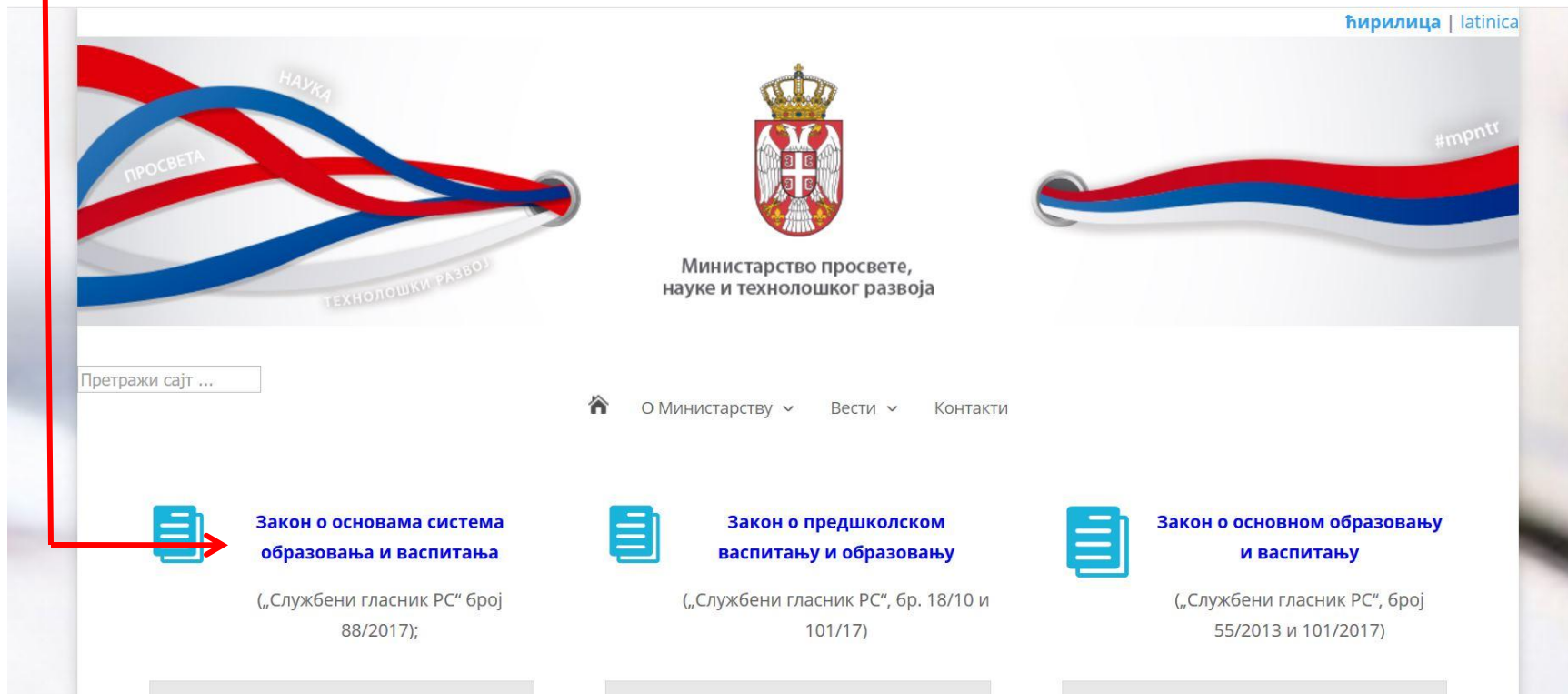


Шта треба (на)учити?
Практичне потребе (ECDL)
Аритметика и Геометрија

Методика наставе
математике
рачунарства

Образовање ...

<http://www.mpn.gov.rs/dokumenta-i-propisi/zakonski-okvir/>



Ћирилица | latinica

НАУКА
ПРОСВЕТА
ТЕХНОЛОШКИ РАЗВОЈ

Министарство просвете,
науке и технолошког развоја

#mpntr

Претражи сајт ...

О Министарству ▾ Вести ▾ Контакти

 **Закон о основама система образовања и васпитања**
(„Службени гласник РС“ број 88/2017);

 **Закон о предшколском васпитању и образовању**
(„Службени гласник РС“, бр. 18/10 и 101/17)

 **Закон о основном образовању и васпитању**
(„Службени гласник РС“, број 55/2013 и 101/2017)

Закон о основама система ...

...

- Циљеви образовања и васпитања (**Члан 8.**)
- Исходи образовања и васпитања (**Члан 9.**)
... искази о томе шта се од ученика очекује да зна, разуме и да је способан да покаже, односно уради након завршеног одговарајућег нивоа ...
- Стандарди образовања и васпитања (**Члан 10.**)
... скуп норми на основу којих се врши процена квалитета у систему ...
- Кључне компетенције... (**Члан 11.**)
... скуп интегрисаних знања, вештина и ставова који су потребни сваком појединцу за лично испуњење и развој, укључивање у друштвени живот и запошљавање.

...

Шта треба (на)учити?

- Избор наставних садржаја одређују:
 - Практични фактори: практичне потребе
 - Научни фактори: научне теорије
 - Развојни фактори: подстицај интелектуалног развоја

Практични и теоријски фактори

- Информатика:

практични садржаји на академском нивоу

- Математика:

теоријски садржаји “освежени” практичним примерима

Computer Driving Licence

- Возачка дозвола
- Сертификат о знању језика
- ECDL/ICDL – European/International Computer Driving Licence

ECDL moduli su podeljeni na sledeće nivoe: [osnovni nivo](#), [srednji nivo](#) i [napredni nivo](#).

OSNOVNI NIVO

- > [M1 - Osnove korišćenja računara](#)
- > [M2 - Osnove korišćenja interneta](#)
- > [M3 - Obrada teksta](#)
- > [M4 - Tabelarne kalkulacije](#)

SREDNJI NIVO

- > [M5 - Presentacije](#)
- > [M6 - Korišćenje baza podataka](#)
- > [M7 - IT Sigurnost](#)
- > [M8 - Onlajn kolaboracija](#)
- > [M9 - Obrada slika](#)
- > [M10 - Obrada internet stranica](#)
- > [M11 - Projektno planiranje](#)
- > [M12 - 2D CAD](#)
- > [M13 - Upotreba zdravstvenog informacionog sistema](#)

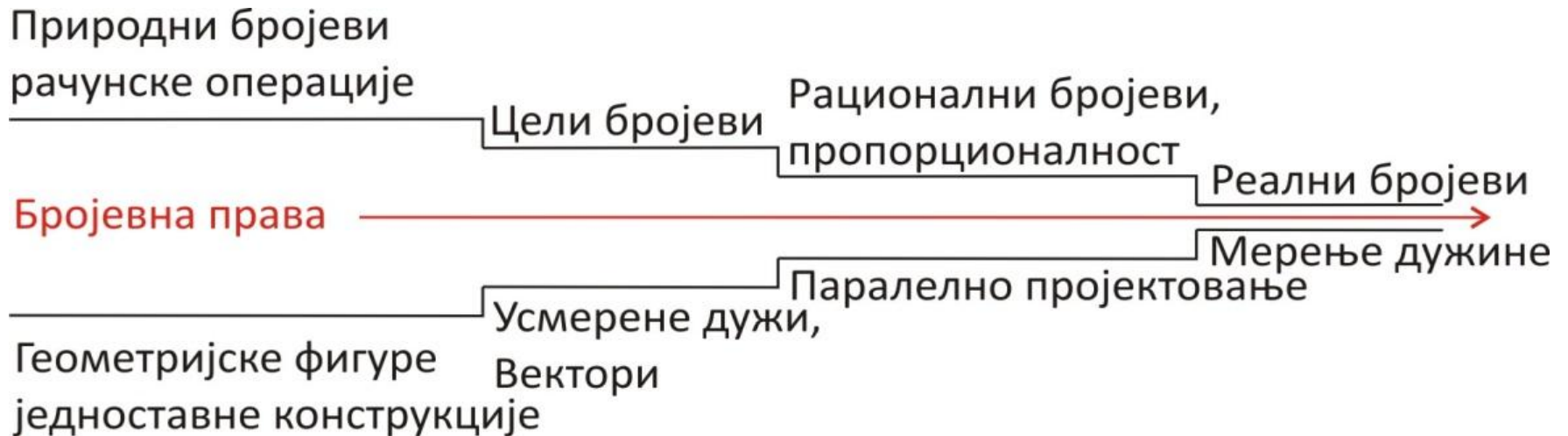
NAPREDNI NIVO

- > [AM3 - Napredna obrada teksta](#)
- > [AM4 - Napredne tabelarne kalkulacije](#)
- > [AM5 - Napredne baze podataka](#)
- > [AM6 - Napredne prezentacije](#)

