

Мишљење Аритметика Алгоритми

Методика наставе
математике
рачунарства

Преглед предавања

- Порекло и природа (математичког) мишљења
- Увод у аритметику: принцип рекурзије
- Познати алгоритми: принцип рекурзије

Природа људског мишљења

- Психологија као наука о мишљењу, учењу, памћењу ...

Кант: ... пре него што разумемо свет морамо разумети способности перцепције и процесе мишљења преко којих се он манифестује.

- Најзначајније особине мишљења:
 - Идеација (неактуелних, одсутних дражи)
 - Хипотетички ланци (ако ово, онда оно, ако би било ...)

Нивои апстракције

- **Први ниво апстракције** (нема апстракције; предмет наших мисли су материјални објекти доступни чулима)
- **Други ниво апстракције** (предмет наших мисли су материјални предмети који нису доступни чулима)
- **Трећи ниво апстракције** (имагинарни објекти са којима се људи никада нису сусрели; способност размишљања на 3. нивоу апстракције еквивалентна је језику)
- **Четврти ниво апстракције јесте математичко размишљање!**

Восонов тест

Замислите карте које с једне стране имају број, а са друге слово.



Карте су обележене на следећи начин: **ако** карта има самогласник са једне стране, **онда** је са друге стране паран број.

Питање: Које карте морате окренути да бисте се уверили да све четири карте задовољавају дато правило?

Ако ***, онда ●●●

ZADATAK 5. [Vosonov test]

E K 4 7

REŠENJE. s - samoglasnik; p - paran broj

s	p	$s \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

E: Ako $\top$, онда *** ?

K: Ako $\perp$, онда *** ✓

4: Ako $\dots$, онда $\top$ ✓

7: Ako $\dots$, онда $\perp$?

Восонов тест

*Ако је особа малолетна, не сме да конзумира
алкохолна пића.*

ОСОБА 1	ОСОБА 2	ОСОБА 3	ОСОБА 4
Годиште?	Годиште?	Малолетна	Пунолетна
Пиво	Сок	Пиће?	Пиће?

Питање: Чије годиште и/или пиће треба да
проверите да бисте били сигурни да особе испод
18 година не пију алкохолна пића?

Хипотетички ланац (1)

ПРИМЕР . Миле размишља коју девојку да позове.

(1) Ако позовем Ану, нећу звати Бојану.

(2) Ако не позовем Бојану, нећу звати ни Весну.

(3) Ако не позовем Гоцу, зваћу Весну.

(4) Ако позовем Гоцу, зваћу и Драгану.

(5) Ако позовем Драгану, нећу звати Ему.

Напослетку, позвао је Ему. Да ли ће Миле, у складу са својим размишљањем позвати Ану?

Хипотетички ланац (2)

1. Реши следећи тест, ако знаш да је за свако питање само један одговор исправан.

1. Одговор на питање број 2 је:

А) Б Б) А В) Г Г) В

2. Одговор на питање број 3 је:

А) В Б) Г В) Б Г) А

3. Одговор на питање број 4 је:

А) Г Б) А В) В Г) Б

4. Одговор на питање број 1 је:

А) Г Б) В В) А Г) Б



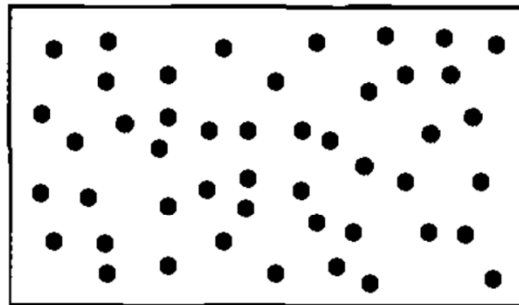
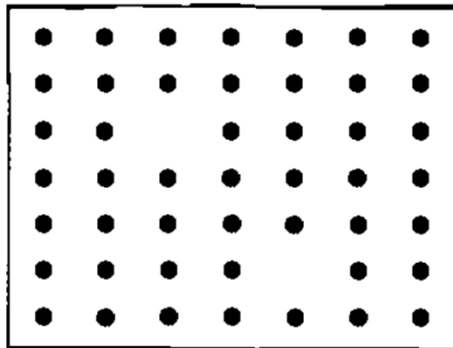
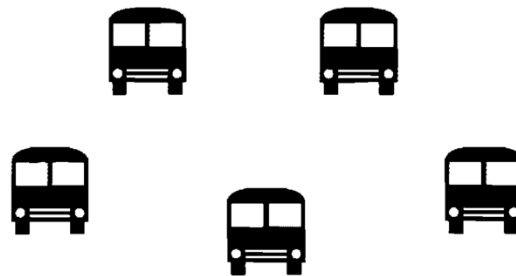
Број и бројање

Када аритметику називам само једним делом логике, тиме већ исказујем да појам броја сматрам сасвим независним од представа или интуиција простора и времена, да га, напротив сматрам непосредним производом чистих закона мишљења.

