

Образовање Еуклидови Елементи GeoGebra

Методика наставе
математике
рачунарства

Преглед предавања

- Савремени образовни системи
- Еуклидска геометрија
- Геометријски софтвери

Формирање образовног система у Србији

Hatišerif: "Srbi imaće vlast postavljati u zemlji svoje pečatnje knjiga, bolnice za svoje bolesnike i škole radi vospitanija djece svoje."

Licej Knjažestva serbskog

Velika škola

Zakon o osnovnim školama.

SKA

"Planirana elita"

Berlinski kongres

Крај XIX века је време конституисања савремених образовних система у читавој Европи.

Реформе с почетка XX века

Немачка

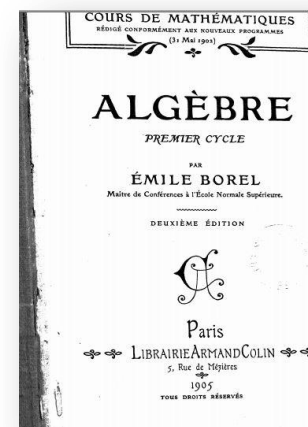
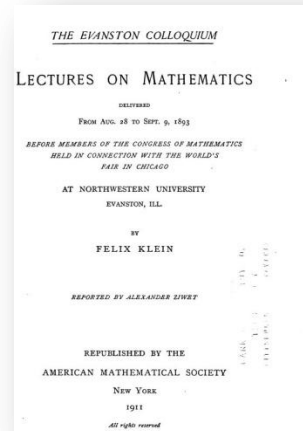
- Клајн, Елементарна математика ... , 1908
- Антички идеали образовања и васпитања...

Француска

- серија Борелових уџбеника (1902 – 1905)
- секуларно, модерно на супрот традицији ...

Британија и САД

- “Перизам” (Џон Пери)
- корист (а не строгост), искуство (а не апстракције),
- ...



Реформе с почетка XX века

Немачка

- Еуклидови Елементи нису више једини уџбеник геометрије.

Француска

- Еуклидови Елементи су потпуно застарео уџбеник геометрије.

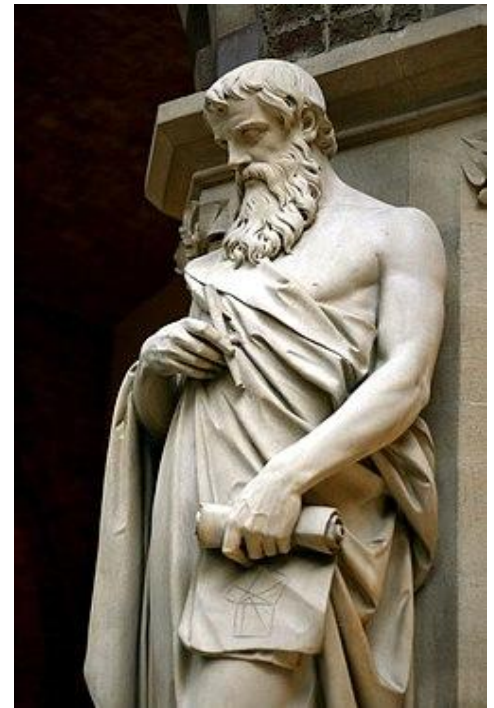
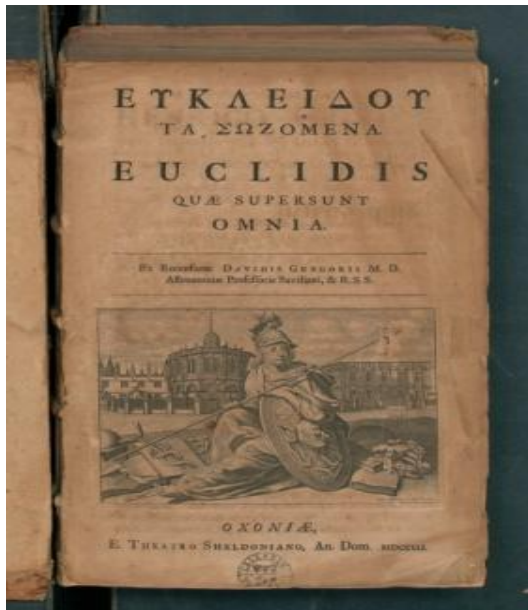
Британија и САД

- Еуклидови Елементи су сувише апстрактан уџбеник геометрије.

Еуклидови Елементи

Расел: ... несумљиво једна од највећих књига која је икада написана и један од најсавршенијих споменика људског ума.