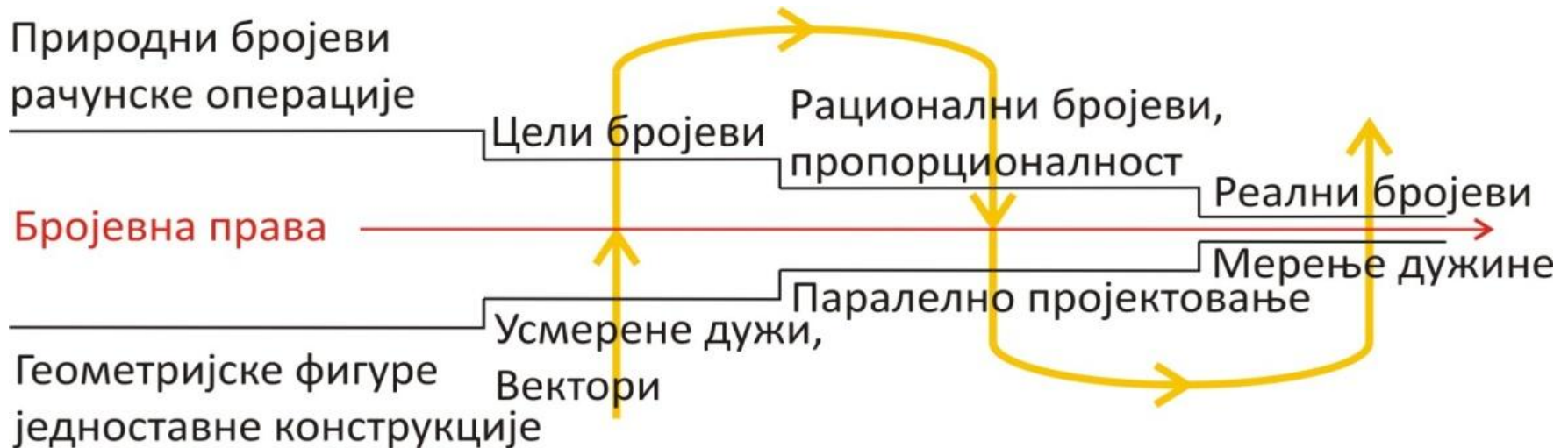
Програмски пакети у математици

- Пакети за решавање математичких проблема (алати за симболичку математику, нумеричку математику, симулације, визуелизацију, ...)
- Пакети за презентовање математичких садржаја (писање математичког текста, прављење презентација, е-лекције, ...)

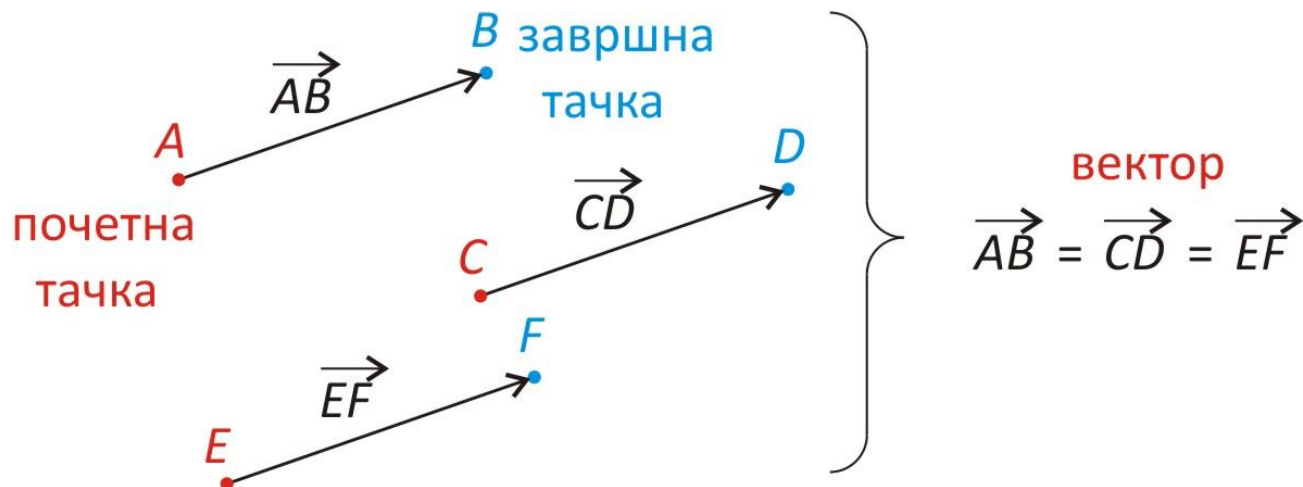
Аритметика и геометрија



Аритметика и геометрија



Усмерене дужи. Вектори



Усмерене дужи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ су једнаке ако:

- имаји сити правац, смер и интензитет,
- или
- дужи AD и CD имају заједничко средиште.

Операције са векторима (групе, модули)

Нека су $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ произвољни вектори.

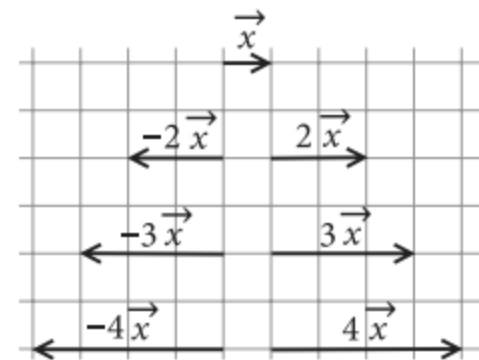
1. Сабирање вектора је асоцијативно, то јест $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$, за све векторе $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$.
2. Сабирање вектора је комутативно, то јест $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, за све векторе $\vec{x}$ и $\vec{y}$.
3. Нула-вектор је неутрал за сабирање, то јест $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$, за сваки вектор $\vec{x}$.
4. Збир два супротна вектора је нула-вектор, то јест $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$, за сваки вектор $\vec{x}$.

Производ вектора природним бројем $n \geq 1$ дефинише се на очекивани начин:

$$n\vec{x} = \underbrace{\vec{x} + \vec{x} + \dots + \vec{x}}_{n \text{ пута}}$$

Такође, природно се уводи и производ вектора нулом и негативним целим бројевима:

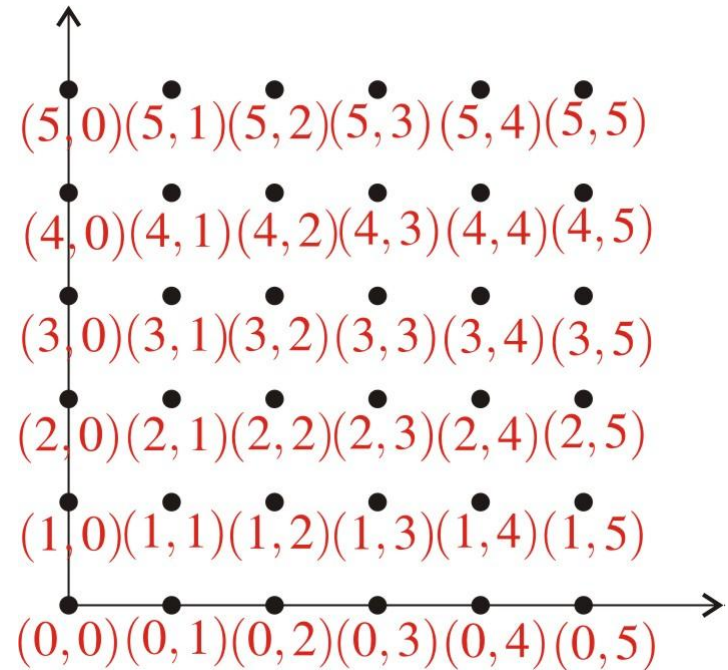
$$0\vec{x} = \vec{0} \text{ и } (-n)\vec{x} = n(-\vec{x}) = \underbrace{(-\vec{x}) + (-\vec{x}) + \dots + (-\vec{x})}_{n \text{ пута}}, n \geq 1.$$



Цели бројеви

Једначине по x :

$$a + x = b$$



Цели бројеви

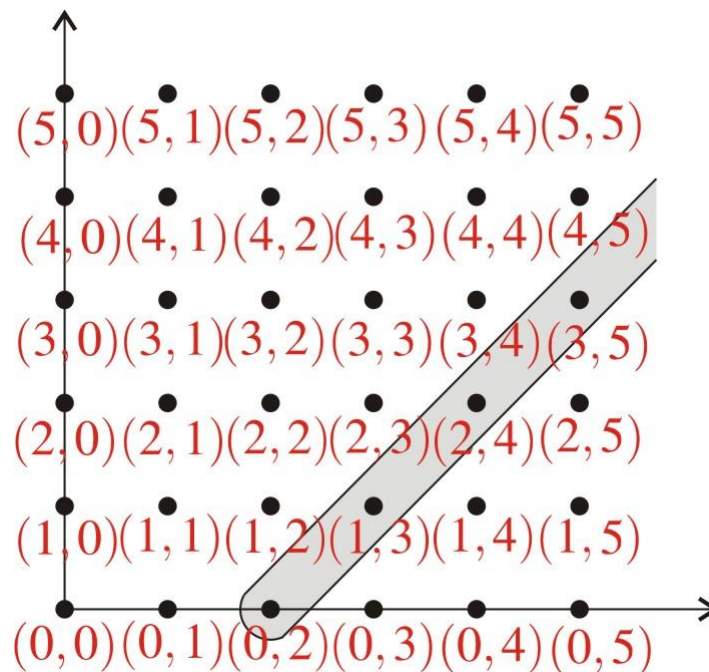
Једначине по x :

$$a + x = b$$

Еквивалентне једначине:

$$0 + x = 2 \quad 1 + x = 3$$

$$2 + x = 4 \quad 3 + x = 5 \quad \dots$$



Цели бројеви

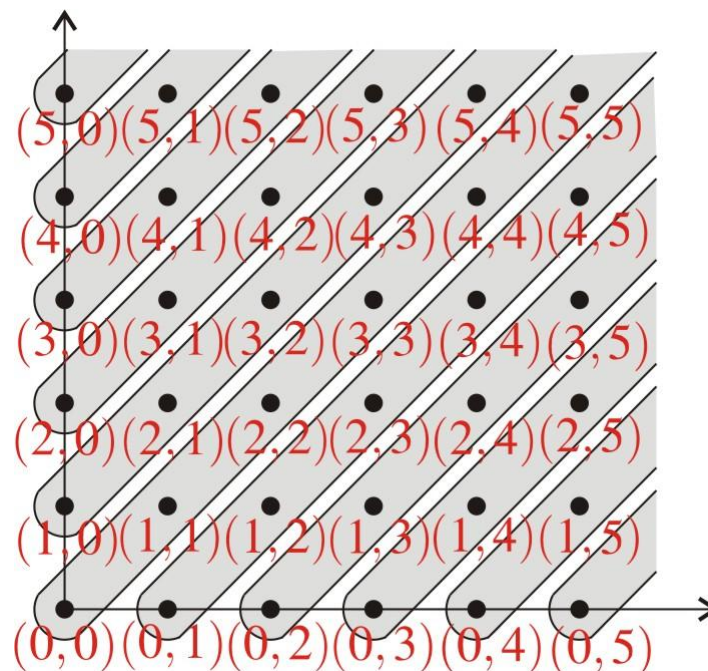
Једначине по x :

$$a + x = b$$

Еквивалентне једначине:

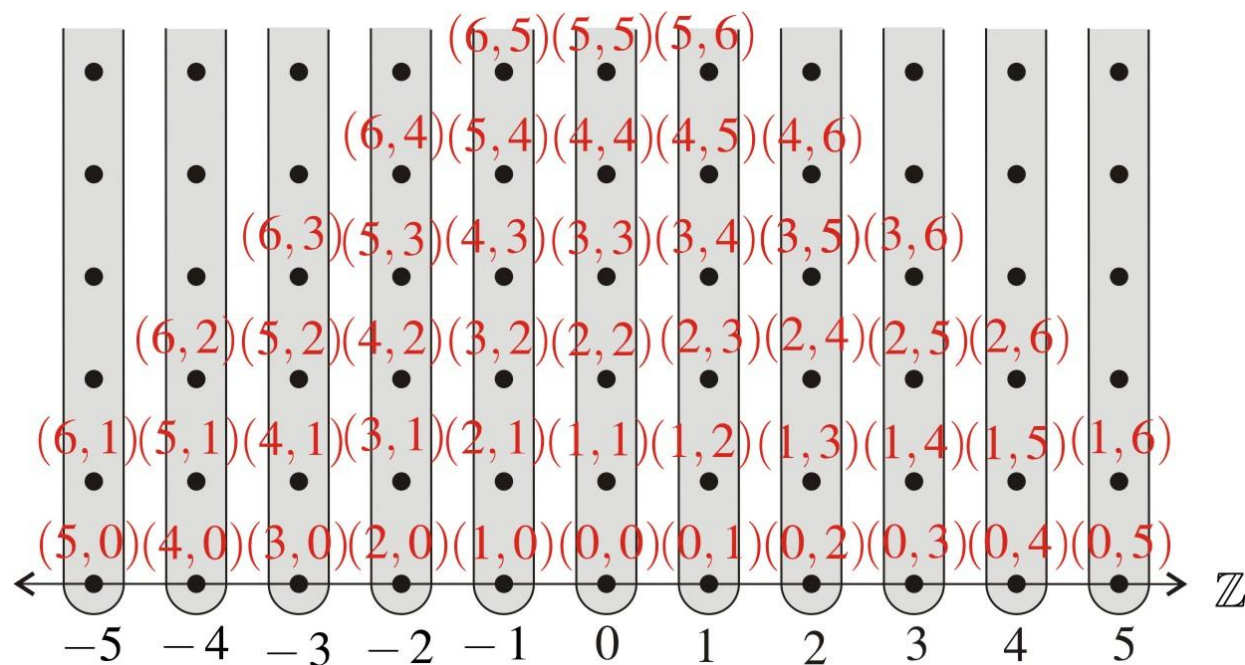
$$0 + x = 2 \quad 1 + x = 3$$

$$2 + x = 4 \quad 3 + x = 5 \quad \dots$$



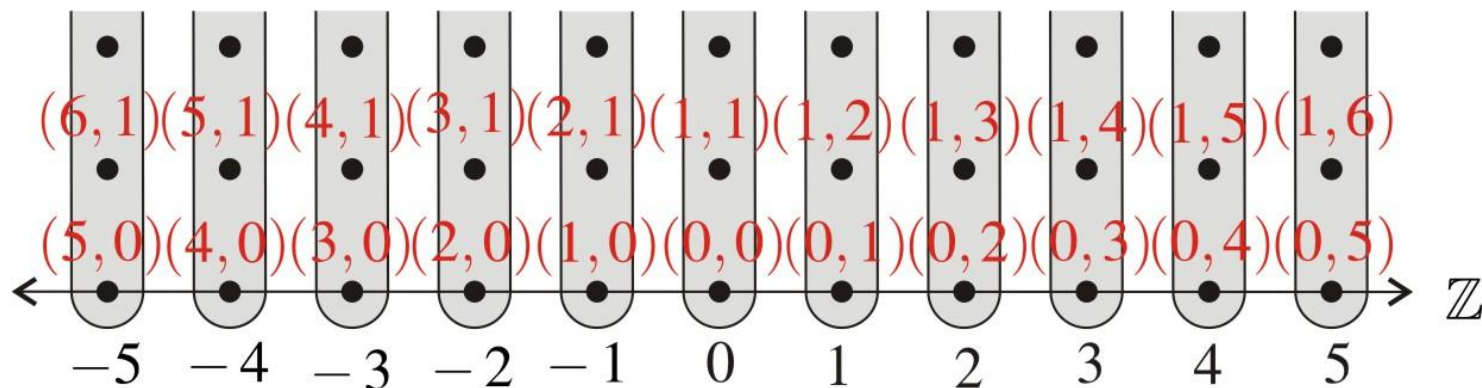
$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a + d = b + c$$

Цели бројеви



$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\iff} a + d = b + c$$

Цели бројеви

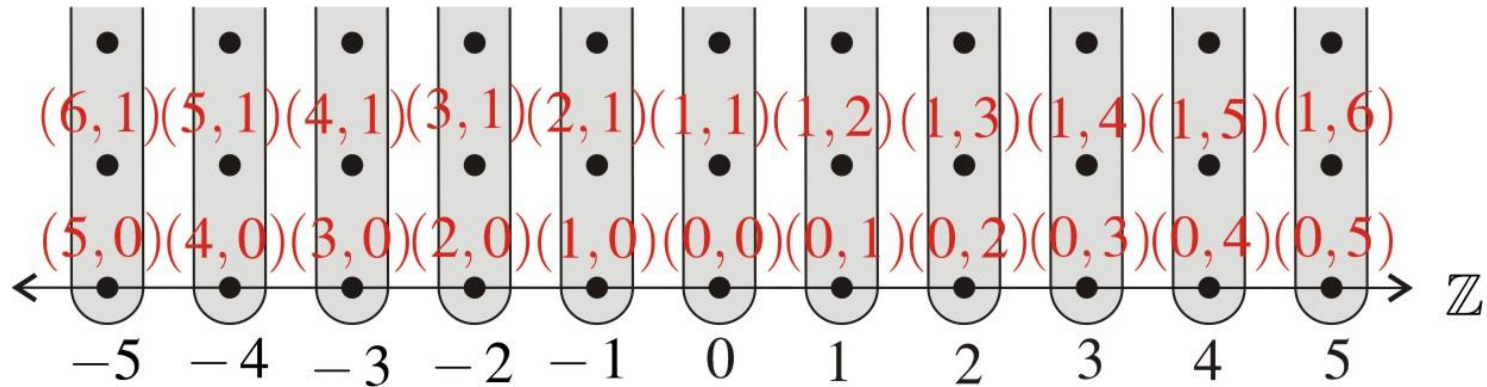


$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} [(a + c, b + d)]_{\sim}$$

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} [(ad + bc, bd + ac)]_{\sim}$$

Цели бројеви ...