Цитат из књиге
Дедекиннд Was sind und was sollen die Zahlen, 1888

Број и бројање

[Timoty Gowers, Mathematics, A Very Short Introduction, Oxford University Press]





Бројање

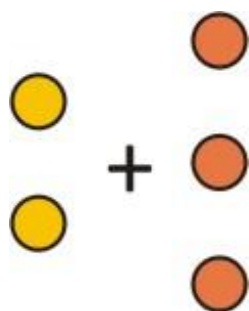
Најпримитивнији начин бележења резултата бројања сеже до самих зачетака људске цивилизације. **Рецка-систем** (савременим језиком): записи резултата бројања настају тако што полазећи од 0 (почетног резултата који претходи бројању) узастопно дописујемо (једну по једну) цртицу:

$0, 0', 0'', 0''', 0'''', 0''''', \dots$

$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Бројање, сабирање, множење...

Аритметика бројева (медењака и облутака)



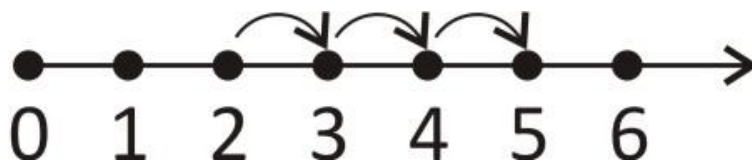
[Фрегеова критика Џона Стјуарта Мила]

$$2 + 3 = 5$$

Аритметика бројања

$$m + 0 = m$$

$$m + n' = (m + n)'$$



Задатак. Израчунајмо $2 + 3$.

Бројање, сабирање, множење...

Сабирање: $m + 0 = m$

$$m + n' = (m + n)'$$

Задатак. Израчунајмо $2 + 3$.

Теорема.

- $(k + m) + n = k + (m + n)$
- $0 + m = m$
- $m' + n = (m + n)'$
- $m + n = n + m$

Бројање, сабирање, множење...

Множење: $m \cdot 0 = 0$

$$m \cdot n' = (m \cdot n) + m$$

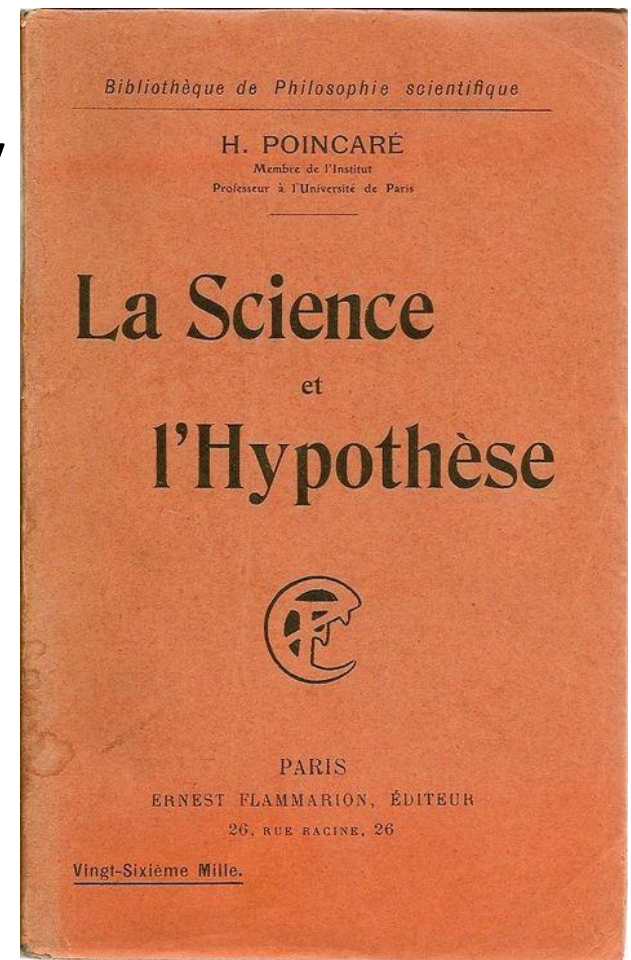
Задатак. Израчунајмо $2 \cdot 3$.