Euclidis quae supersunt omnia (1704)



Статуа у част Еуклида у музеју природне историје Оксфордског универзитета.

<http://poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/>

Две важне чињенице савременог образовања

Математика је важан део образовања

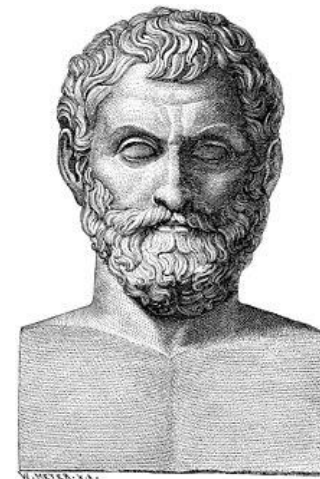
На улазу у Платонову Академију стајао је натпис:
Нека не улази онај ко не зна геометрију.

Математика није лака

Птоломеј I, владар старог Египта, геометрију је учио од самог Еуклида. Обесхрабрен тешкоћама, питао је Еуклида да ли постоји неки лакши начин да се научи геометрија. Еуклид је одговорио да не постоји краљевски пут у геометрију.

Прва геометријска знања

Талес из Милета је донео из Египта прва геометријска знања, али је и сам многе теореме открио и преносио их својим ученицима.



θεώρητα, θεώρημα!

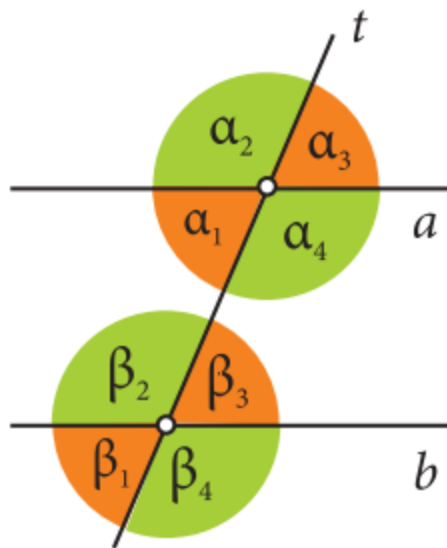
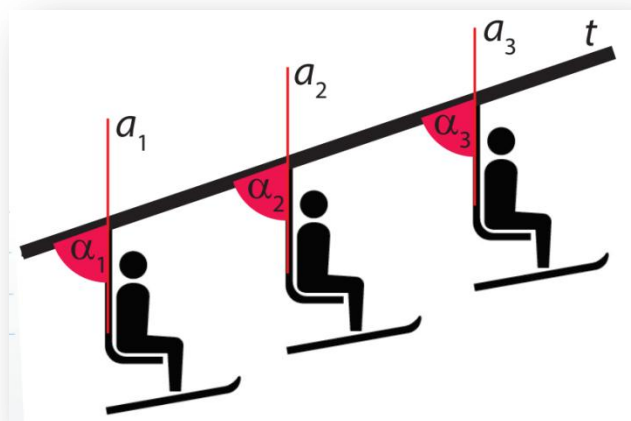
- Унакрсни углови су једнаки.
- На основици једнакокраког троугла углови су једнаки.
- Троуглови су подударни ако су страница и на њој налегли углови једног од њих подударни страници и налеглим угловима другог.
- Угао над пречником је прав.

...

θεώρηιν, θεώρημα! Гле', теорема!

Почетна настава геометрије углавном је заснована на визуелном уочавању и сугестивним објашњењима ...

Теорема о угловима на трансверзали



$$\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong \beta_1 \cong \beta_3$$

$$\alpha_2 \cong \alpha_4 \cong \beta_2 \cong \beta_4$$

Θεώρητιν, Θεώρημα! Гле', теорема!

Теорема о угловима на трансверзали

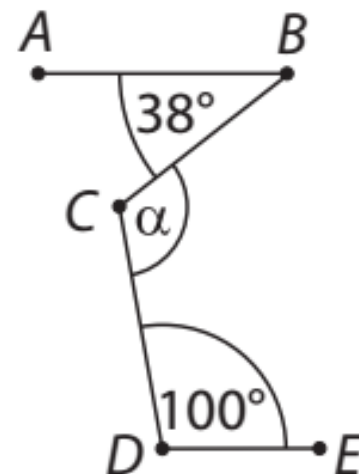
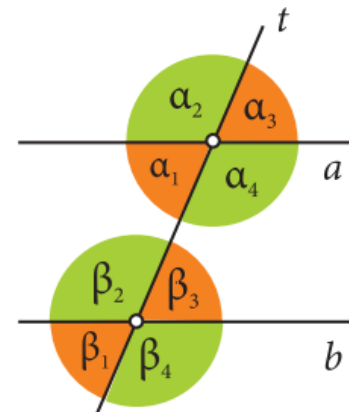
Проблеми око прецизне формулације:

сагласни, наизменични, супротни углови ...