Структура $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$

... група, прстен, модул

Рационални бројеви

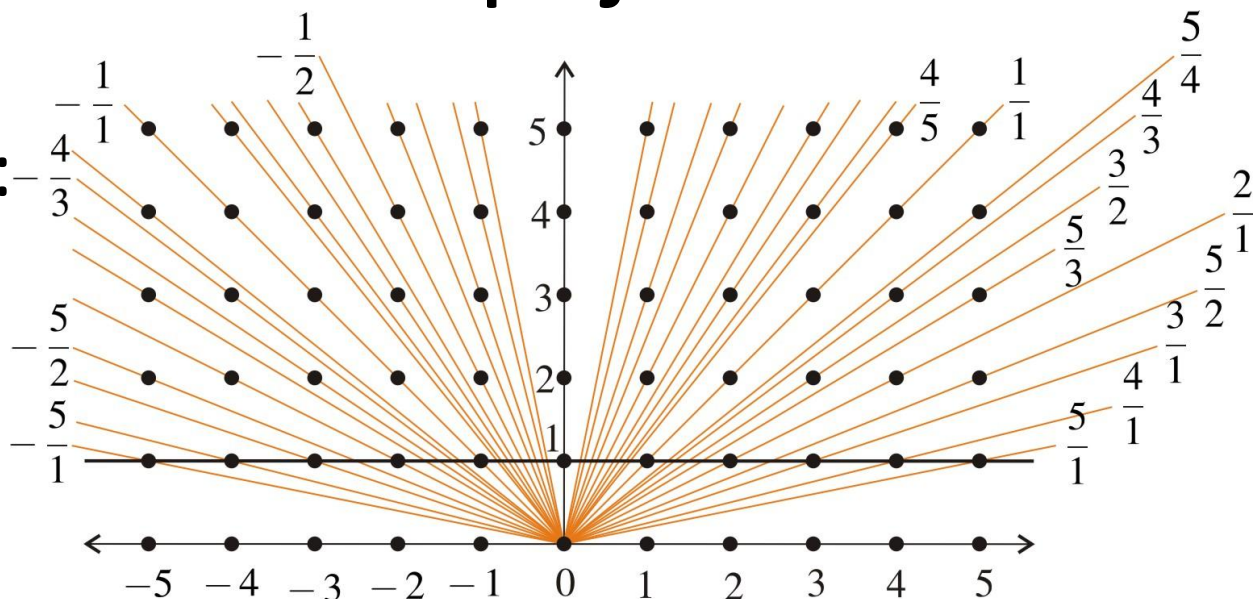
Једначине по x :

$$a \cdot x = b$$

Еквивалентне:

$$2 \cdot x = 1$$

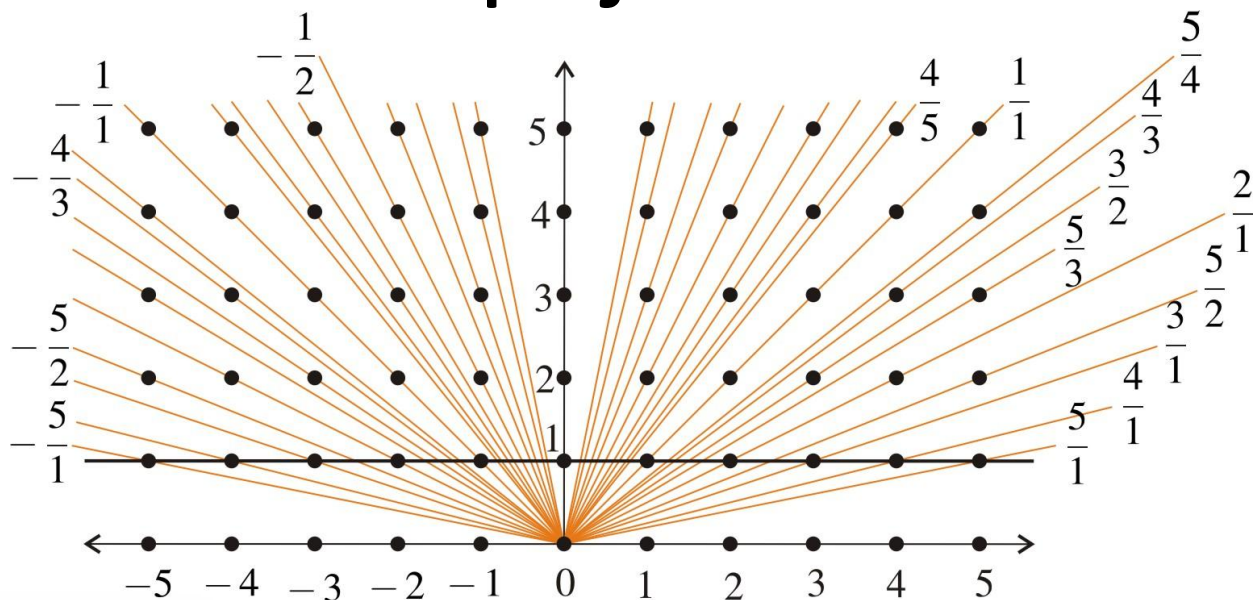
$$4 \cdot x = 2 \quad 8 \cdot x = 4 \quad \dots$$



$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \cdot d = b \cdot c$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ / \sim$$

Рационални бројеви



$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\iff} a \cdot d = b \cdot c$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ / \sim$$

... поље, векторски простор

За произвљне рационалне бројеве x, y, z :

(K +) $x + y = y + x$	[комутативност сабирања]
(A +) $(x + y) + z = x + (y + z)$	[асоцијативност сабирања]
(H +) $x + 0 = x$	[0 је неутрал за сабирање]
(И +) $x + (-x) = 0$	[сваки број има инверз у односу на сабирање]
(K ·) $x \cdot y = y \cdot x$	[комутативност множења]
(A ·) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	[асоцијативност множења]
(H ·) $x \cdot 1 = x$	[1 је неутрал за множење]
(И ·) ако је $x \neq 0$, онда је $x \cdot \frac{1}{x} = 1$	[сваки број различит од нуле има инверз у односу на множење]
(Д) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	[дистрибутивност множења према сабирању]
(Р) $x \leq x$	[рефлексивност поретка]
(АС) ако је $x \leq y$ и $y \leq x$, онда је $x = y$.	[антисиметричност поретка]
(Т) ако је $x \leq y$ и $y \leq z$, онда је $x \leq z$.	[транзитивност поретка]
(Л) $x \leq y$ или $y \leq x$	[линеарност поретка]
(П +) ако је $x \leq y$, онда је $x + z \leq y + z$	[сагласност поретка са сабирањем]
(П ·) ако је $x \leq y$ и $0 \leq z$, онда је $x \cdot z \leq y \cdot z$	[сагласност поретка са множењем]

Уређено поље рационалних бројева

Задатак. Доказати:

1. $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

2. $-(-x) = x$

3. $-(x + y) = (-x) + (-y)$

4. $x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$, ако је $z \neq 0$

5. $0 \cdot x = 0$

6. $(-1) \cdot x = -x$

7. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

8. $x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x$

9. $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

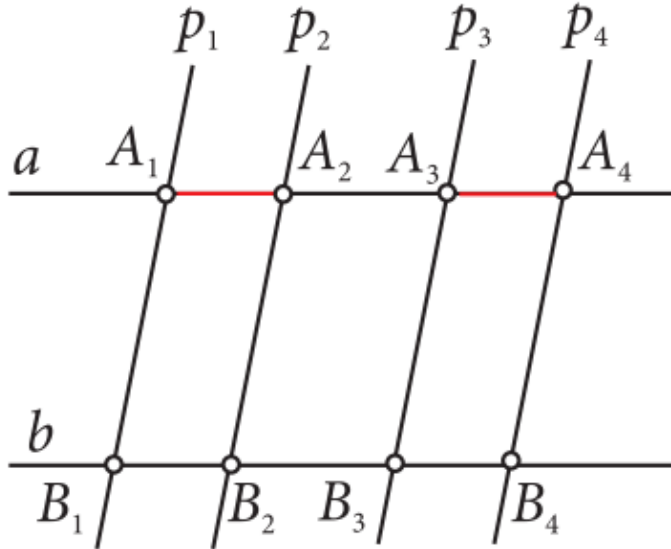
10. $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

Размере и заједничка мера дужи

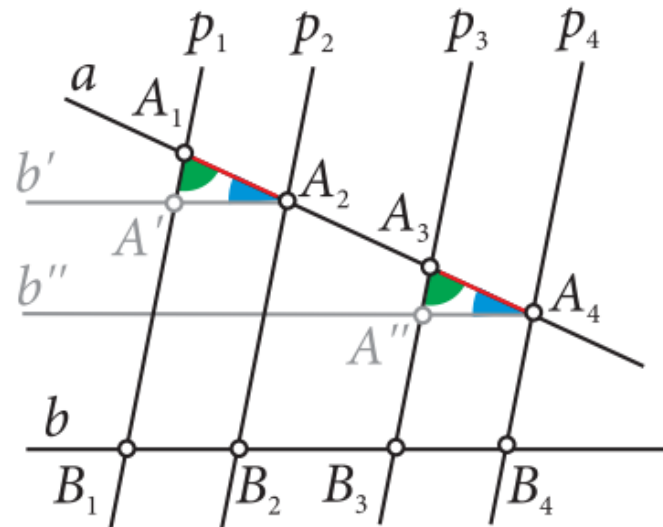
Нека паралелне праве p_1, p_2, p_3 и p_4 секу праву a у тачкама A_1, A_2, A_3 и A_4 , а праву b у тачкама B_1, B_2, B_3 и B_4 . Ако је $A_1A_2 \cong A_3A_4$, онда је $B_1B_2 \cong B_3B_4$.

Доказ.

1. случај.



