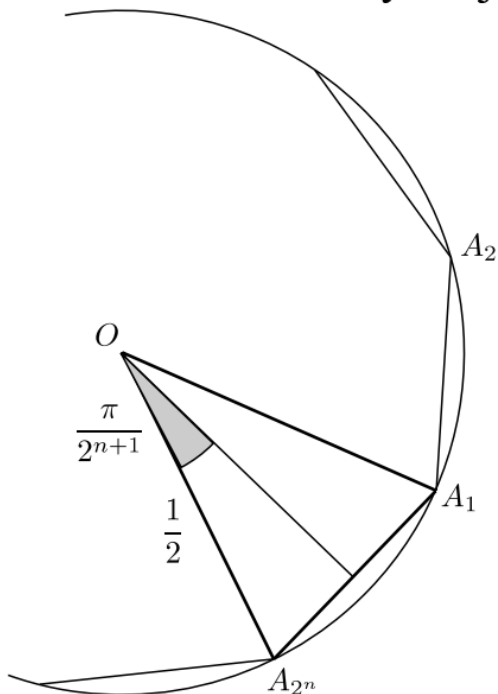
m	O_m
4	2,828427
8	3,061467
16	3,121445
32	3,136548
128	3,141277

Решење задатка.

(2) На основу првог дела задатка изгледа да је

$$O_{2^n} = 2^{n-1} \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}},$$

што се математичком индукцијом може доказати.



Иако није неопходна, од помоћи може бити и следећа формула:

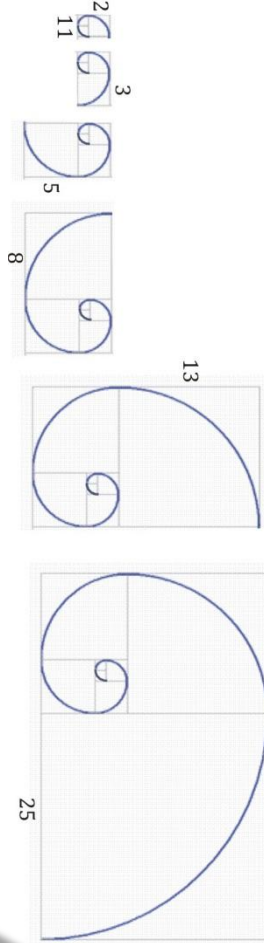
$$\sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}},$$

која важи за произвољно n .

Математика свуда

- Математички примери
- Научни примери
- Животни примери

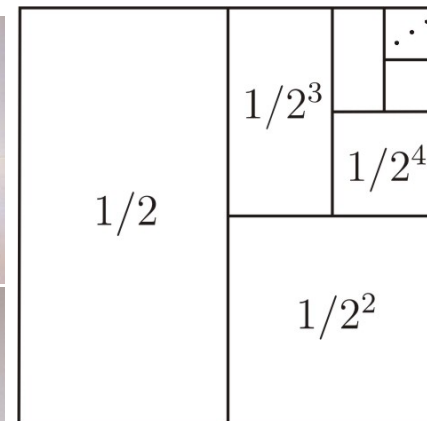
Раст наutilus шкољке и
Фибоначијев низ
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 25, ...



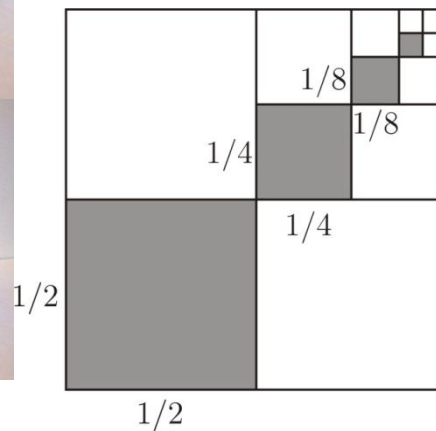
Кавалијеријев
принцип



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$



$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots = \frac{1}{3}$$



2. Принцип очигледности

- Посебно је важно скренути пажљу на чињенице које у неком смислу нису очигледне.

2. Када очигледно није очигледно?

Задатак

Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1\frac{3}{4}.$$

Решење.

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ & < 1 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ & = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) \\ & = \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{n} = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{n} < 1\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. Када очигледно није очигледно?

Задатак Нека је M задати природан број. Доказати да је

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > M$$

уколико је $n \geq 2^{2M}$.