Проблеми са доказом ...

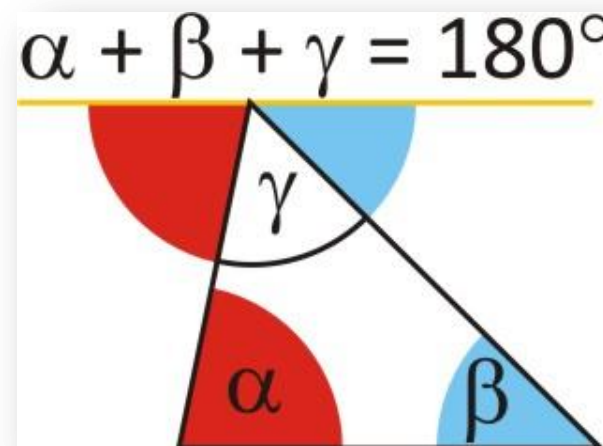
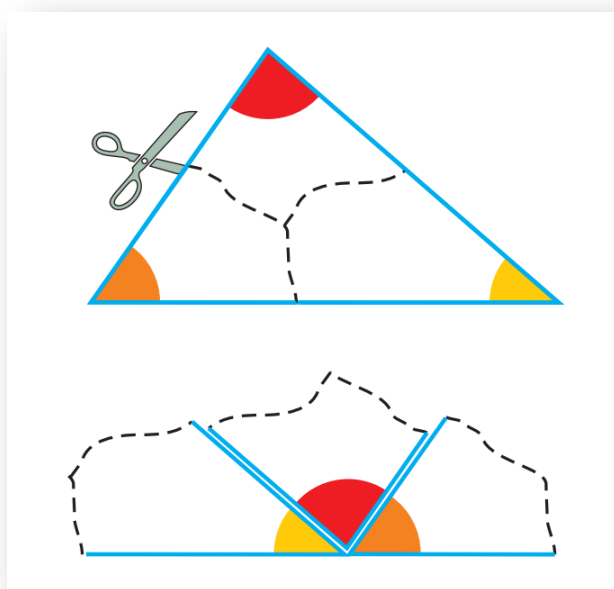
Задаци

1. Дата је права p и тачка A која јој не припада. Конструисати праву a која садржи A и са p заклапа угао од 45° .
2. Одреди величину угла α .



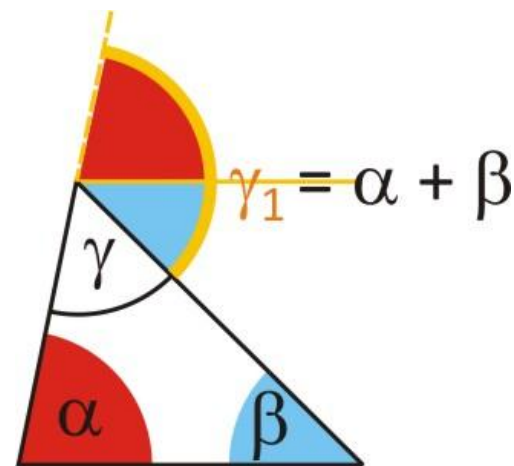
Гле' теорема. Доказ.

- Збир углова било ког троугла једнак је 180° .



(Гле') Теорема. Доказ.

- Спољашњи угао троугла једнак је збиру несуседних унутрашњих углова.



- Теорема о угловима на трансверзали и њен обрат.

