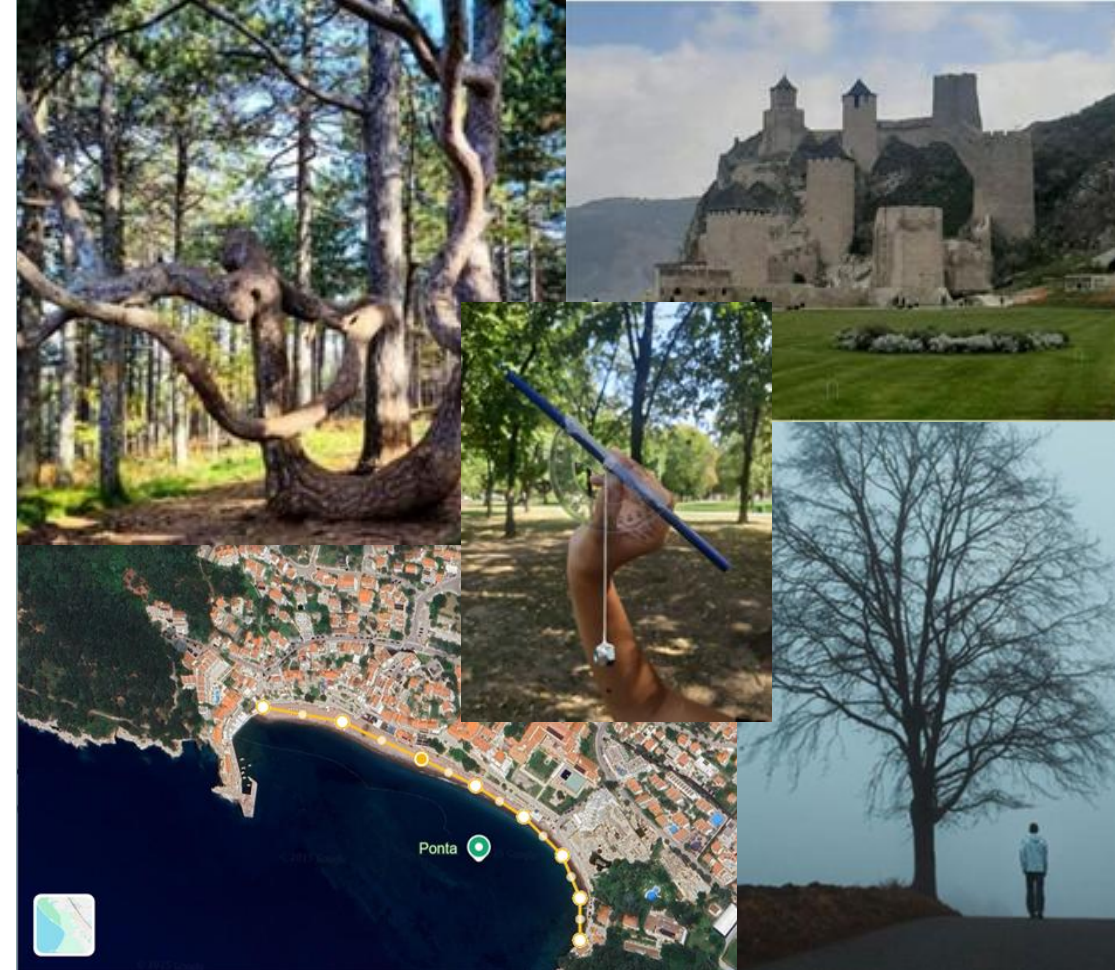


Treći zadatak

1. Opis trećeg zadatka
2. Koncept geometrijske sličnosti kroz školovanje

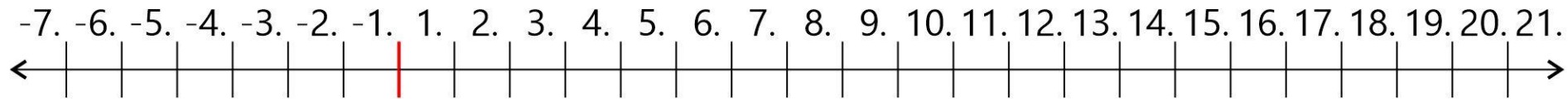


SLIČNOST
-zbirka zadataka-

Opis zadatka 3

Razraditi napredni matematički/informatički koncept (po sopstvenom izboru) kroz malu zbirku odgovarajućih zadataka (okvirno 8 zadataka), koja pokriva veći period školovanja (različite nivoe). Za najadekvatniji odgovor na zadatak 3 treba birati što napredniji koncept i što raniji uzrast odakle počinje razrada. Uglavnom će biti potreban izlazak iz stereotipnih školskih okvira. Svaki zadatak treba da sadrži sledeće elemente