Решење. Уколико је $n \geq 2^{2M}$, имамо да је

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2M}-1} + \frac{1}{2^{2M}} \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ & \dots + \left(\frac{1}{2^{2M-1}+1} + \frac{1}{2^{2M-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^{2M}-1} + \frac{1}{2^{2M}} \right) \\ & > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{2M \text{ пута}} > M + 1 \end{aligned}$$

2. Принцип очигледности

- Посебно је важно скренути пажњу на чињенице које у неком смислу нису очигледне.
- Примена очигледних тврђења није увек једноставна.

2. Принцип очигледности

Задатак

На једној гомили налазе се новчанице од по 50 динара, на другој гомили од по 100 и на трећој од по 1000. Замисли да је дозвољено да са једне гомиле узмеш три новчанице, са неке друге четири новчанице и са преостале гомиле пет новчаница. Какав избор би направио/ла?



2. Принцип очигледности

- Теорема Нека је $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Ако је $\{b'_1, b'_2, b'_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$, онда је

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &\geq \\ &\quad a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 \\ &\quad \geq a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1. \end{aligned}$$

- Задатак Ако су a, b и c позитивни бројеви, докажи неједнакост

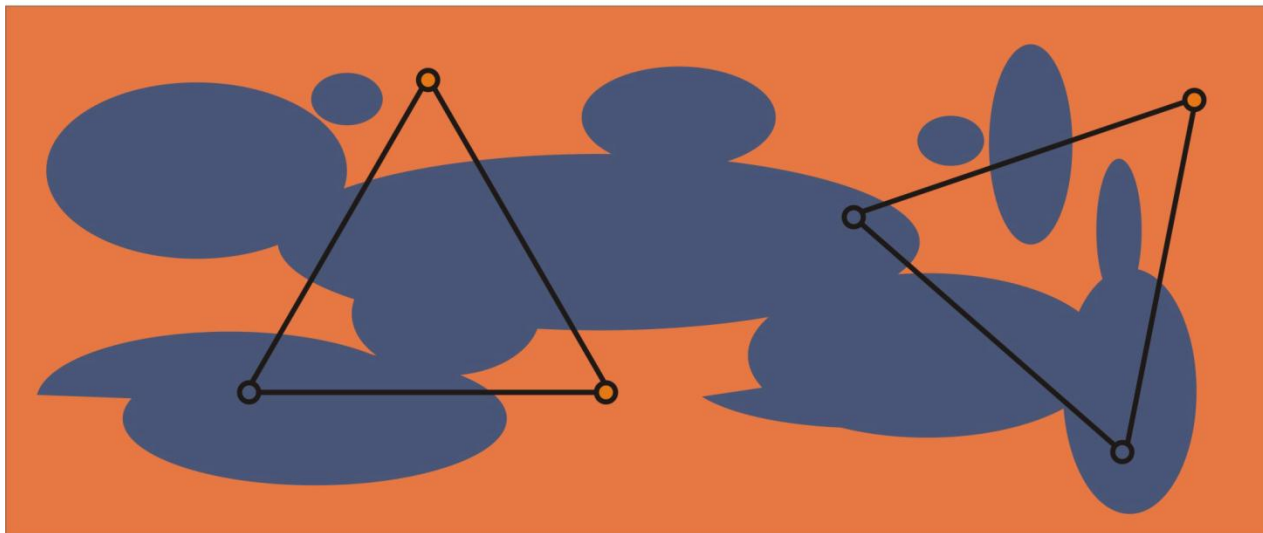
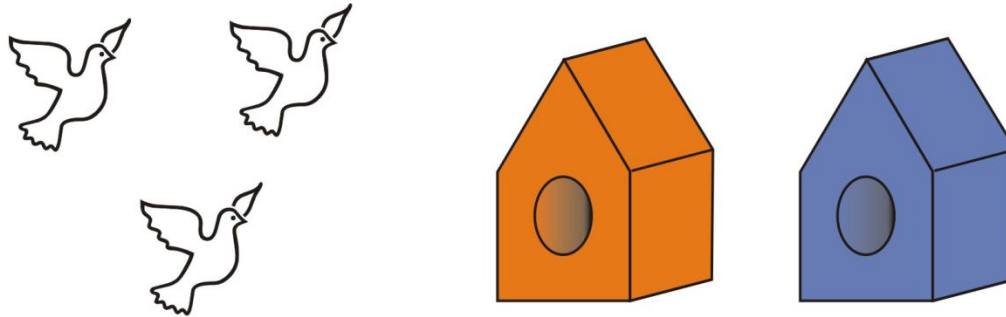
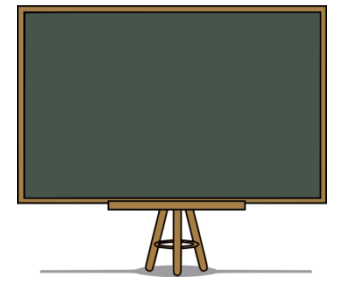
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Једноставно и лако...