Из $a \parallel b$ следи

$\alpha + \beta = 180^\circ$

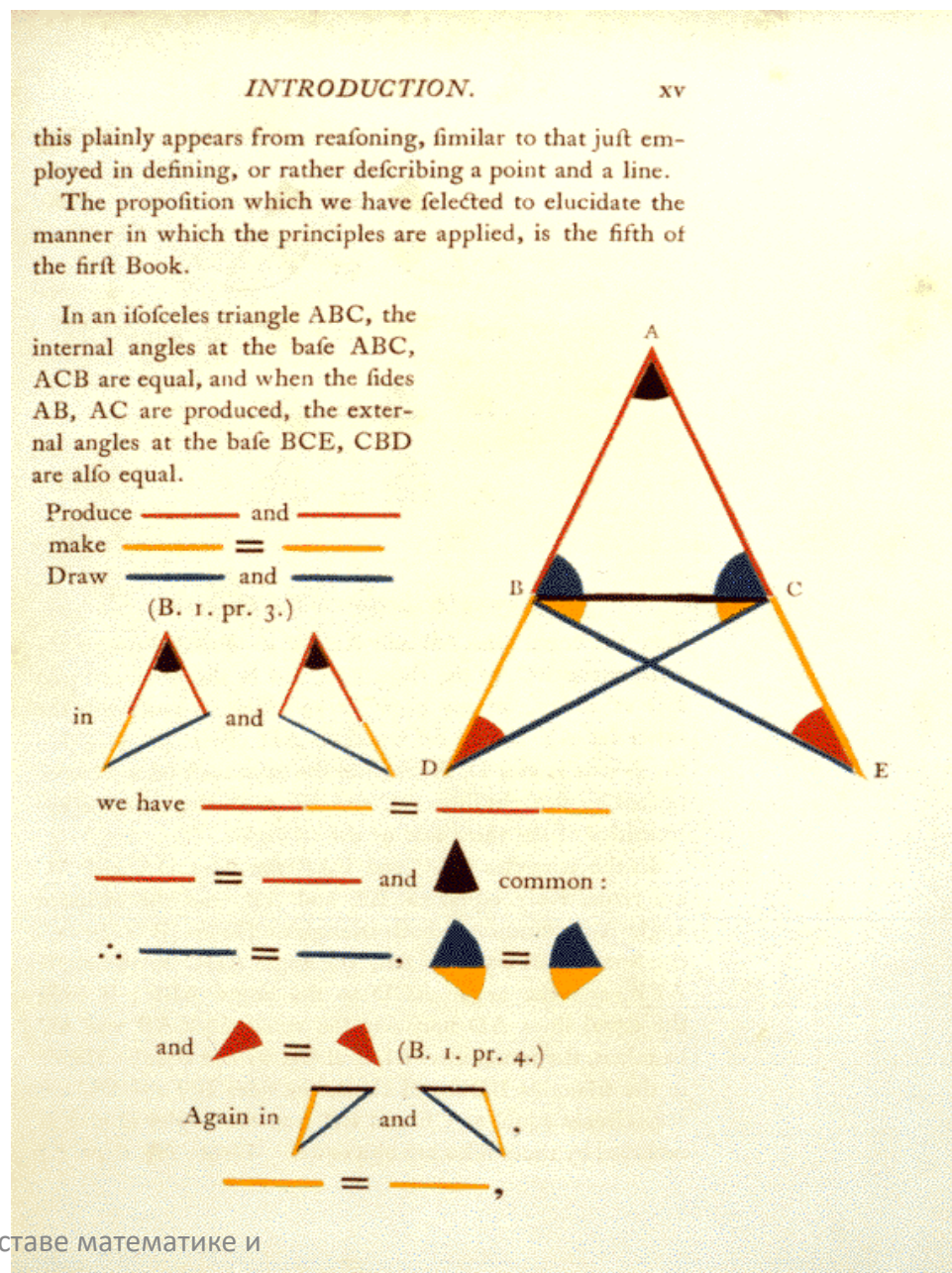
Из $\alpha + \beta = 180^\circ$ следи

Pons asinorum

- Углови на основици једнакокраког троугла су једнаки.

или

- Наспрам једнаких страница у троуглу налазе се једнаки углови.



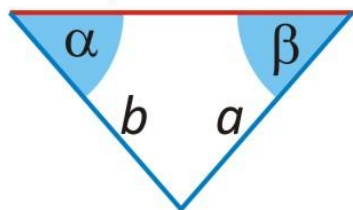
Pons asinorum

Доказати:

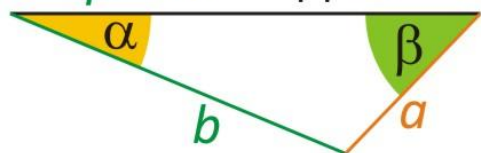
1)



2) Из $\alpha = \beta$ следи $a = b$.

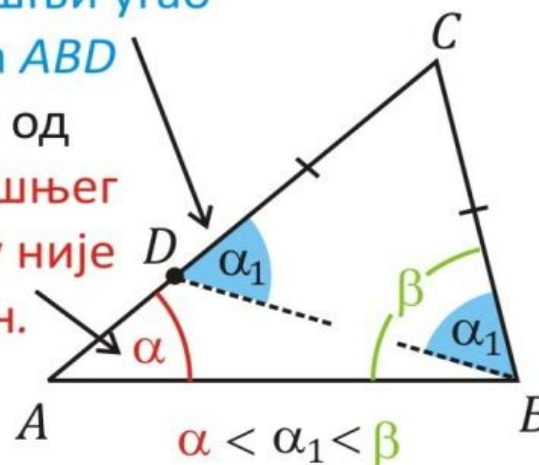


3) Из $\beta > \alpha$ следи $b > a$.