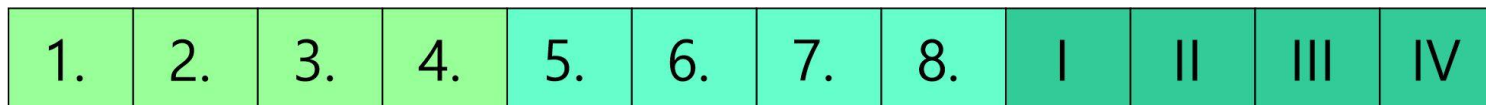
- 1. Formulacija zadatka:** jasna, precizna i primerena nivou
- 2. Rešenje:** detaljno rešenje (koje se ne oslanja na koncepte na koje implicitno ukazuje)
- 3. Metodička vrednost zadatka:** analiza zadatka, odn. rešenja u kontekstu izabranog koncepta; opisati značaj zadatka za dublje razumevanje koncepta



GEOMETRIJSKA SLIČNOST

Zoolozi tvrde da embrionalni razvoj životinje sumira za vrlo kratko vreme istoriju njenih predaka iz raznih geoloških epoha. Čini se da isto važi i za razvoj uma. Zadatak predavača je da provuče kroz dečiji um ono što je prolazio kroz umove predaka, ubrzanim koracima, ali bez izostavljanja bilo kog koraka. U ovom smislu, **istorija nauke treba da bude naš vodič**.

Logika i intuicija u matematici i nastavi matematike Poincaré, H. 1899



▲ ▲
SLIČNOST

percepcija - merenje - crtanje - računanje - dokazivanje ...

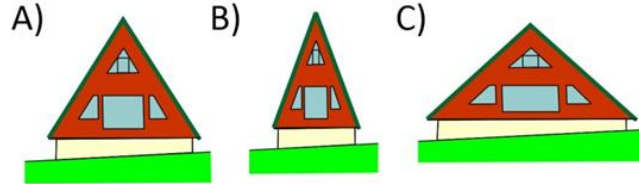
Celokupno ljudsko znanje počinje intuicijom, koja prerasta u koncepte i završava se idejama.

Kritika čustog uma, Kant, Part 2, Sec. 2.

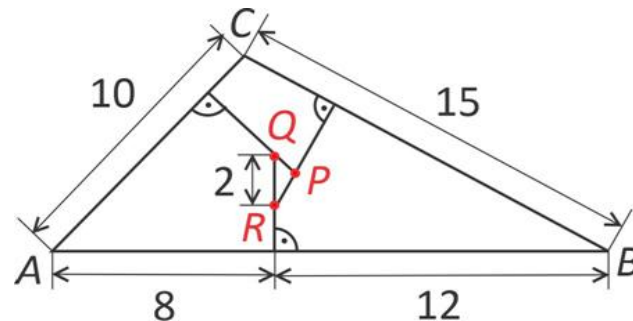
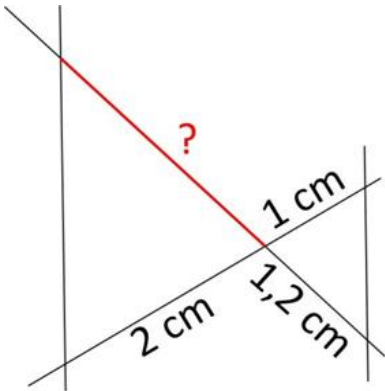
Zbirka zadataka

Brzo mišljenje

1. Koja skica A), B) ili C) verodostojno predstavlja planinsku kuću prikazanu na fotografiji? **Obrazloži izbor matematičkim argumentima.**