... постаје јако тешко

- Ако три голуба треба сместити у два кавеза, онда се бар два морају наћи у истом кавезу!
- Раван је на произвољан начин обојена плавом и наранџастом бојом. Доказати да постоје бар две тачке обојене истом бојом које су на растојању од $5,67\text{cm}$.

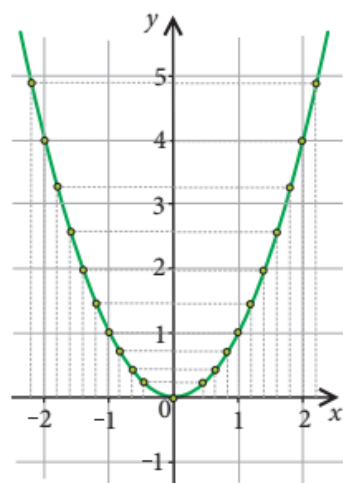
Пример



3. Принцип научности

- Научни поглед на свет и учење научно заснованих чињеница јесте један од најважнијих општих циљева образовања.

Основна квадратна функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$



Посматрајући добијени график $y = x^2$, уочавамо следеће важне особине функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

- 1) Скуп вредности функције f је $[0, +\infty)$; тј. за свако $y \geq 0$ постоји реалан број x такав да је $x^2 = y$.
- 2) Функција f није 1-1 функција; ако је $y > 0$, онда постоје два различита реална броја x_1 и x_2 (од којих је један позитиван, а други негативан) таква да је $x_1^2 = y$ и $x_2^2 = y$.
- 3) Нула функције f је број 0. Функција f је позитивна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 4) Функција f је опадајућа на $(-\infty, 0]$, а растућа на $[0, +\infty)$.
- 5) Функција f је конвексна на $\mathbb{R}$.
- 6) Функција f је парна: за свако x из $\mathbb{R}$ важи $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Квадратна функција

- Особине квадратне функције су последице аксиома комплетно уређеног поља.

Посматрајући добијени график $y = x^2$, уочавамо следеће важне особине функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

- 1) Скуп вредности функције f је $[0, +\infty)$; тј. за свако $y \geq 0$ постоји реалан број x такав да је $x^2 = y$.
- 2) Функција f није 1-1 функција; ако је $y > 0$, онда постоје два различита реална броја x_1 и x_2 (од којих је један позитиван, а други негативан) таква да је $x_1^2 = y$ и $x_2^2 = y$.
- 3) Нула функције f је број 0. Функција f је позитивна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 4) Функција f је опадајућа на $(-\infty, 0]$, а растућа на $[0, +\infty)$.
- 5) Функција f је конвексна на $\mathbb{R}$.
- 6) Функција f је парна: за свако x из $\mathbb{R}$ важи $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

За сваки ненегативан реалан број y постоји јединствени ненегативан број x такав да је $x^2 = y$.

Доказ. Очигледно, ако је $y = 0$, онда је $x = 0$. Претпоставимо да је $y > 0$.

У овом случају, искористићемо аксиому комплетности, коју смо већ помињали у првом разреду.

Ако је S непразан подскуп скупа реалних бројева такав да постоји реалан број такав да су сви елементи скупа S од тог броја мањи или су му једнаки, онда постоји и *најмањи* реалан број такав да су сви елементи скупа S од њега мањи или су му једнаки.

$$S = \{t \geq 0 \mid t^2 < y\}$$

$S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, јер $0 \in S$, S је ограничен одозго, јер су нпр. сви елементи скупа S су мањи од $1 + y$

$x = \sup S$; очигледно је $x > 0$.

Доказаћемо да је $x^2 = y$, тако што ћемо извести контрадикције из претпоставки $x^2 < y$ и $x^2 > y$.

теорема

За сваки ненегативан реалан број y постоји јединствени ненегативан број x такав да је $x^2 = y$.