Теорема.

- $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$
- $m \cdot n = n \cdot m$
- $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$

Бројање, сабирање, множење...

Поенкаре: Наведени докази
аритметичких тврђења илуструју
математичко резоновање *par
excellence*, и морамо га ближе
проучити.



Рекурзивно размишљање

- Прича о подвигу младог Гауса

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

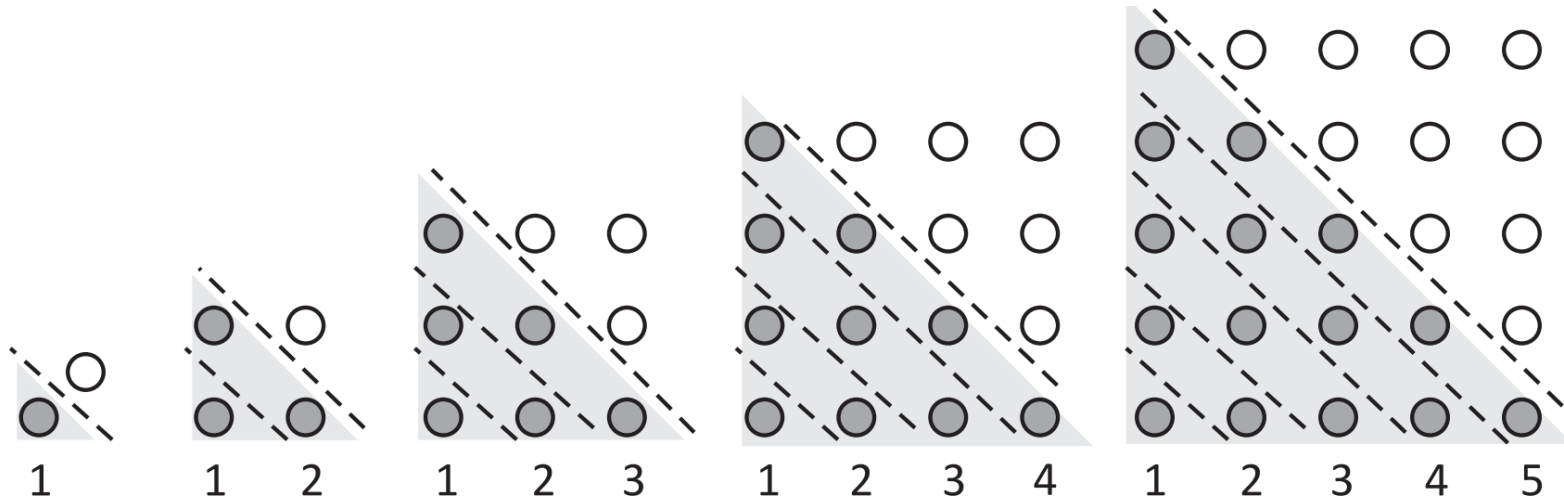
- Уопште

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

θεώρηιν, θεώρημα!