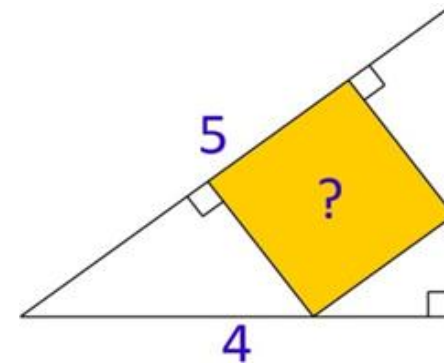


2. Odredi dužinu duži x . 3. Odredi obim trougla PQR prema podacima sa slike.



Sporo mišljenje

4. Izračunaj površinu kvadrata prikazanog na slici.

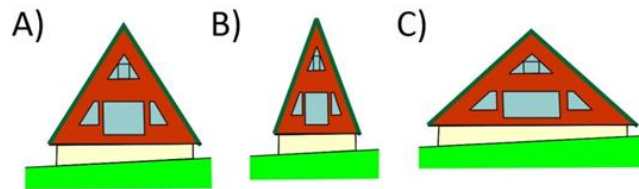


5. Proceni stvarnu površinu zgrade prikazane na slici?



Zbirka zadataka

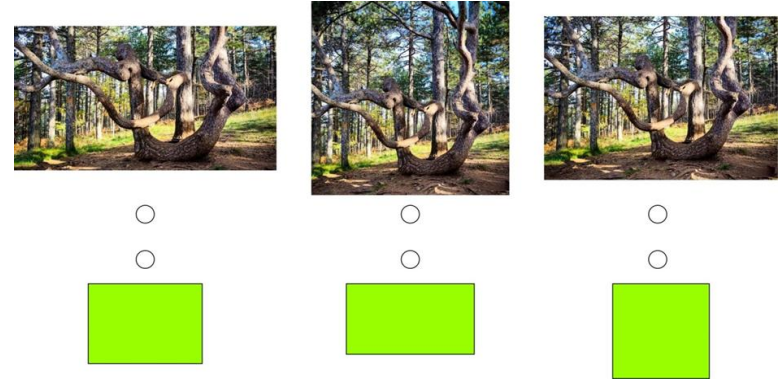
1. Koja skica A), B) ili C) verodostojno predstavlja planinsku kuću prikazanu na fotografiji? **Obrazloži izbor matematičkim argumentima.**