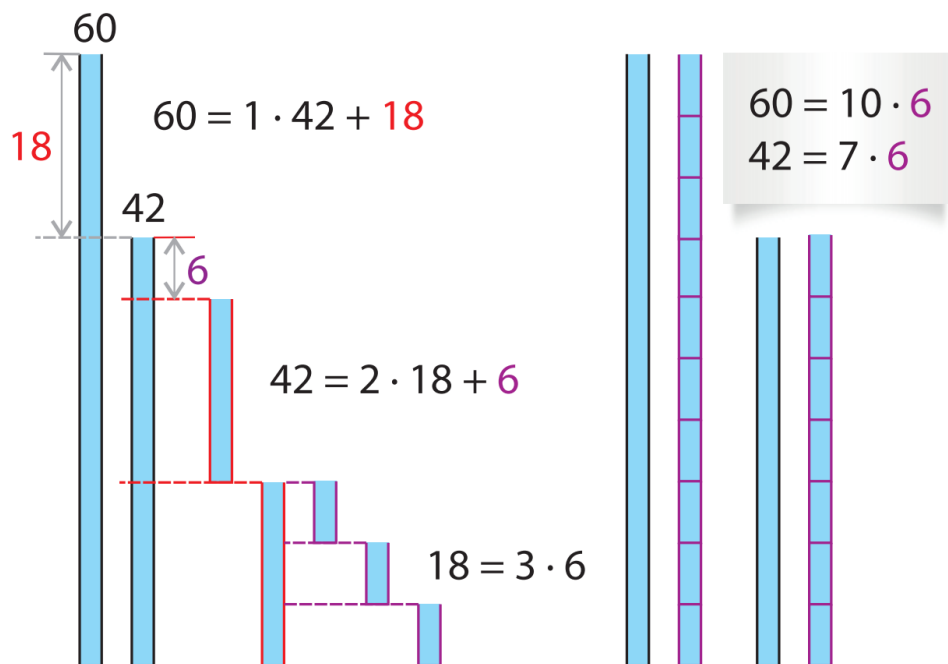
2. случај.



Размере и заједничка мера дужи

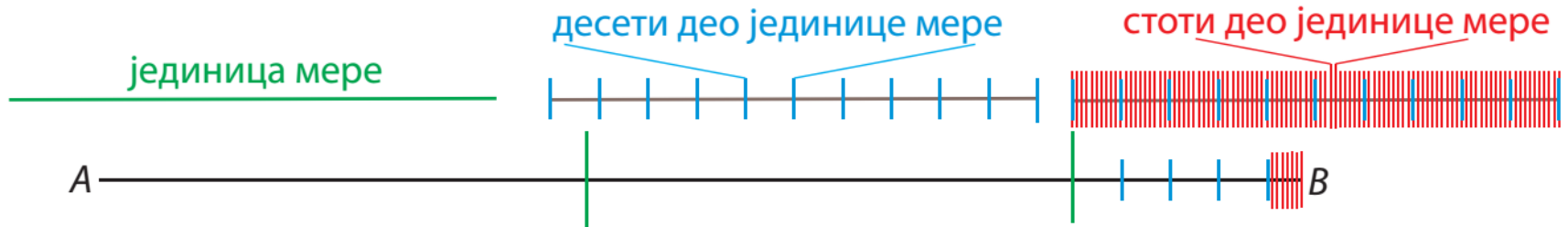
Задатак. Поделити дату дуж у размери 2 : 3.

Задатак. Којом највећом заједничком мером се може измерити 42 литра и 60 лиара воде?



Мерење дужине

$$AB = 2m + 4 \cdot \frac{m}{10} + 7 \cdot \frac{m}{100} = \left(2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}\right)m = 2,47m$$



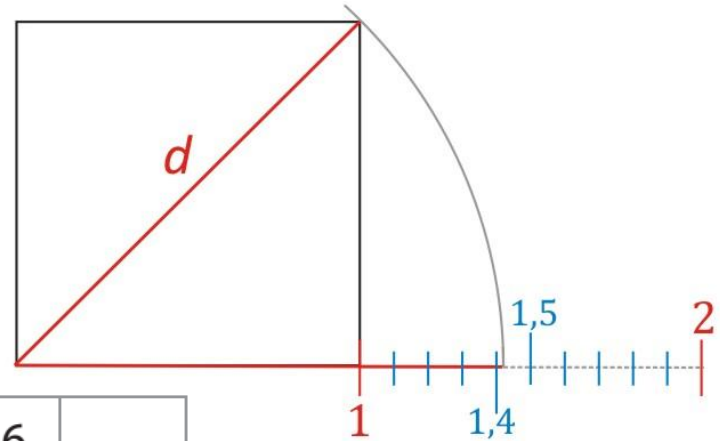
Архимедова аксиома

Нека је IJ произвољна дуж. Тада за сваку дуж AB на полуправој чији је почетак тачка A и која садржи B постоји коначно много тачака $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ таквих да је $A - A_1 - A_2 - \dots - A_n$, $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots \cong A_{n-1}A_n \cong IJ$ и $A - B - A_n$.

Могуће је одредити приближну целобројну дужине сваке дужи јер се преношењем јединице мере коначан број пута може стићи и пресићи свака тачка.

Мерење дужине

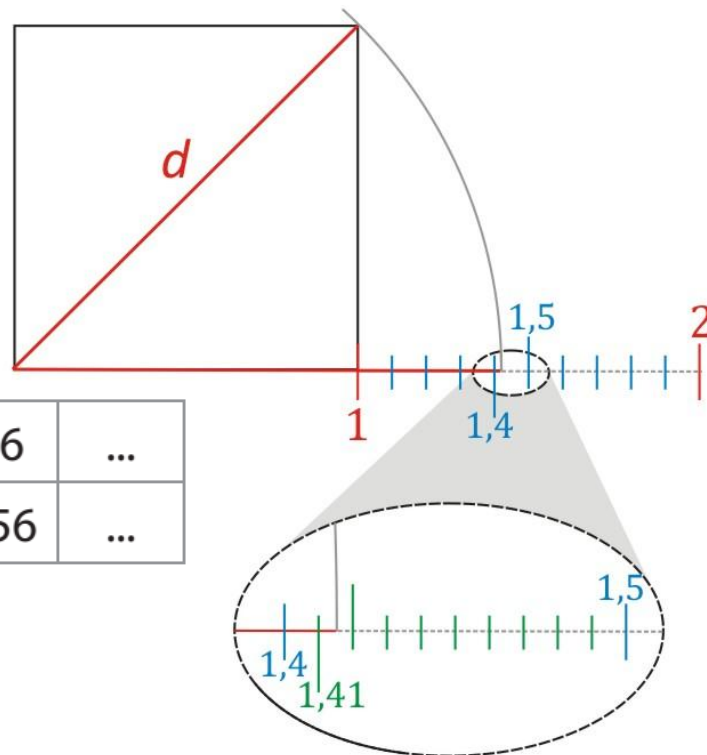
$$1 < d < 2$$



d	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	...
d^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	...

Мерење дужине

$$1 < d < 2$$

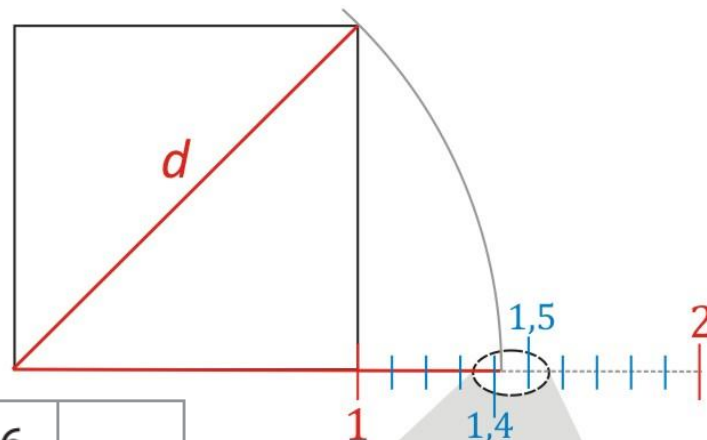


d	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	...
d^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	...

d	1,4	1,41	1,42	...
d^2	1,96	1,9881	2,0164	...

Мерење дужине

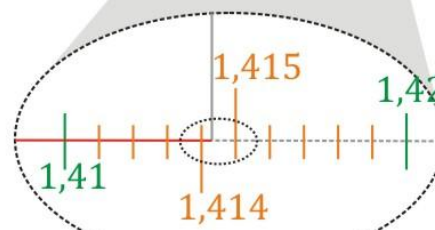
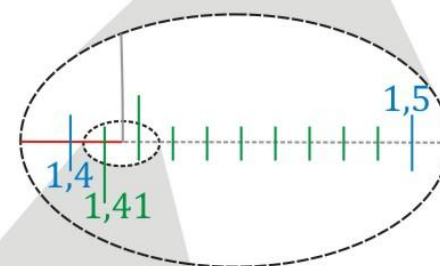
$$1 < d < 2$$



d	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	...
d^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	...