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

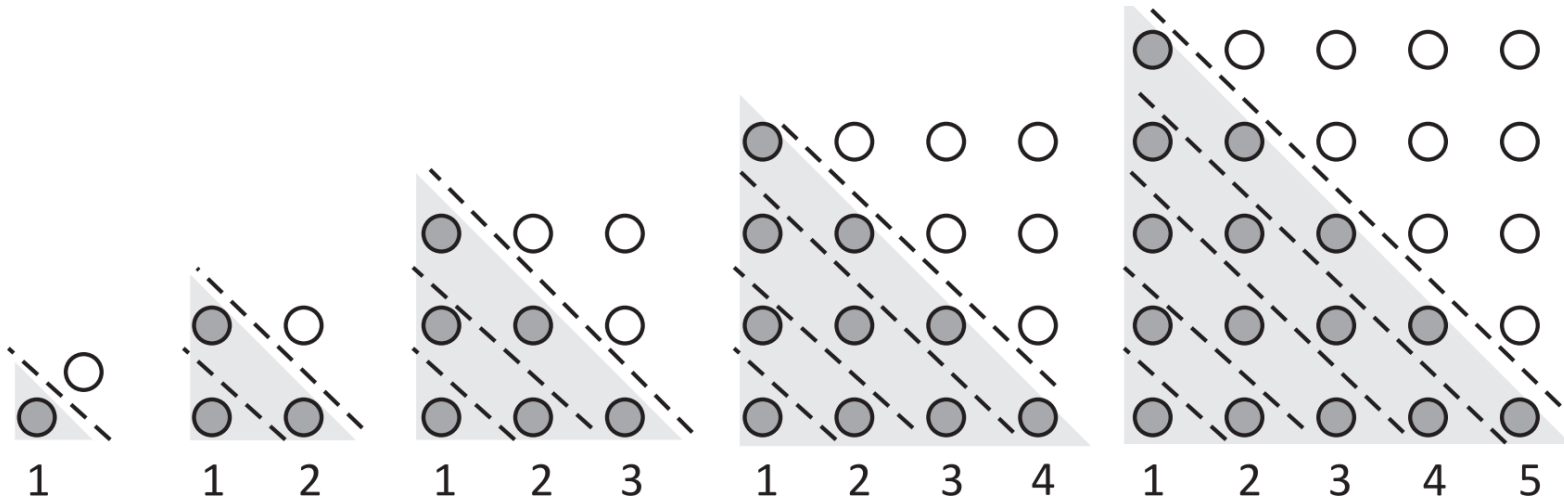


Посматрајући слике попут претходне, јасно се уочава:

- када на n -ти троугаони број додамо $n + 1$ добијамо $(n + 1)$ -и троугаони број;
- први троугаони број је 1, па је n -ти троугаони број једнак збиру првих n природних бројева

θεώρημα, θεώρημα!

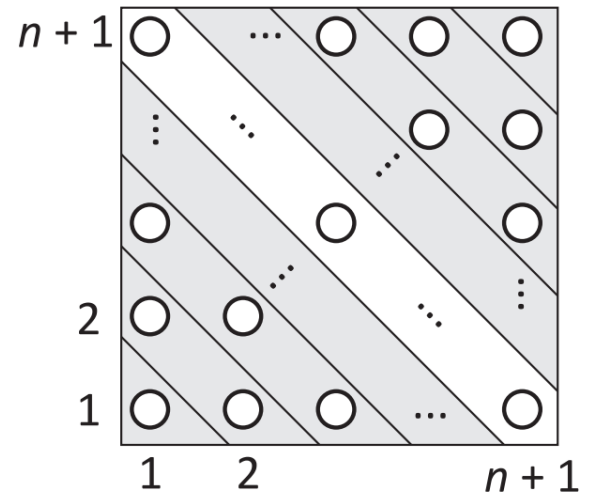
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$



$$S_n + (n + 1) + S_n = (n + 1)^2,$$

Tj.

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

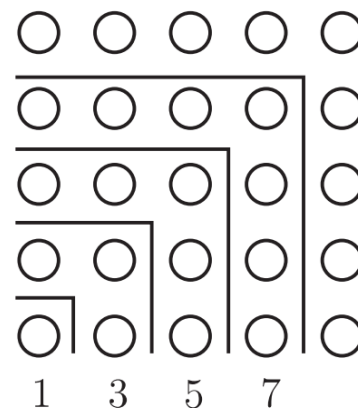


Θεώρηιν, Θεώρημα!