2. Po čemu se (ne)razlikuju prikazane fotografije? **Dati matematičke argumente.**



3. Poveži fotografije sa pravougaonicima istog oblika.

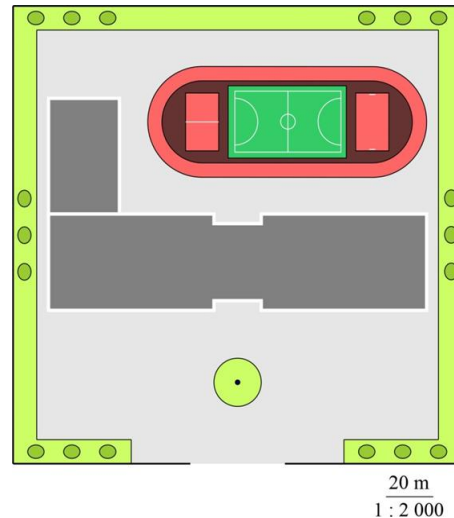


4. Uoči figure iste boje. Po čemu su istobojne figure srodne?

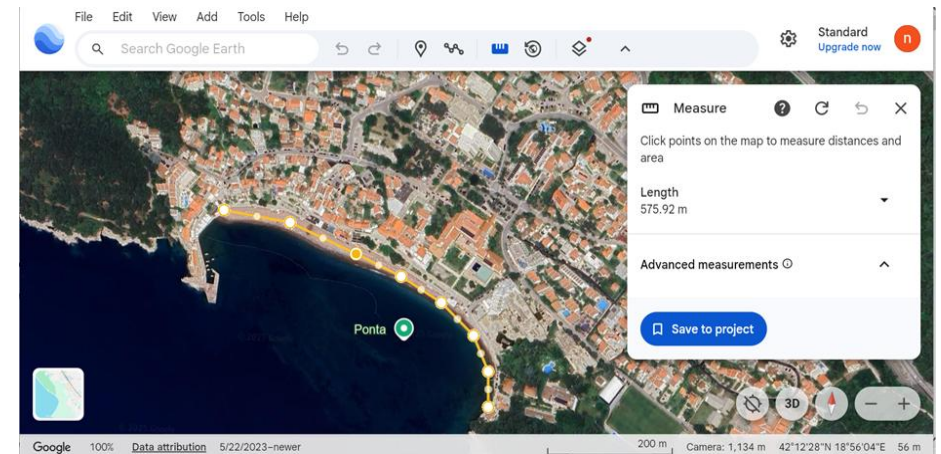


Merenje crteža

1. Proceni stvarnu visinu drveta prikazanog na fotografiji.
2. Na slikama ispod data su dva prikaza školskog dvorišta. Na prvoj slici je prikazana maketa. Na drugoj slici je prikazan plan. Pažljivo pogledaj obe slike i opiši sličnosti i razlike između makete i plana.

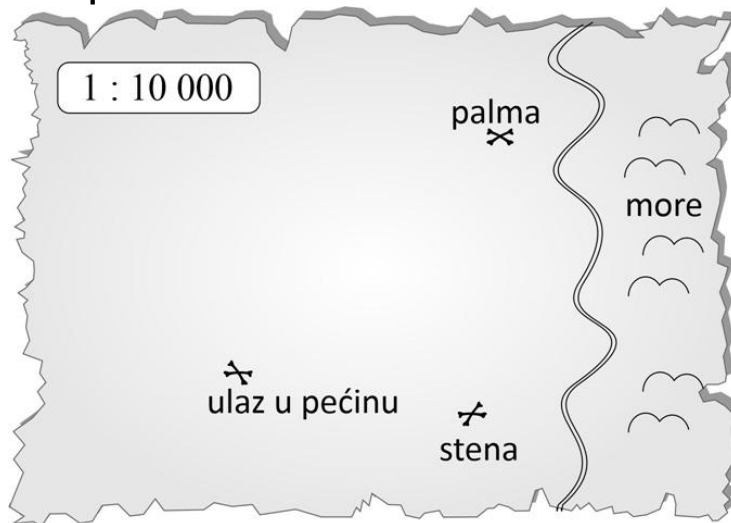


3. Merenjem odgovarajućih dužina na planu (u milimetrima) odredi:
 - a) stvarne dimenzije fudbalskog igrališta;
 - b) stvarne dimenzije školskog dvorišta;
 - c) stvarnu širinu ulaza u školsko dvorište.
4. Pokreni aplikaciju Google Earth i pronadi svoje mesto. Napravi spisak mesta i znamenosti koje bi pokazao/pokazala nekome ko ne živi u tvom kraju. Koristeći Google Earth odredi rastojanja između tih mesta.



Merenje crteža

5. Pustolov je pronašao mapu i poruku gde se nalazi zakopano blago. Mapa je nacrtana u razmeri 1 : 10 000. U poruci piše: „Mesto na kome je zakopano blago jednako je udaljeno od palme i od stene. Sa mesta na kome je zakopano blago duž koja spaja palmu i stenu se vidi pod pravim uglom.“ Koristeći geometrijski pribor odredio stvarno rastojanje između ulaza u pećinu i mesta na kome je blago zakopano.



Crtanje u razmeri

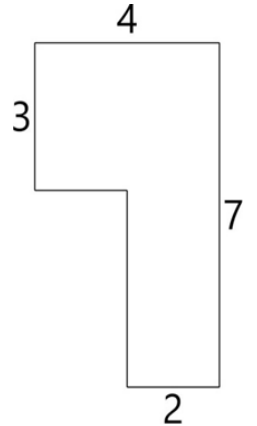
1. Nacrtaj državnu zastavu poštujući zakonom propisane razmere.

2. Nacrtaj prikazanu figuru ako date dužine u:

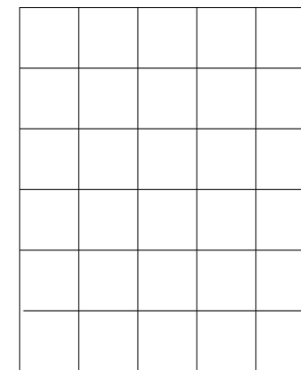
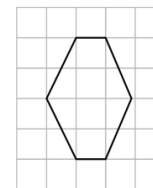
a) centimetrima;

b) inčima.

c) Uporedi površine nacrtanih figura.