Претпоставимо да је $x^2 < y$. Нека је $\varepsilon = y - x^2$, тј. $y = x^2 + \varepsilon$. Тада је $\varepsilon > 0$.

Постоји $\delta > 0$ такво да је $x^2 < (x + \delta)^2 = x^2 + 2\delta x + \delta^2 < x^2 + \varepsilon = y$.

Заиста, ...

Одавде закључујемо да $x + \delta \in S$, јер је $0 \leq x + \delta$ и $(x + \delta)^2 < y$, а то није могуће јер елементи скуп S не могу бити већи од x (а имамо да је $x < x + \delta$).

На основу добијене **контрадикције** одбацујемо претпоставку $x^2 < y$ као немогућу.

Претпоставимо да је $y < x^2$. Нека је $\varepsilon' = x^2 - y$. Тада је $y = x^2 - \varepsilon'$ и $\varepsilon' > 0$.

Постоји $\delta' > 0$ такво да је $y = x^2 - \varepsilon' < (x - \delta')^2 = x^2 - 2\delta'x + \delta'^2 < x^2$.

Заиста, ...

За овако изабрано δ' имамо да су сви елементи скупа S мањи од $x - \delta'$.

Међутим, ово није могуће јер је x најмањи број од кога нису већи елементи скупа S (а имамо да је $x - \delta' < x$).

На основу добијене **контрадикције** одбацујемо и претпоставку $x^2 > y$.

Дакле, $x^2 = y$.

теорема

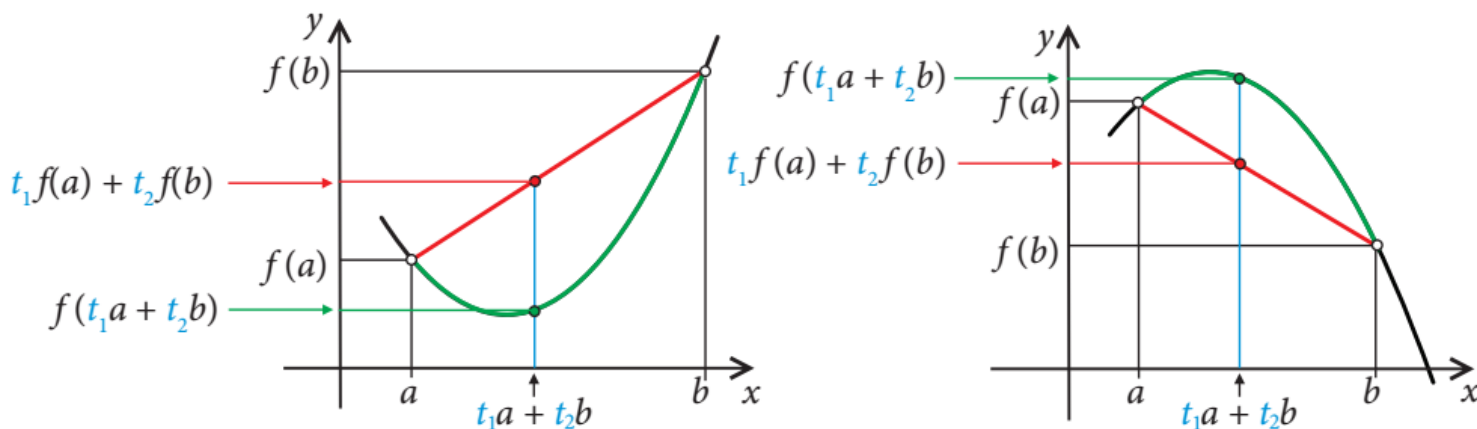
За сваки ненегативан реалан број y постоји јединствени ненегативан број x такав да је $x^2 = y$.

Јединственост броја x се једноставно доказује. Ако би постојала два различита позитивна броја x_1 и x_2 таква да је $x_1^2 = y$ и $x_2^2 = y$, имали бисмо да је $x_1^2 = x_2^2$. Међутим, пошто су x_1 и x_2 различити, један је мањи од другог. Из $0 < x_1 < x_2$ следи да је $x_1^2 < x_2^2$, тј. не може бити $x_1^2 = x_2^2$, док из $0 < x_2 < x_1$ следи да је $x_2^2 < x_1^2$, па и у овом случају не може бити $x_1^2 = x_2^2$.