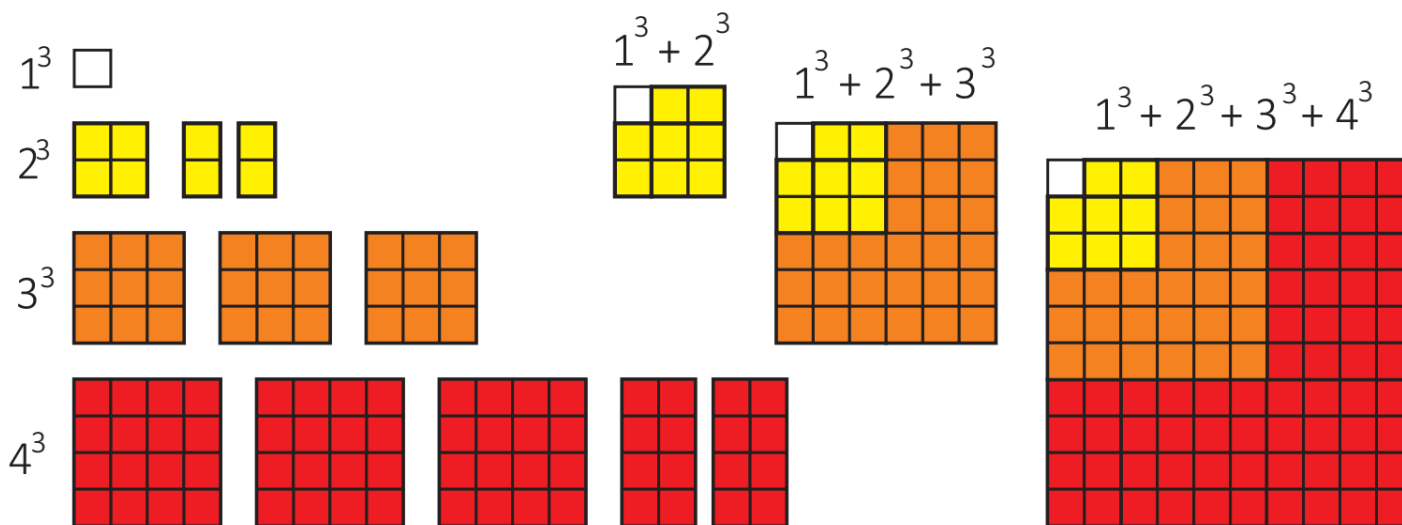
Задатак 1. Збир првих n непарних бројева је квадратни број:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Објаснити, сопственим речима, што прецизније зашто наведена једнакост важи за сваки природни број n .



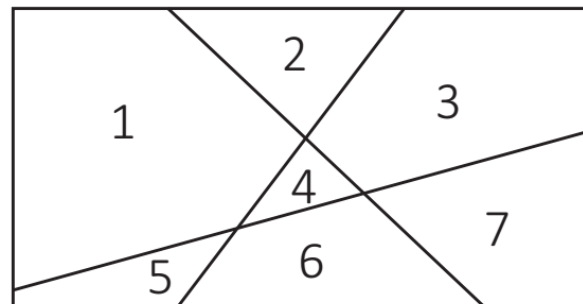
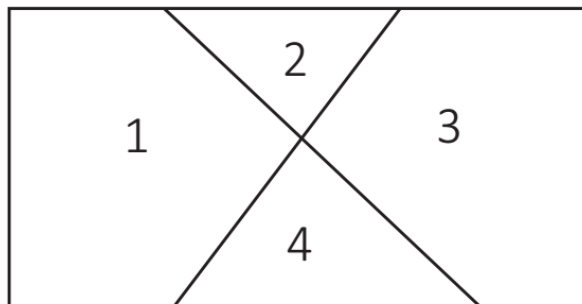
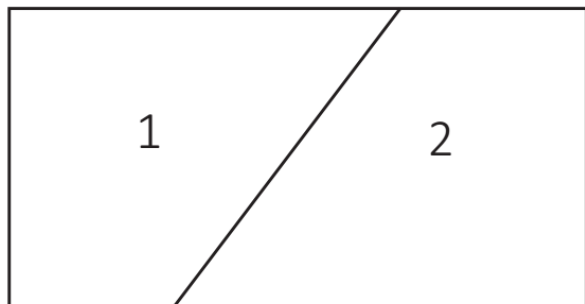
Задатак 2. Чему је једнак збир првих n кубова: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = ?$



Бројање *par excellence*

У равни је конструисано n правих тако да никоје две нису паралелне, нити се неке три секу у једној тачки. На колико области је подељена равна конструисаним правама?

Нека је A_n број области на које n конструисаних правих деле равна. Није тешко уочити да је: $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = 7$, ...