3. Nacrtaj šestougao u kvadratnoj mreži prema datom uputstvu. Uporedi površine šestouglova.



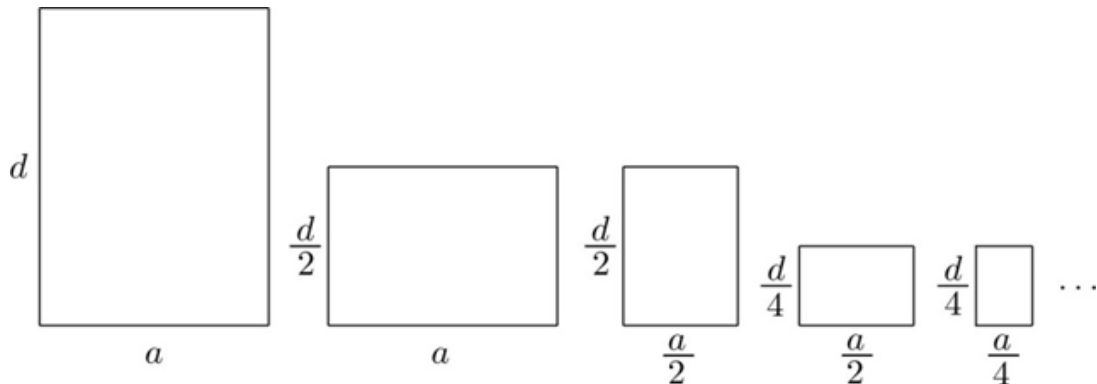
4. Nacrtaj prednju stranu Rimskog Panteona poštujući razmere.



Zbirka zadataka

Računanje

1. A-format papira se definiše sledećim svojstvom: Ako se papir presavije na pola, dobija se pravougaonik istog oblika, tj. ostaje sačuvana razmera duže i kraće stranice. Za početni A-format, označen A0, uzima se pravougaonik površine 1 m^2 koji zadovoljava navedeno svojstvo; A1 se dobija polovljenjem duže stranice A0 formata; A2 se dobija polovljenjem duže stranice A1 formata, itd. Odredite približno, u milimetrima dimenzije A0, A1, A2, A3, A4 i A5 formata.



$$\frac{d}{a} = \frac{a}{\frac{d}{2}}$$

$$\text{A0 format: } d^2 = 2a^2, ad = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

$d^4 = 2a^2d^2 = 2\,000\,000\,000\,000 \text{ mm}^2$		
$1000^4 < d^4 < 2000^4$		
$1100^4 = 1\,464\,100\,000\,000 < d^4 < 1200^4 = 2\,073\,600\,000\,000$	$1000 < d < 2000$	
$1180^4 = 1\,938\,777\,760\,000 < d^4 < 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$	$1100 < d < 1200$	
$1189^4 = 1\,998\,607\,065\,841 < d^4 < 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$	$1180 < d < 1190$	
	$1189 < d < 1190$	

$$a = \frac{1\,000\,000}{1189} \approx 841$$

Umesto dobijenih vrednosti, uzimaju se najbliži manji parni brojevi, jer se manji A formati dobijaju polovljenjem duže stranice, pa su dimenzije A0 formata **1188 x 840**.