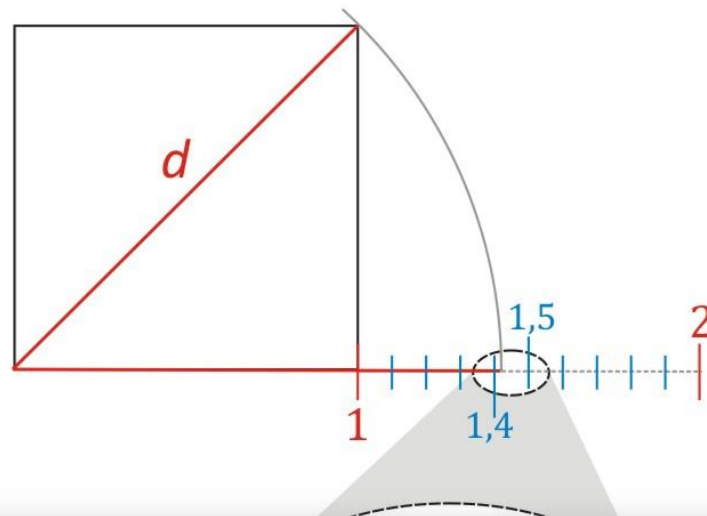
d	1,4	1,41	1,42	...
d^2	1,96	1,9881	2,0164	...

d	1,411	1,412	1,413	1,414	1,415	...
d^2	1,990921	1,993724	1,996569	1,999396	2,002225	...



Мерење дужине

$$1 < d < 2$$

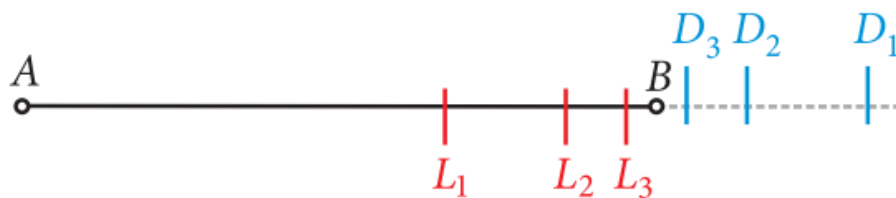


$1 < x < 2$	$1 < x^2 < 4$
$1,4 < x < 1,5$	$1,96 < x^2 < 2,25$
$1,41 < x < 1,42$	$1,9881 < x^2 < 2,0164$
$1,414 < x < 1,415$	$1,999396 < x^2 < 2,002225$
$1,4142 < x < 1,4143$	$1,99996164 < x^2 < 2,00024449$
$1,41421 < x < 1,41422$	$1,9999899241 < x^2 < 2,0000182084$
$1,414213 < x < 1,414214$	$1,999998409369 < x^2 < 2,000001237796$
$1,4142135 < x < 1,4142136$	$1,99999982358225 < x^2 < 2,00000010642496$

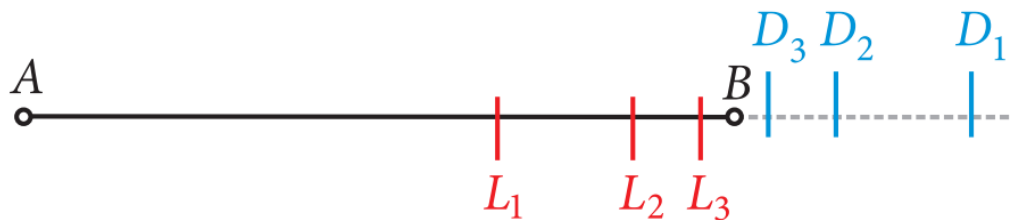
Мерење дужине

Ако је AB дуж чију дужину одређујемо преношењем јединичне дужи IJ и њених (десетих, стотих, хиљадитих...) делова, наступају два случаја:

1. **поступак се завршава** и одредили смо прецизно дужину дужи AB (мерни број је децималан број са коначно много децимала);
2. **поступак се не завршава** већ у сваком кораку мерења добијамо нове тачке (лево и десно од B), означимо их са $L_1, L_2, L_3, \dots$ и $D_1, D_2, D_3, \dots$ такве да је $L_1 - B - D_1$, $L_2 - B - D_2, L_3 - B - D_3, \dots$
У овом случају је и $AL_1 < AB < AD_1, AL_2 < AB < AD_2$ итд.



Мерење дужине

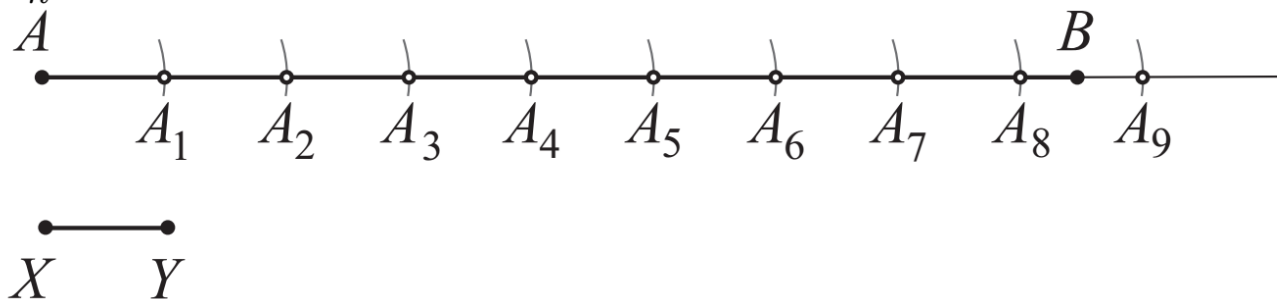


Резултат мерења које се не завршава?

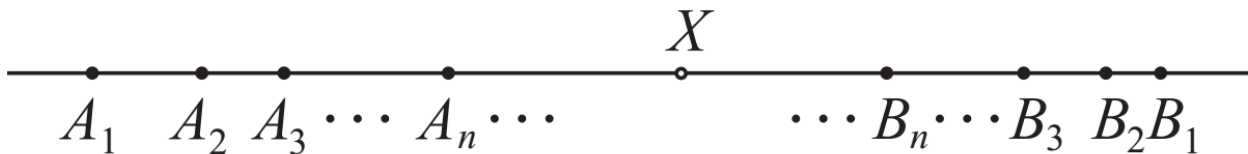
- Парови рационалних бројева $|AL_1|$ и $|AD_1|$, $|AL_2|$ и $|AD_2|$, $|AL_3|$ и $|AD_3|$, ... све се мање разликују, то јест разлике ових парова су све ближе нули.
- Једина заједничка тачка свих дужи L_1D_1 , L_2D_2 , L_3D_3 , ... (које добијамо током мерења) јесте тачка B . Грубо речено, ако замислимо да смо спровели бесконачно много корака, онда је B једина тачка која је „обухваћена” наведеним дужима.

Аксиоме непрекидности

Архимедова аксиома или **Архимед-Еудоксова аксиома**. Ако су AB и XY две произвољне дужи, тада на полуправој са теменом A која садржи тачку B постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ таквих да је $A_1 - A_2 - \dots - A_n$, при чему је свака од дужи $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ подударна дужи XY и $A - B - A_n$.



Канторова аксиома. Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ низ дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тог низа.



Аксиома комплетности

АРХИМЕДОВО СВОЈСТВО. Нека је x произвољан позитиван реалан број. Тада за сваки реалан број a постоји природан број n такав да је $a < nx$.

КАНТОРОВО СВОЈСТВО. Ако су $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, затворени интервали такви да је

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \cdots ,$$

тада постоји реалан број x који припада свим овим интервалима, односно $x \in [a_n, b_n]$, за сваки природан број n (тј. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$).

или еквивалентно

Ако је S непразан подскуп скупа реалних бројева такав да постоји реалан број од кога су мањи сви елементи скупа S , онда постоји и *најмањи* реалан број s такав да је $x \leq s$ за свако $x \in S$.

Комплетно уређено поље

Аксиоме комплетно уређеног поља заједно са аксиомом комплетности.

Ако је S непразан подскуп скупа реалних бројева такав да постоји реалан број од кога су мањи сви елементи скупа S , онда постоји и *најмањи* реалан број s такав да је $x \leq s$ за свако $x \in S$.

Идеја о аксиоматском приступу при дефиницији реалних бројева припада Хилберту. Овакав приступ је постао могућ тек након радова Дедекин-да, Кантора и Вајерштраса у којима су дати докази егзистенције комплетно уређеног поља и доказа да су свака два комплетно уређена поља изоморфна.

Дедекиндова конструкција

Како дефинисати бројеве којима се може изразити дужина сваке дужи?

XIX век: Дедекинд, Кантор, Вајерштрас

Подскуп α скупа $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је *Дедекиндов пресек*, ако су испуњени следећи услови:

- $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- за свако q из α , из $x \in \mathbb{Q}$ и $x < q$ следи $x \in \alpha$,
- у скупу α не постоји највећи елемент.

...

ДЕДЕКИНДОВА КОНСТРУКЦИЈА РЕАЛНИХ БРОЈЕВА. Историчари математике корене Дедекиндове конструкције¹ налазе у Еудоксовој теорији размера, коју је Еуклид изложио у петој књизи *Елементарна*.

Подскуп α скупа $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је *Дедекиндов пресек*, ако су испуњени следећи услови:

- $\alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}$,
- за свако q из α , из $x \in \mathbb{Q}$ и $x < q$ следи $x \in \alpha$,
- у скупу α не постоји највећи елемент.