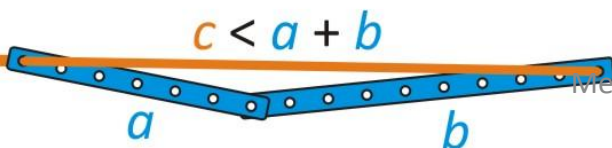


Спољашњи угао
троугла ABD

већи је од
унутрашњег
који му није
суседан.



4)



Основе геометрије

на вишим нивоима школовања

XIX век: преиспитивање Елемената

1872/1973. Дедекинд и Кантор развијају учење о *непрекидности*

1882. Паш, *Предавања из новије геометрије* уводе аксиоме поретка

1889. Пеано пише *Начела геометрије* и уводи кретање у основне појмове геометрије

1899. Хилберт пише *Основе геометрије*

1960. Борсук, Шмиелева, *Основе геометрије*

Хилбертове *Основе геометрије*

Осмо немачко издање Хилбертових *Основа геометрије* на српски језик је превео Ж. Гарашанин и превод је објављен 1957. године.

<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zlucic/Hilbert.pdf>

Sledeće istraživanje predstavlja nov pokušaj da se u geometriji postavi potpun i što prostiji sistem aksioma i da se iz ovih aksioma izvedu najvažniji geometrijski stavovi tako da se jasno vidi kako značaj različitih grupa aksioma tako i domašaj posledica koje slede iz pojedinih aksioma.

Хилбертове *Основе геометрије*

Хилбертов рад значајно је утицао и на научне и на наставне расправе о основама геометрије.

Definicija. Mi zamišljamo tri različita sistema stvari: stvari prvog sistema nazivamo tačkama i označavamo ih sa $A, B, C, \dots$; stvari drugog sistema nazivamo pravima i označavamo ih sa $a, b, c, \dots$; stvari trećeg sistema nazivamo ravnima i označavamo ih sa $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; tačke se nazivaju i elementima linearne geometrije, tačke i prave se nazivaju elementima ravne geometrije, a tačke, prave i ravni nazivaju se elementima prostorne geometrije ili elementima prostora.

Mi zamišljamo tačke, prave i ravni u izvesnim međusobnim odnosima i označavamo ove odnose rečima „ležati“, „između“, „podudarno“, „paralelno“, „neprekidno“; tačan i za matematičke svrhe potpun opis ovih odnosa postiže se pomoću aksioma geometrije.

Основе геометрије

1899. Хилберт пише *Основе геометрије*

1960. Борсук, Шмиелева, *Основе геометрије*

...

Д. Лопандић, *Геометрија* (жута књига)

<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zlucic/LopandicGeometrija.pdf>

З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*

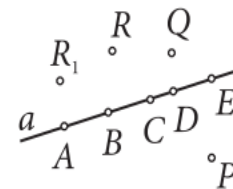
Аксиоме инциденције (Лопандић)

- I.1 Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B .
- I.2 Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B .
- I.3 Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B .
- I.4 Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A , B , C .
- I.5 Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke A , B , C .
- I.6 Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A , B , C .
- I.7 Ako dve razne, tačke A i B neke rave p pripadaju izvesnoj ravni π , tada sve tačke prave p pripadaju ravni π .
- I.8 Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A , one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B .
- I.9 Postoje četiri nekomplanarne tačke A , B , C , D .

Аксиоме инциденције

На свакој правој можемо изабрати произвољно много међусобно различитих тачака. За сваку праву можемо изабрати произвољно много тачака које јој не припадају.

аксиома (II)



I.1

I.2

I.3

I.4

У свакој равни можемо изабрати произвољно много међусобно различитих тачака. Такође, за сваку раван можемо изабрати произвољно много тачака које јој не припадају.

I.5

I.6

Постоји највише једна раван која садржи три неколинеарне тачке A , B , C .

I.7 Ако две разне, тачке A и B неке праве p припадају извесној равни π , тада све тачке праве p припадају равни π .

I.8 Ако две равни α и β имају једну заједничку тачку A , оне имају најмање још једну заједничку тачку B .

I.9 Постоје четири некомпланарне тачке A , B , C , D .

Аксиоме инциденције

I.1 Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B .

I.2 Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke A i B .

тачка-права

I.3 Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B .

I.4 Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A , B , C .

I.5 Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke A , B , C .

тачка-раван

I.6 Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A , B , C .