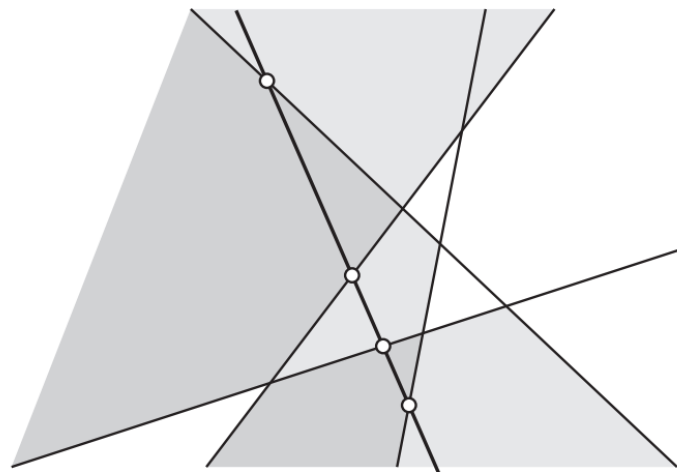


Бројање *par excellence*

У равни је конструисано n правих тако да никоје две нису паралелне, нити се неке три секу у једној тачки. На колико области је подељена равна конструисаним правима?

Изводимо неколико општих закључака:

- Ако је нацртано n правих, нова права (конструисана тако да буду испуњени услови задатка) сече датих n правих у n тачака.
- Нова права је овим тачкама подељена на $n + 1$ делова и сваки од тих делова се налази у једној од области на које n правих деле равна.
- Свака од тих $n + 1$ области новом правом је подељена на две области.

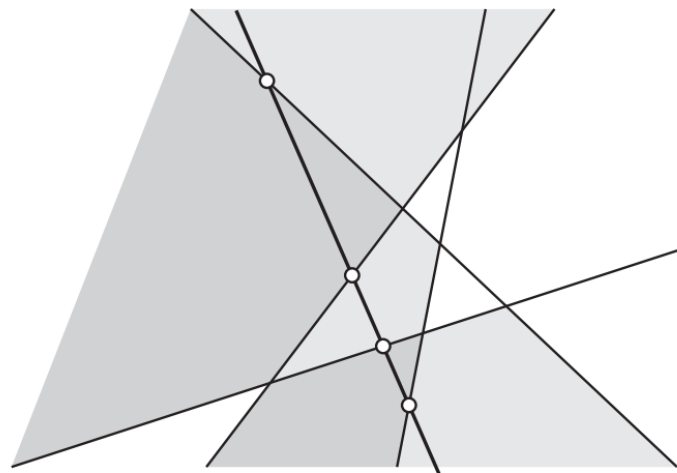


Бројање *par excellence*

У равни је конструисано n правих тако да никоје две нису паралелне, нити се неке три секу у једној тачки. На колико области је подељена равна конструисаним правима?

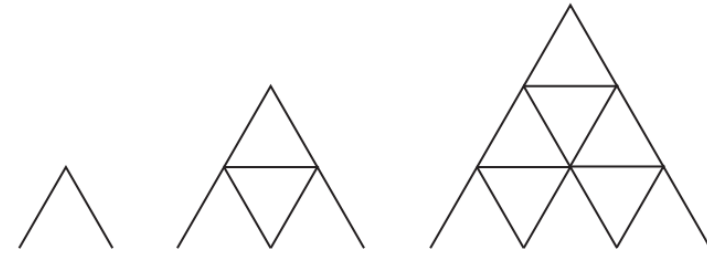
Дакле, ако је нацртано n правих, цртањем нове праве број области се повећава за $n + 1$: $A_{n+1} = A_n + (n + 1)$.

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + n \\ &= A_{n-2} + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= A_1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ &= A_0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ &= 1 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \end{aligned}$$



Бројање *par excellence*

Задатак За једноспратну кулу од карата потребне су две карте, за двоспратну кулу је потребно седам карата, за троспратну је потребно 15 карата итд. Колико карата је потребно за кулу од 100 спратова?



Мишљење и говор

- **Људски језик** је такође сасвим изузетна појава без праве аналогije другде у живом свету.
- **Мишљење и говор** су суштински повезани процеси који се не могу посматрати одвојено (засебно) и независно.

[Лав Виготски, Мишљење и говор, Нолит, 1977]

- У развоју детета граматика претходи логици.

Мишљење и говор

- **Људски језик** је такође сасвим изузетна појава без праве аналогije другде у живом свету.
- **Мишљење и говор** су суштински повезани процеси који се не могу посматрати одвојено (засебно) и независно.

[Лав Виготски, Мишљење и говор, Нолит, 1977]

- У развоју детета граматика претходи логици. Говорне структуре које дете савлада постају основне структуре његовог мишљења.