Приметимо, најпре, да за сваки рационалан број q скуп $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, који ћемо овом приликом означавати са $\langle \leftarrow, q \rangle$, јесте један Дедекиндов пресек. Међутим, постоје и Дедекиндови пресеци који нису облика $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, $q \in \mathbb{Q}$; такав је, на пример, скуп $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$. Означимо са $\mathbb{R}_D$ скуп свих Дедекиндових пресека. Пресликавање $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_D$, дато са $f(q) = \langle \leftarrow, q \rangle$, $q \in \mathbb{Q}$, јесте 1–1, али није на.

Уређење скупа $\mathbb{R}_D$: $\alpha \preceq \beta$ акко $\alpha \subseteq \beta$; $\alpha \prec \beta$ акко $\alpha \preceq \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

ОСОБИНЕ. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_D$:

- (Ur) $\alpha \preceq \alpha$,
 (Ua) ако $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$, онда $\alpha = \beta$,
 (Ut) ако $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \gamma$, онда $\alpha \preceq \gamma$,
 (UI) $\alpha \preceq \beta$ или $\beta \preceq \alpha$.

Операција (сабирања) $\oplus$ у скупу $\mathbb{R}_D$: $\alpha \oplus \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in \alpha, b \in \beta\}$.

ОСОБИНЕ. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_D$:

- (S) $\alpha \oplus \beta \in \mathbb{R}_D$, (Sk) $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$,
 (Sa) $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$, (Sn) $\alpha \oplus \langle \leftarrow, 0 \rangle = \alpha$,
 (US) из $\alpha \preceq \beta$, следи $\alpha \oplus \gamma \preceq \beta \oplus \gamma$.

Инверз за $\oplus$: $\sim \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{-x \mid x \notin \alpha, x \text{ није најмањи елемент скупа } \mathbb{Q} \setminus \alpha\}$.

ОСОБИНЕ. За произвољан елемент α из $\mathbb{R}_D$:

- (Si0) $\sim \alpha \in \mathbb{R}_D$, (Si) $\alpha \oplus (\sim \alpha) = \langle \leftarrow, 0 \rangle$,
 (Si1) из $\alpha \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle$, следи $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \sim \alpha$, (Si2) $\sim (\sim \alpha) = \alpha$,
 (Si3) из $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \alpha$, следи $\sim \alpha \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle$.

¹Дедекинд је, према сопственом сведочењу, конструисао реалне бројеве за један дан (24. новембра 1858. године) тражећи начин да добро заснује курс Calculus-а на Циришкој политехничкој школи.

Операција (множења) $\odot$ у скупу $\mathbb{R}_D$: ако је $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \alpha$ и $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \beta$, онда је $\alpha \odot \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{a \cdot b \mid a \in \alpha, b \in \beta, 0 < a, 0 < b\}$, док је

$$\alpha \odot \beta = \begin{cases} \langle \leftarrow, 0 \rangle, & \alpha = \langle \leftarrow, 0 \rangle \text{ или } \beta = \langle \leftarrow, 0 \rangle, \\ (\sim \alpha) \odot (\sim \beta), & \alpha \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle, \beta \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle, \\ \sim ((\sim \alpha) \odot \beta), & \alpha \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle, \langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \beta, \\ \sim (\alpha \odot (\sim \beta)), & \beta \prec \langle \leftarrow, 0 \rangle, \langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \alpha. \end{cases}$$

ОСОБИНЕ. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_D$:

- (M) $\alpha \odot \beta \in \mathbb{R}_D$,
- (Mk) $\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha$,
- (Ma) $\alpha \odot (\beta \odot \gamma) = (\alpha \odot \beta) \odot \gamma$,
- (Mn) $\alpha \odot \langle \leftarrow, 1 \rangle = \alpha$,
- (SM) $(\alpha \oplus \beta) \odot \gamma = (\alpha \odot \gamma) \oplus (\beta \odot \gamma)$,
- (UM) из $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \alpha$ и $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \beta$, следи $\langle \leftarrow, 0 \rangle \prec \alpha \odot \beta$.

Како за све рационалне бројеве a и b важе једнакости:

$$\langle \leftarrow, a \rangle \oplus \langle \leftarrow, b \rangle = \langle \leftarrow, a+b \rangle, \sim \langle \leftarrow, a \rangle = \langle \leftarrow, -a \rangle, \langle \leftarrow, a \rangle \odot \langle \leftarrow, b \rangle = \langle \leftarrow, a \cdot b \rangle,$$

односно $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$, $f(-a) = \sim f(a)$, $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$, као и еквиваленција

$$\langle \leftarrow, a \rangle \preceq \langle \leftarrow, b \rangle \text{ акко } a \leq b, \text{ тј. } f(a) \preceq f(b) \text{ акко } a \leq b,$$

операције $\oplus$, $\sim$, $\odot$ и уређење $\preceq$ можемо сматрати редом проширењима операција $+$, $-$, $\cdot$ и уређења $\leq$ скупа $\mathbf{Q}$. Ова чињеница оправдава коришћење истих ознака $+$, $-$, $\cdot$ и $\leq$ за одговарајуће операције и уређење скупа $\mathbb{R}_D$. Природно се може проширити и парцијална операција инверза у односу на множење:

$$\langle \leftarrow, a \rangle^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \leftarrow, a^{-1} \rangle, \quad a \in \mathbf{Q},$$

а ако је $\alpha \neq \langle \leftarrow, a \rangle$ за свако $a \in \mathbf{Q}$, онда је

$$\alpha^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x^{-1} \mid x > 0, x \notin \alpha\}, \text{ у случају да је } \langle \leftarrow, 0 \rangle < \alpha$$

и $\alpha^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} -(-\alpha)^{-1}$ уколико је $\alpha < \langle \leftarrow, 0 \rangle$. Није тешко проверити:

(Mi) ако је $\alpha \neq \langle \leftarrow, 0 \rangle$, онда је $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \langle \leftarrow, 1 \rangle$.

Дакле, изграђена структура $\mathbf{R}_D = (\mathbb{R}_D, \leq, +, \cdot, \langle \leftarrow, 0 \rangle, \langle \leftarrow, 1 \rangle)$ је наследила све основне особине операција и уређења структуре рационалних бројева $\mathbf{Q} = (\mathbb{Q}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$. Испоштован је принцип перманенције, те се $\mathbf{R}_D$ може сматрати правим проширењем структуре $\mathbf{Q}$.

Дедекиндова конструкција је заправо изградња уређеног поља $\mathbf{R}_D$ које је право проширење уређеног поља $\mathbf{Q}$.

Попут принципа индукције у случају природних бројева, кључно својство у карактеризацији реалних бројева је својство *комплетности*.

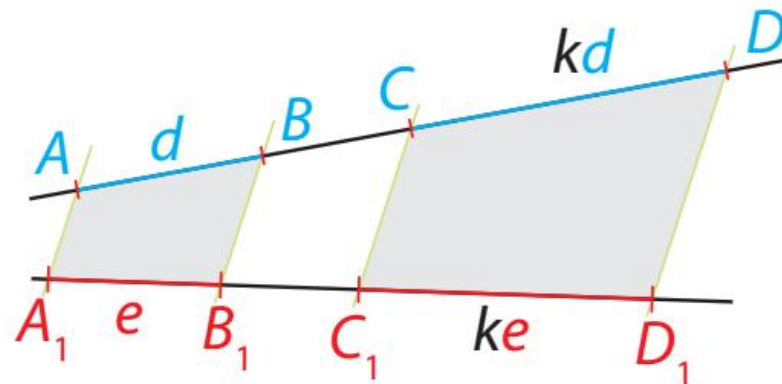
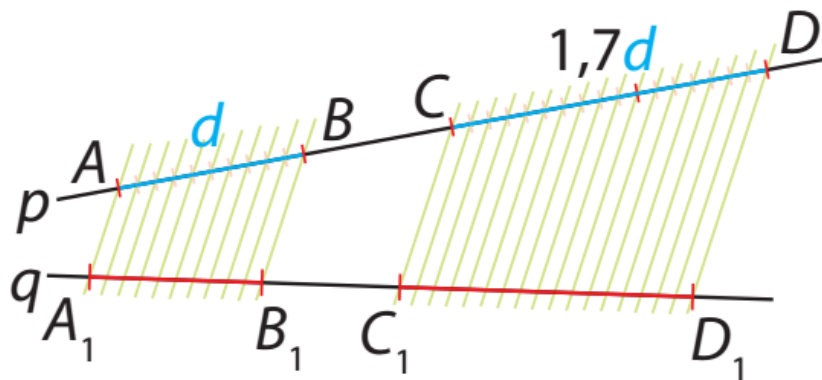
(Sup) Сваки одозго ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има супремум²!

Уређено поље $\mathbf{R}_D$ задовољава својство (Sup)!

Доказ. Нека је X произвољан одозго ограничен подскуп од $\mathbb{R}_D$. Није тешко доказати да је $\hat{\xi} = \bigcup_{\xi \in X} \xi$ Дедекиндов пресек, као и да је $\hat{\xi}$ горње ограничење скупа X . При том, за свако друго горње ограничење α скупа X , будући да је $\xi \leq \alpha$, $\xi \in X$, важи $\hat{\xi} \leq \alpha$, што значи $\hat{\xi} = \sup X$.