I.7 Ako dve razne, tačke A i B neke rave p pripadaju izvesnoj ravni π , tada sve tačke prave p pripadaju ravni π .

права-раван

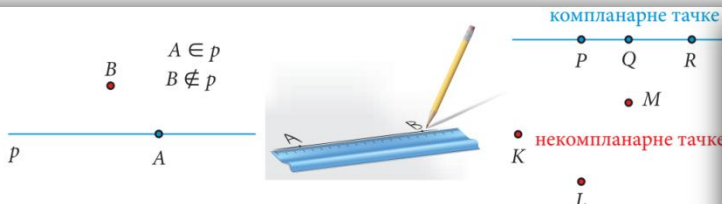
I.8 Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A , one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku B .

права-раван

I.9 Postoje četiri nekomplanarne tačke A , B , C , D .

Аксиоме инциденције

тачке и праве



За сваке две различите тачке постоји тачно једна права која их садржи.

Праву одређену тачкама A и B означавамо са $p(A, B)$.

За три и више тачака каже се да су:

- **колинеарне**, ако припадају једној правој, односно
- **неколинеарне**, ако не постоји права која их садржи.

тачке и равни



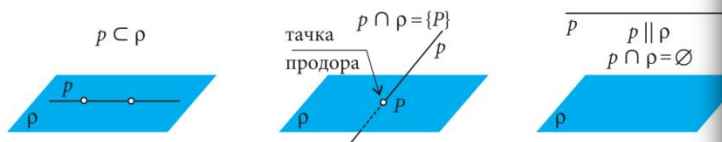
Три неколинеарне тачке одређују тачно једну раван.

Раван одређену неколинеарним тачкама A, B, C означавамо са $p(A, B, C)$.

За четири и више тачака кажемо да су:

- **компланарне**, ако припадају једној равни, односно
- **некомпланарне**, ако не постоји раван која их садржи.

праве и равни

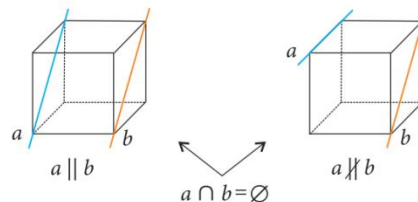


Ако права и раван имају више од једне заједничке тачке, тада се права налази у тој равни.

Ако права и раван имају једну заједничку тачку, кажемо да права **продире** раван.

Ако права и раван немају заједничких тачака, кажемо да су **паралелне**.

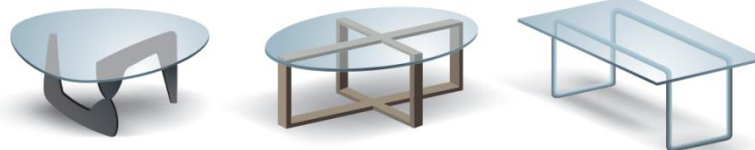
Ако две равни немају заједничких тачака, онда кажемо да су те две равни **паралелне**.



Ако две праве немају заједничких тачака и припадају истој равни, кажемо да су **паралелне**.

Ако две праве немају заједничких тачака и не припадају истој равни, кажемо да су **мимолазне**.

Две различите праве могу имати највише једну заједничку тачку.



Правна и тачка која јој не припада одређују тачно једну раван.

Две различите праве које се секу одређују тачно једну раван.

Две паралелне праве одређују тачно једну раван.

две равни

аксиома (PP)

две праве

теорема (последица ТП)

одређеност равни

Аксиома (TP). Три неколинеарне тачке одређују тачно једну раван.

три важне теореме

аксиома (ПП)

Аксиоме рапореда (Лопандић)

- II.1 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada su svake dve od tačaka A, B, C među sobom različite.
- II.2 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada je $\mathcal{B}(C, B, A)$.
- II.3 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}(A, C, B)$.
- II.4 Ako su A i B dve razne tačke neke prave p , tada na pravoj p postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, B, C)$.
- II.5 Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.
- II.6 (Pašova aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC , ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, tada prava p seče pravu AC u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(A, Q, C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A, R, B)$.