Мишљење и говор

Пијаже је убедљиво доказао да граматички развитак детета претходи његовом логичком развитуку.

Савлађивање граматичких структура и облика претходи савлађивању логичких структура и операција које одговарају датим облицима. Дете савлађује зависну реченицу и говорне облике „зато што“, „јер“, „ако би“, „напротив, али“ много пре но што савлада узрочне, временске, условне односе, супротстављања итд. Синтакса говора претходи синтакси мисли.

Штавише, дете сразмерно касно савлађује логичке операције које одговарају граматичким структурама које је већ одавно савладало.

Жан Пијаже (1896-1980)



- Експериментална психологија (прецепција и интелигениција)
- Социјална психологија (социјализација детета)

(Студирао је психологију у Швајцарској, а затим и на Сорбони код Бинеа и Симона – познатих твораца првог теста за испитивање менталне доби детета. Симон му је поверио да покуша стандардизовати Буртов тест расуђивања. Сама употреба теста га није толико одушевила колико **разговор са децом и уочавање да њихови одговори варирају са узрастом, и да су нарочито значајни по садржају управо нетачни одговори**. Заинтересовао се за узроке ових нетачних одговора те је водио разговоре са децом о неком питању све док не би уочио јасне границе у којима се креће расуђивање деце. На овај начин Пијаже је створио познату методу **клиничког разговора**, која је остала везана за његово име.)

Жан Пијаже (1896-1980)

Први радови (1921-1925)

- **Говор и мисао детета** [доноси Пијажеу светску славу]
- Суд и расуђивање детета
- Помање света код деце
- Физички каузалитет код деце
- Морално расуђивње код деце

Жан Пијаже (1896-1980)

У даљем периоду посветио се изучавању порекла **логичких и математичких односа**, као и односа између **перцепције и интелигенције**. О пореклу **логичких и математичких односа** писао је у следећим радовима:

- Конструкција стварности код детета 1937
- Генеza броја код детета 1939
- Развој квантитета код детета 1941
- Класе, релације и бројеви 1942

Пијажеова теорија

Пијаже разликује четири периода у развоју интелигенције:

- Сензомоторичка интелигенција
[од рођења до 18-24. месеца]
- Период припреме (препарациони стадијум)
[2-6. године]
- Организације конкретних операција
[6-12. године]
- Период формалних операција [12-16. године]

Мишљење и говор

Готлоб Фреге, *Појмовно писмо* [Begriffsschrift],
формални језик за чисто мишљење, по узору на
језик аритметике, 1879. године.

Begriffsschrift претеча свих програмских језика.

Ноам Чомски: *Синтаксичке структуре* (1957), *Језик*
и ум (1972) ...

Мишљење и говор

Суштину свих језика чине генеративна правила:

- 1) Језик је стваралачки. Сви људи који језик употребљавају на уобичајени начин способни су да производе и разумеју неограничен број реченица које раније нису изrekli нити чули.
- 2) Темељна структура језика је универзална. Језичко стваралаштво је потчиљено правилима која су мање-више својствена свим језицима. Ова заједничка правила чине тзв. универзалну граматику која можда може да пружи дубљи увид у општа својства људске интелигенције.
- 3) Универзалност је последица суштинског устројства људског ума јер је језик човеку урођен.
- 4) Језик је изразито апстрактне природе. Познато је да реченица састављена на основу једне семантичке идеје може добити невероватан број нових значења. Људски мозак је способан и да додели значење реченицама које су синтаксно коректне.

Генеративна граматика (1)

Граматика израза над $\{x, +, \times, (,)\}$

$$\text{Izraz} \rightarrow \text{Izraz} + T \mid T$$

$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (\text{Izraz}) \mid x$$

Наведена три правила описују поступак формирања израза. Коначан низ симбола над $\{x, +, \times, (,)\}$ јесте израз ако се полазећи од Izraz применом датих правила може извести тај низ.