²Супремум скупа је најмање горње ограничење тог скупа.

Талесова теорема



Нека су A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 две четворке колинеарних тачака. Ако су дужи AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 на паралелним правама, онда је

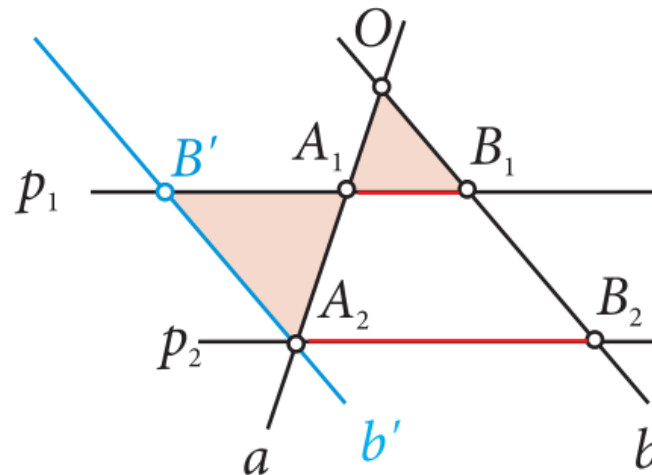
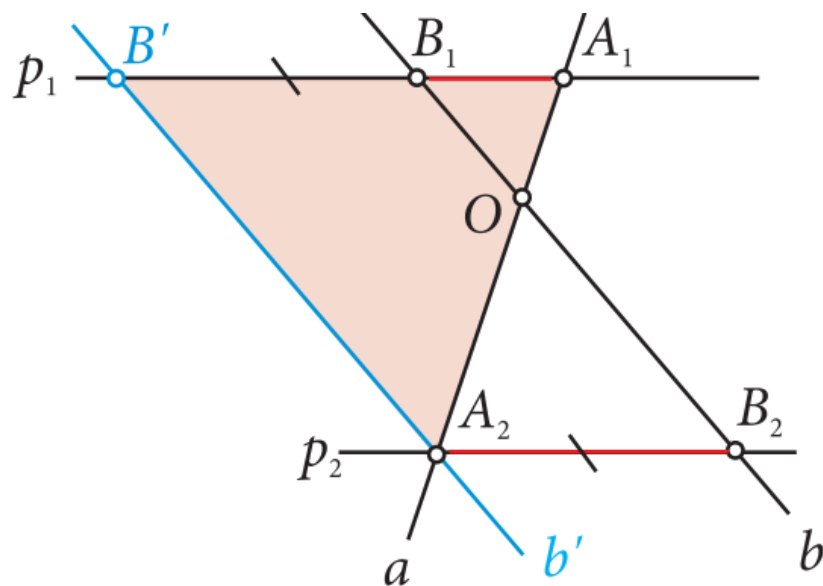
$$\frac{C_1D_1}{A_1B_1} = \frac{CD}{AB}.$$

Талесова теорема

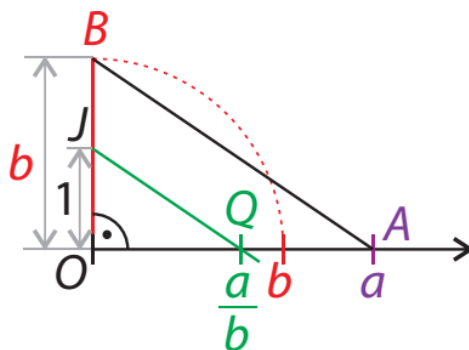
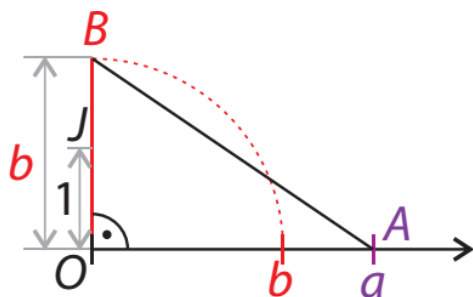
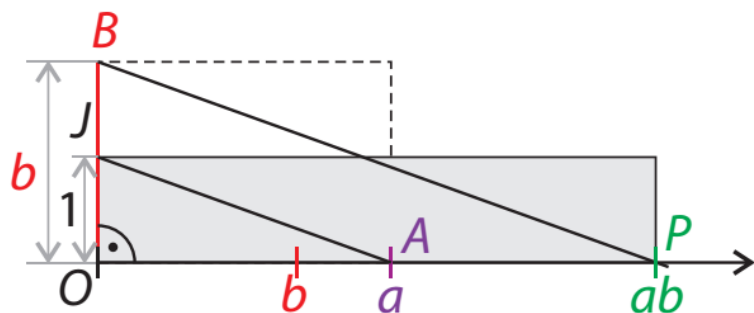
Праве a и b које се секу у тачки O секу и праве p_1 и p_2 : права a сече p_1 и p_2 у тачкама A_1 и A_2 , а права b сече p_1 и p_2 у B_1 и B_2 . Ако је $p_1 \parallel p_2$, онда је

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

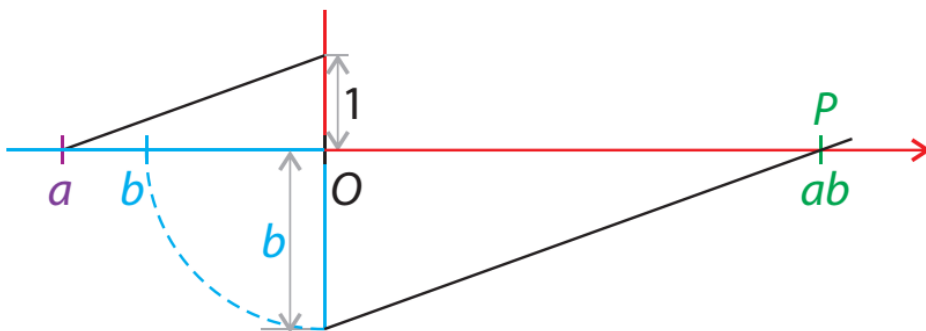
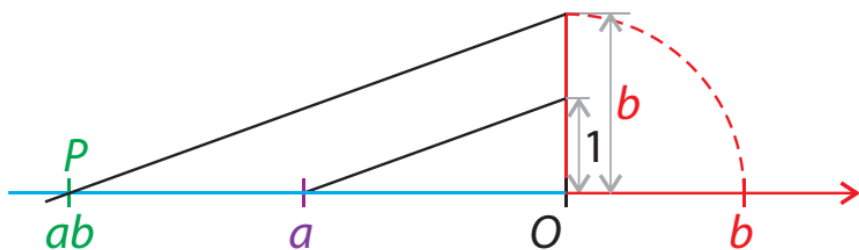
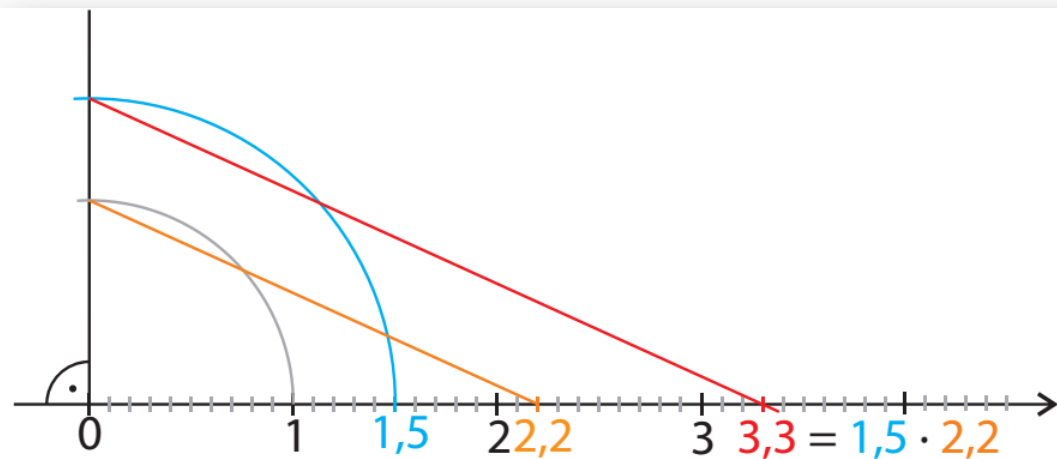
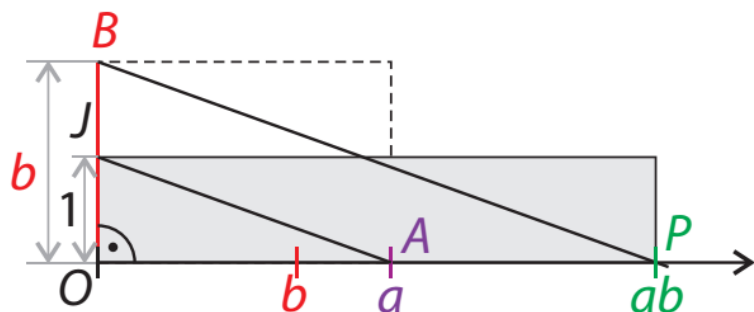
Доказ...



Рачунске операције са величинама



Рачунске операције са величинама



Квадратура правоугаоника

Задатак. Конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог правоугаоника.