Конвексност квадратне функције

Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је:

- **конвексна** на интервалу A ($A \subseteq D$) ако је за свака два различита броја a и b из A и све позитивне бројеве t_1 и t_2 такве да је $t_1 + t_2 = 1$ тачна неједнакост
$$f(t_1a + t_2b) \leq t_1f(a) + t_2f(b);$$
- **конкавна** на интервалу A ($A \subseteq D$) ако је за свака два различита броја a и b из A и све позитивне бројеве t_1 и t_2 такве да је $t_1 + t_2 = 1$ тачна неједнакост
$$f(t_1a + t_2b) \geq t_1f(a) + t_2f(b).$$



Конвексност квадратне функције

Функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ је:

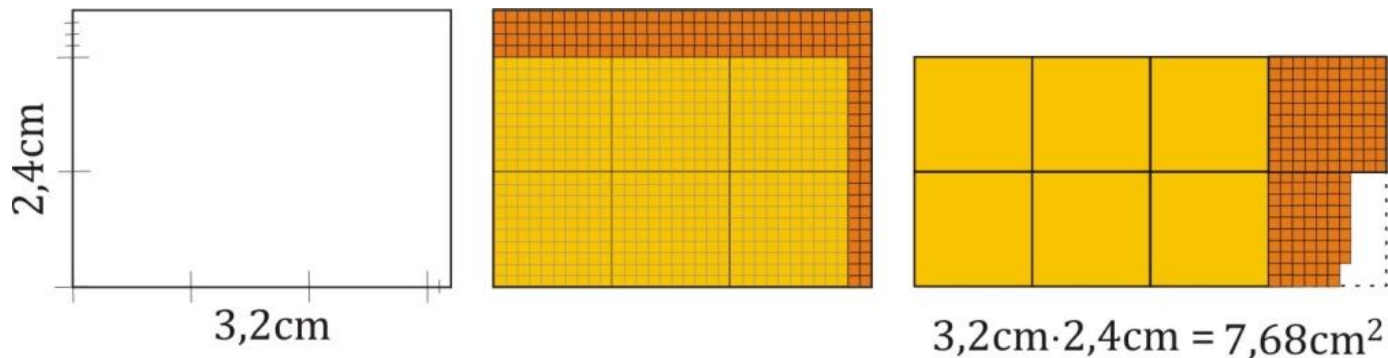
- **конвексна** на интервалу A ($A \subseteq D$) ако је за свака два различита броја a и b из A и све позитивне бројеве t_1 и t_2 такве да је $t_1 + t_2 = 1$ тачна неједнакост
$$f(t_1 a + t_2 b) \leq t_1 f(a) + t_2 f(b);$$
- **конкавна** на интервалу A ($A \subseteq D$) ако је за свака два различита броја a и b из A и све позитивне бројеве t_1 и t_2 такве да је $t_1 + t_2 = 1$ тачна неједнакост
$$f(t_1 a + t_2 b) \geq t_1 f(a) + t_2 f(b).$$

теорема

Ако су a и b различити реални бројеви и t_1 и t_2 позитивни бројеви такви да је $t_1 + t_2 = 1$, онда је $(t_1 a + t_2 b)^2 \leq t_1 a^2 + t_2 b^2$.

Површина правоугаоника

- Површина правоугаоника када су странице рационални бројеви (када су странице самерљиве са јединицом мере)



- Важи ли формула за површину правоугаоника у случају да су странице ирационални бројеви (одн. када нису самерљиве са јединичном дужи)?

Површина правоугаоника

Доказ формуле за површину правоугаоника заснива се на примени Архимедове аксиоме

Нека је a позитиван реалан број. Тада за сваки ненегативан реалан број b постоји јединствени природан број n такав да је $(n - 1)a \leq b < na$.

Последица. Ако је $0 \leq x$ и за сваки природан број n важи неједнакост $x < \frac{1}{n}$, онда је $x = 0$.

Наведену последицу користимо за доказ формуле за површину правоугаоника на следећи начин: да бисмо доказали да је површина P правоугаоника једнака производу страница a и b , тј. да је $P = ab$, доказаћемо да

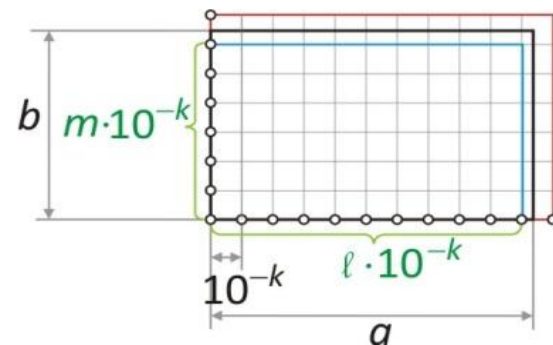
(*) за сваки природан број n важи неједнакост $|P - ab| < \frac{1}{n}$.