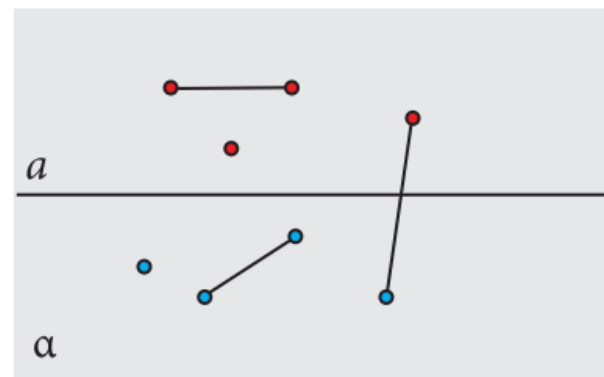
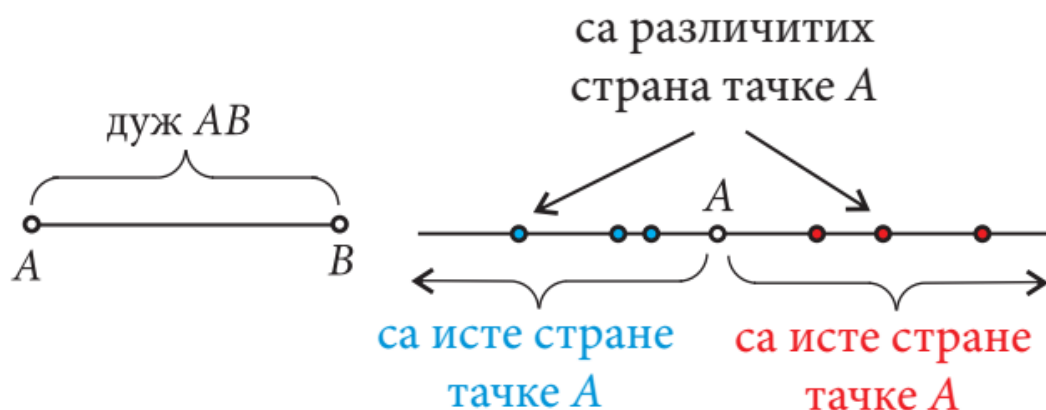
Аксиоме распореда (на други начин)

Аксиома 1

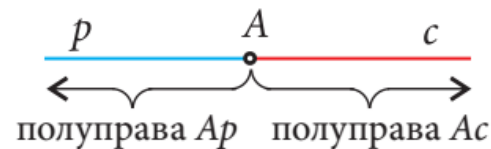
За три међусобно различите колинеарне тачке A , B и C , само једна од ових тачака је између преостале две, то јест или је $A - B - C$, или је $B - C - A$ или је $C - A - B$, и не могу истовремено да важе сва три нити нека два од ових односа.

Аксиома 2

За сваке две различите тачке A и B постоји тачка S која је између њих, $A - S - B$, затим постоји тачка D таква да је $A - B - D$, као и тачка L таква да је $L - A - B$.



Аксиоме распореда (на други начин)



Нека је a произвољна права и A тачка која јој припада. Скуп тачака који чине тачка A , као и све тачке праве a које су са исте стране тачке A назива се **полуправа**. Тачка A се назива *йочейѿак* или *йѿеме* те полуправе.

Нека је α произвољна раван и a права која јој припада. Скуп тачака који чине све тачке праве a , као и све тачке равни α које су са исте стране праве a назива се **полураван**.

полураван $a\beta$

a

полураван $a\gamma$

Аксиома о полуправама

Свака права a је неком својом тачком A подељена на две полуправе којима је заједничка тачка само тачка A . Било које две тачке праве a које су различите од A и које припадају истој полуправој са исте су стране тачке A . Било које две тачке праве a које су различите од A и које не припадају истој полуправој са различитих су страна тачке A .

Аксиома о полуравнима

Свака права a неке равни α дели ту раван на две полуравни. Ако крајеви неке дужи не припадају правој a , а припадају истој полуравни, онда та дуж не сече праву a . Ако крајеви неке дужи не припадају правој a и не припадају истој полуравни, онда та дуж сече праву a .

Аксиоме распореда (на други начин)

Пашова теорема

У истој равни дате су три неколинеарне тачке A , B и C и права p која не садржи ниједну од њих. Ако права сече дуж BC , онда она сече или дуж AB или дуж AC и не сече обе.

Аксиоме подударности

Седма аксиома *Елемената*:

они (геометријски објекти) који се могу покlopити једнаки су међусобно.

Пеано, *Начела геометрије*, 1889:

... кретање је основни појам геометрије.

Хилберт, *Основе геометрије*, 1899:

... подударност је основни појам геометрије; уводе се аксиоме **подударности дужи** и **подударности углова**.

Борсук, Шмиелева, *Основе геометрије*, 1960:

... подударност је основни појам геометрије; уводе се аксиоме **подударности парова тачака**.