Генеративна граматика (1)

Граматика израза над $\{x, +, \times, (,)\}$

$$\text{Izraz} \rightarrow \text{Izraz} + T \mid T$$

$$T \rightarrow T \times F \mid F$$

$$F \rightarrow (\text{Izraz}) \mid x$$

$$\begin{aligned} \text{Izraz} &\rightarrow \text{Izraz} + T \rightarrow \text{Izraz} + T \times F \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Izraz} + F \times F \rightarrow T + F \times F \rightarrow F + F \times F \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \rightarrow x + x \times x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Izraz} &\rightarrow T \rightarrow T \times F \rightarrow F \times F \rightarrow (\text{Izraz}) \times F \rightarrow \\ &\rightarrow (\text{Izraz} + T) \times F \rightarrow \dots \rightarrow (x + x) \times x \end{aligned}$$

Генеративна граматика (2)

NACLO – North American Computational Linguistics Olympiad

Ево једног фрагмента Енглеске граматике:

- (1) Sentence $\rightarrow$ NounPhrase + Verb + NounPhrase
- (2) NounPhrase $\rightarrow$ Noun
- (3) NounPhrase $\rightarrow$ Adjective + NounPhrase
- (4) Noun $\rightarrow$ people
- (5) Verb $\rightarrow$ love
- (6) Adjective $\rightarrow$ good
- (7) Adjective $\rightarrow$ charming
- (8) Adjective $\rightarrow$ happy
- (9) Adjective $\rightarrow$ bad
- (10) Adjective $\rightarrow$ obnoxious
- (11) Adjective $\rightarrow$ unhappy

Генеративна граматика (2)

NACLO – North American Computational Linguistics Olympiad

Ево једног фрагмента Енглеске граматике:

- (1) Sentence $\rightarrow$ NounPhrase + Verb + NounPhrase
- (2) NounPhrase $\rightarrow$ Noun
- (3) NounPhrase $\rightarrow$ Adjective + NounPhrase
- (4) Noun $\rightarrow$ people
- (5) Verb $\rightarrow$ love
- (6) Adjective $\rightarrow$ good
- (7) Adjective $\rightarrow$ charming
- (8) Adjective $\rightarrow$ happy
- (9) Adjective $\rightarrow$ bad
- (10) Adjective $\rightarrow$ obnoxious
- (11) Adjective $\rightarrow$ unhappy

Применом ових правила, коректно је формирана реченица:

happy people love charming bad people

Генеративна граматика (2)

Према принципу 'супротности се привлаче', *тачним* се сматрају реченице:

- good people love bad people
- good happy people love obnoxious people
- happy charming people love unhappy obnoxious bad unhappy unhappy people
- bad people love good people
- obnoxious people love good happy people
- unhappy obnoxious bad unhappy unhappy people love happy charming people

Али, *лажне* су следеће реченице:

- good people love good people
- obnoxious people love bad unhappy people
- people love good people

Саставити по узору на дати фрагмент граматике, правила за састављање само *тачних* реченица TrueSentence. Такође, у *тачним* реченицама се могу спомињати charming bad people или unhappy good people.

Генеративна граматика (3)

OXFORD UNIVERSITY – Maths Admissions Test

Задатак Песме класичног периода на Марсу састављене су од само две ноте, означене x и y , у складу са следећим ригорозним правилима:

- I Низ који не садржи ниједну ноту сматра се песмом (која се назива *тишина* и која је вероватно најпријатнија за слушање).
- II Песма је и низ који започиње нотом x , затим се два пута понови иста постојећа песма и заврши се нотом y . (Другим речима, ако је W нека песма, онда је и $xWWy$ такође песма.)
- III Песма је и низ нота добијен тако што се у некој постојећој песми свака нота x замени нотом y , а свака нота y нотом x .

Све песме су написане применом претходних правила.

Генеративна граматика (3)

(i) Написати четири песме дужине шест (тј. песме које су сачињене од тачно 6 нота).

(ii) Колико има песама дужине 8? Колико има песама дужине 14?

(iii) За које природне бројеве n постоје песме дужине n ?

Упутство: Постоје песме дужине 0; ако постоје песме дужине m , онда постоје и песме дужине $2m + 2$.

(iv) Претпоставимо да постоји тачно k песама дужине m . Колико онда има песама дужине $2m + 2$?

(v) Колико има песама дужине $2^{n+1} - 2$, при чему је $n \geq 0$?

<https://scratch.mit.edu/>



Create stories, games, and animations
Share with others around the world



A creative learning community with **39,302,895** projects shared

[ABOUT SCRATCH](#) | [FOR EDUCATORS](#) | [FOR PARENTS](#)

Featured Projects



Методика наставе математике и
рачунарства

Аритметика

- Пеанова аритметика
- Теорема рекурзије
- Теорема о остатку
- Теорема о бројевној бази