Zbirka zadataka

Otkrivanje sličnosti

1. U istom trenutku, jednog sunčanog dana, posmatrane su senke četiri uspravno postavljena štapića. Popuni tabelu.

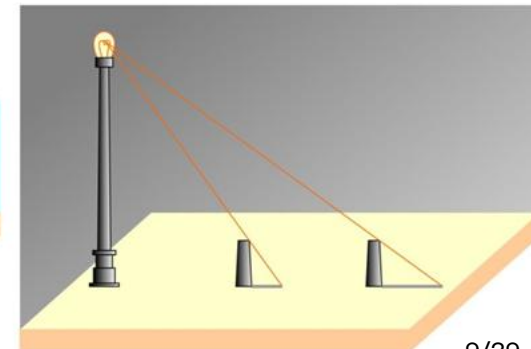
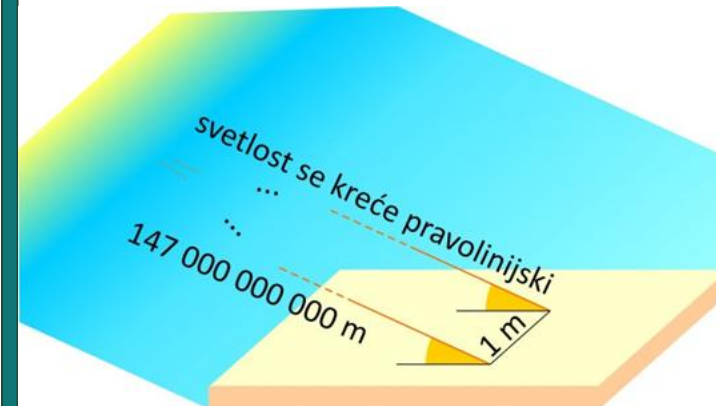
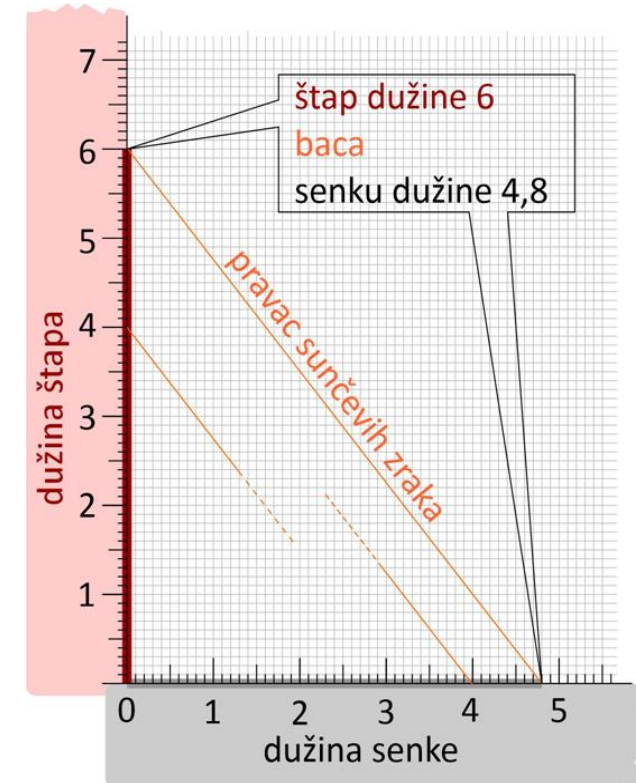


Dužina štapića (Š)	Dužina senke (S)	Š : S
15 cm	16.4 cm	0.91
12 cm		
9 cm		
5 cm		

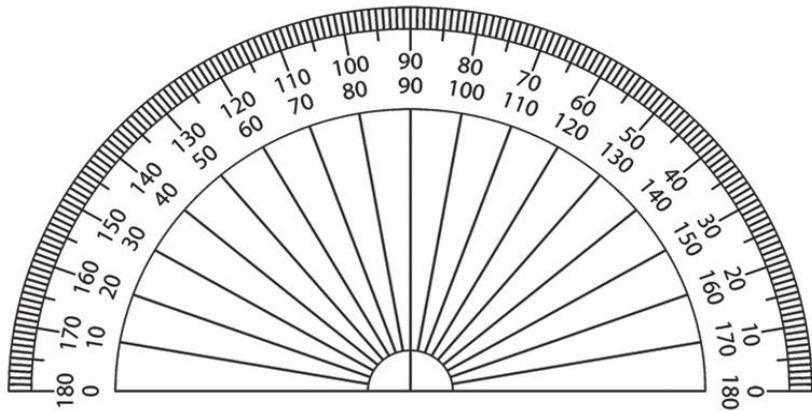
2. Štap dužine 6 baca senku dužine 4,8.

a) Koliko je dugačka senka štapa dužine 4?

b) Koliko je dugačak štap ako je njegova senka dugačka 4?