Примети да је $|P - ab| \geq 0$. У доказу ћемо истаћи најважније делове, не улазећи у све детаље.

Површина P правоугаоника чије су странице a и b рачуна се по формули

$$P = ab.$$

Доказ. Тврђење (*) доказујемо тако што странице правоугаоника меримо деловима јединичне дужи чије су дужине 10^{-k} , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



Према Архимедовој теореме, за било које k постоје природни бројеви ℓ и m такви да је $\ell \cdot 10^{-k} \leq a < (\ell + 1) \cdot 10^{-k}$ и $m \cdot 10^{-k} \leq b < (m + 1) \cdot 10^{-k}$. Из ових неједнакости следи да је $\ell m \cdot 10^{-2k} \leq ab \leq (\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k}$.

Означимо са $\underline{P}$ површину правоугаоника чије су странице $\ell \cdot 10^{-k}$ и $m \cdot 10^{-k}$, а са $\overline{P}$ површину правоугаоника чије су странице $(\ell + 1) \cdot 10^{-k}$ и $(m + 1) \cdot 10^{-k}$. Тада је $\underline{P} = \ell m \cdot 10^{-2k}$, $\overline{P} = (\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k}$ и $\underline{P} \leq P \leq \overline{P}$, односно $\ell m \cdot 10^{-2k} \leq P \leq (\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k}$.

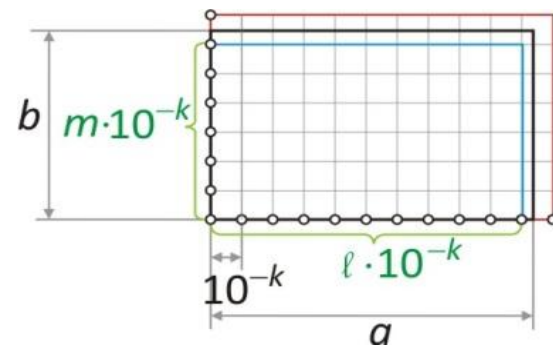
Будући да су и ab и P између $\ell m \cdot 10^{-2k}$ и $(\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k}$ закључујемо да је:

$$\begin{aligned} |P - ab| &\leq (\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k} - \ell m \cdot 10^{-2k} \\ &= \ell \cdot 10^{-2k} + m \cdot 10^{-2k} + 10^{-2k} \\ &\leq a \cdot 10^{-k} + b \cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \text{ [јер је } \ell \cdot 10^{-k} \leq a \text{ и } m \cdot 10^{-k} \leq b] \\ &\leq (a + b + 1) \cdot 10^{-k}. \end{aligned}$$

Површина P правоугаоника чије су странице a и b рачуна се по формули

$$P = ab.$$

Доказ. Тврђење (*) доказујемо тако што странице правоугаоника меримо деловима јединичне дужи чије су дужине 10^{-k} , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



$$\begin{aligned} |P - ab| &\leq (\ell + 1)(m + 1) \cdot 10^{-2k} - \ell m \cdot 10^{-2k} \\ &= \ell \cdot 10^{-2k} + m \cdot 10^{-2k} + 10^{-2k} \\ &\leq a \cdot 10^{-k} + b \cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \text{ [jer je } \ell \cdot 10^{-k} \leq a \text{ и } m \cdot 10^{-k} \leq b] \\ &\leq (a + b + 1) \cdot 10^{-k}. \end{aligned}$$

Докажимо сада тврђење (*). Нека је n било који природан број. Да бисмо доказали да је $|P - ab| < \frac{1}{n}$, на основу претходних неједнакости закључујемо да је довољно узети довољно ситне делове јединице мере, односно изабрати k тако да буде $(a + b + 1) \cdot 10^{-k} < \frac{1}{n}$. Очигледним трансформацијама последње неједнакости закључујемо да треба изабрати k тако да је $10^k > n(a + b + 1)$, односно $k > \log n(a + b + 1)$.

Из тврђења (*), према последици са претходне стране, следи да је $|P - ab| = 0$, односно $P = ab$.

Запремина квадра

Задатак. Извести формулу за израчунавање запремине квадра.