Хибертове аксиоме подударности

линеарне аксиоме треће групе: Преношење дужи

III 1. Ако су A, B две тачке на правој a и ако је, даље, A' тачка на истој или на другој правој a' , онда се може увек наћи таква тачка B' праве a' на датој страни од тачке A' , да дуж AB буде подударна или једнака дужи $A'B'$, што ћемо označiti на следећи начин:

Транзитивност

$$AB = A'B'$$

III2. Ако су дужи $A'B'$ и $A''B''$ подударне једној истој дужи AB , биће и дуж $A'B'$ подударна дужи $A''B''$, или кратко: ако су две дужи подударне трећој, подударне су и међу собом.

Сабирање дужи

III₃. Нeka су AB и BC две дужи на правој a без заједничких тачака и нека су, даље, $A'B'$ и $B'C'$ две дужи на истој правој a или на некој другој правој a' које исто тако немају заједничких тачака; ако је $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$ и биће увек и $AC \equiv A'C'$.

Хиббертове аксиоме подударности

*III*₄. Neka je dat ugao $\angle(h, k)$ i ravni α i prava a' u ravni α' kao i odredjena strana ravni α' prema pravoj a' . Neka h' označava polupravu prave a' koja polazi iz tačke O' ; onda u ravni α' postoji jedna i samo jedna poluprava k' tako da ugao $\angle(h, k)$ podudaran ili jednak uglu $\angle(h', k')$ i u isto vreme sve unutrašnje tačke ugla $\angle(h', k')$ nalaze se na datoj strani od prave a' , što ćemo označiti na ovaj način:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

*III*₅ Ако за сва троугла ABC и $A'B'C'$ важе подударности

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C' \text{ и } \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

онда увек постоји и подударност

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

Хибертове аксиоме подударности

Задатак. Извести основне последице Хилбертових аксиома подударности (Pons asinorum, ставови подударности троуглова, једнакост унакрсних углова, ...)

Аксиоме Биркхофа

Birkhoff, George David (1932), *A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractors*, Annals of Mathematics, 33: 329–345

Birkhoff, George David; Beatley, Ralph (2000) [first edition, 1940], *Basic Geometry*, American Mathematical Society

Основни објекти су **тачке** $A, B, \dots$ и **праве** $\ell, m, \dots$

Основни односи су одређени **растојањем између две тачке**

$$(A, B) \mapsto d(A, B) \in [0, +\infty)$$

и **величином угла** који одређује тројка тачака (A, O, B) таква да је $A \neq O$ и $B \neq O$,
 $(A, O, B) \mapsto \angle AOB \in [0, 2\pi)$.

Аксиоме Биркхофа

ПОСТУЛАТ I (ПОСТУЛАТ ЛЕЊИРА)

За сваку праву ℓ постоји 1-1 функција t која тачкама $A, B, \dots$ праве ℓ придружује реалне бројеве $x_A, x_B, \dots$, тако да је

$$d(A, B) = |x_A - x_B| \text{ за све тачке } A, B.$$

ПОСТУЛАТ II (ТАЧКА-ПРАВА ПОСТУЛАТ)

За сваке две различите тачке P и Q постоји јединствена права која их садржи.

ПОСТУЛАТ III (ПОСТУЛАТ УГЛОМЕРА)

За сваку тачку O постоји 1-1 функција која полуправама $a, b \dots$ са почетком O додељује реалне бројеве $\omega_a, \omega_b, \dots$, тако да за сваке две тачке A, B које припадају a, b и које су различите од O важи $\angle AOB = \omega_b - \omega_a \pmod{2\pi}$.

Штавише, ...

ПОСТУЛАТ IV (ПОСТУЛАТ СЛИЧНОСТИ)

Ако за два троугла $ABC, A'B'C'$ постоји константа $k > 0$ таква да важи

$$d(A', B') = kd(A, B), d(A', C') = kd(A, C) \text{ и } \angle B'A'C' = \pm \angle BAC,$$

онда је

$$d(B', C') = kd(B, C), \angle C'B'A' = \pm \angle CBA, \angle A'C'B' = \pm \angle ACB.$$

Геометријски софтвер

- Специфичности упознавања неког софтвера (Зашто? Колико детаљно? Опште упутство или примери?)
- Употреба геометријског софтвера постаје саставни део учења геометрије.

<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic//gclc/>

<http://geogebra.matf.bg.ac.rs/#home>

<https://www.geogebra.org/>

GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/Ebm5wBW5>

GeoGebra

Описана кружница троугла

Задатак!

Три породице Акић, Бакић и Цакић живе у суседству и желе да ископају бунар тако да он буде једнако удаљен од свачије куће. Измерили су растојања између сваке две куће и на основу тога у некој размери нацртали одговарајућу скицу. Где на скици треба да означе положај бунара који желе да ископају?