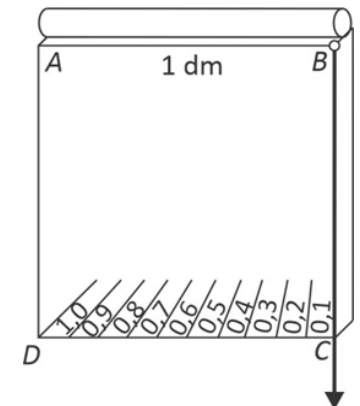
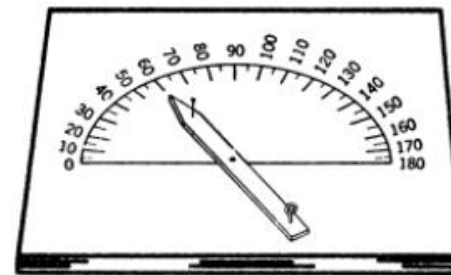


Stvaranje pojmova je uvek produktivno, a ne reproduktivno



➡ Istoričari matematike kao revolucionaran Talesov doprinos vide uvođenje četvrte geometrijske veličine (pored dužine, površine i zapremine) – ugla.

➡ Vigotski: Neophodno je pred učenike postaviti zadatak koji se ne može rešiti drugačije nego stvaranjem pojma. Taj inicijalni zadatak predstavlja kamen-temeljac na kome će se izgrađivati pojam.



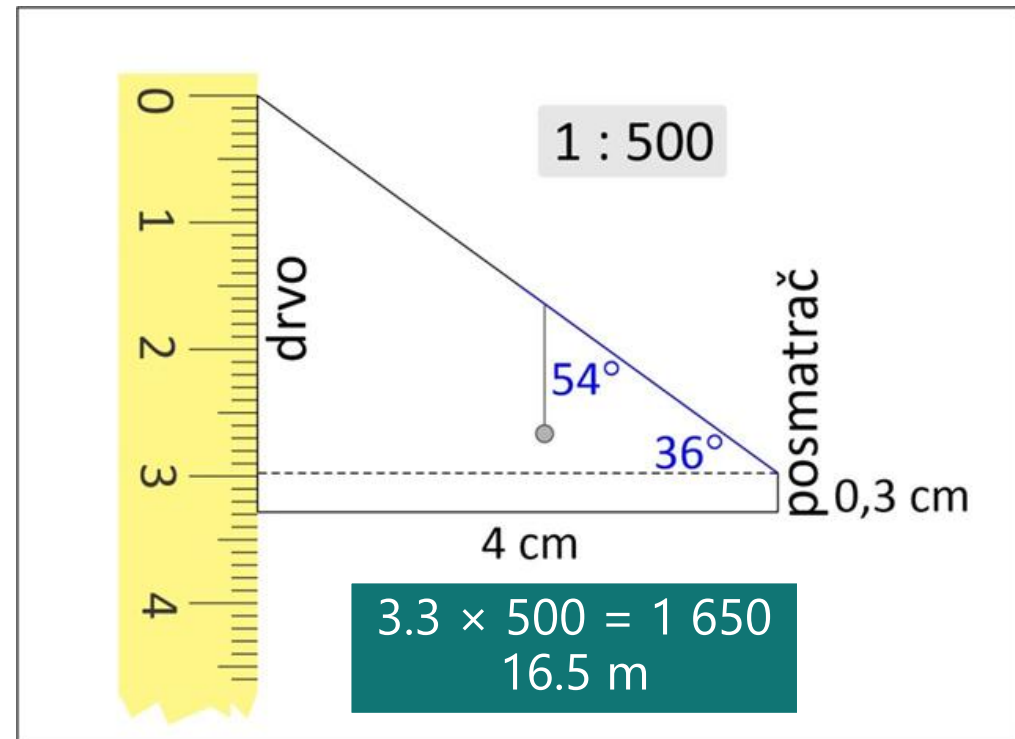
Jedna radionica sa terena



Zadatak

Izmerite visinu nekog drveta, koristeći kanap za merenje dužine i neki uređaj za merenje ugla elevacije.

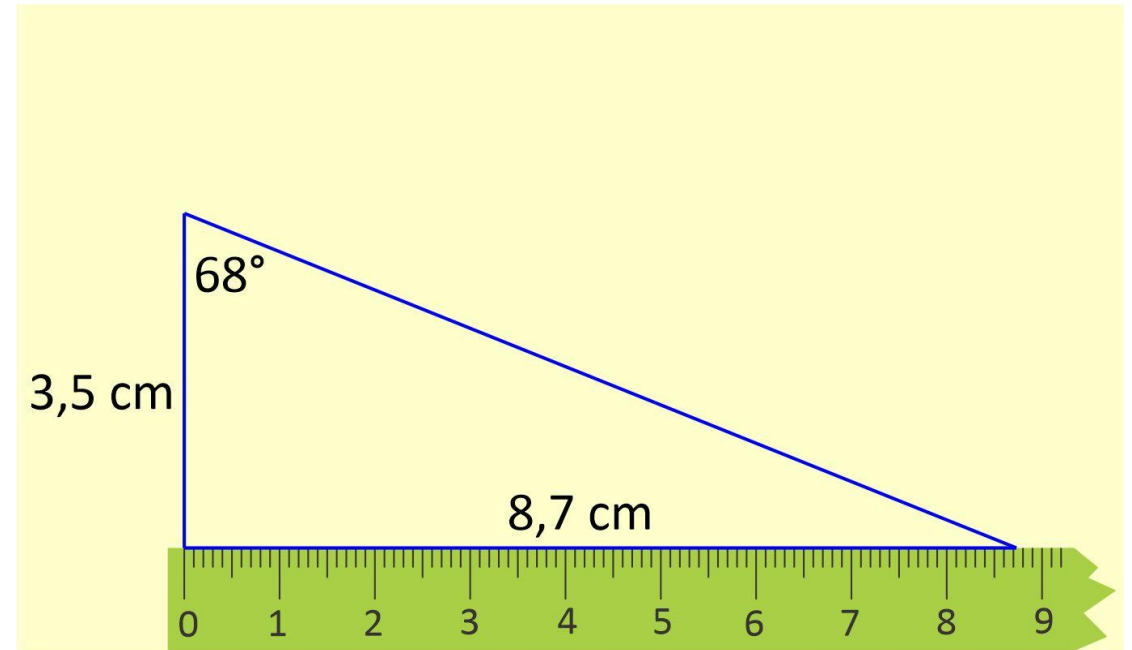
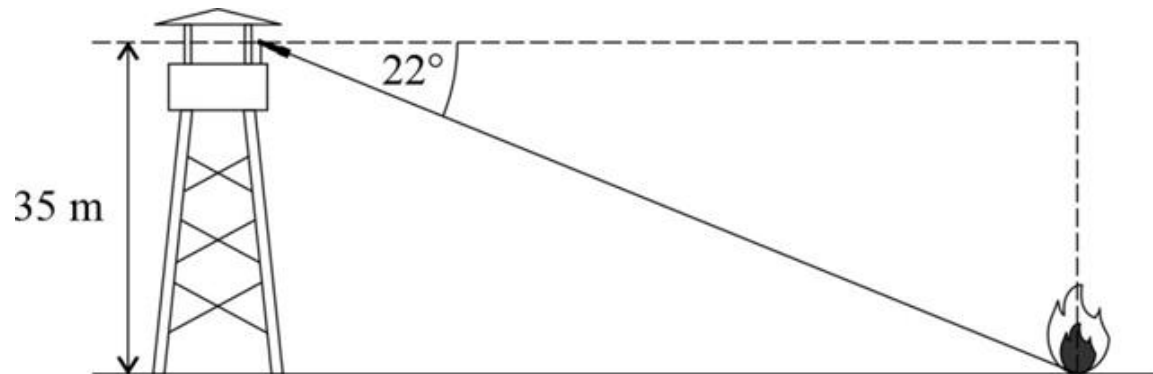
Na 20 m od stabla, učenik je vrh stabla posmatrao kroz cevčicu i konac viska je pokazao 54° . Učenik je visoka 1,5 m. Koliko je visoko stablo?



Zbirka zadataka

Na putu u trigonometriju

1. Na kontrolnom tornju u Nacionalnom parku Kopaonik, na visini od 35 m nalazi se durbin. Čuvar je durbinom posmatrao okolinu i uočio požar. Ugao između horizontalnog pravca i durbina je 22° . Koristeći te podatke odredi koliko je vatra udaljena od podnožja tornja.



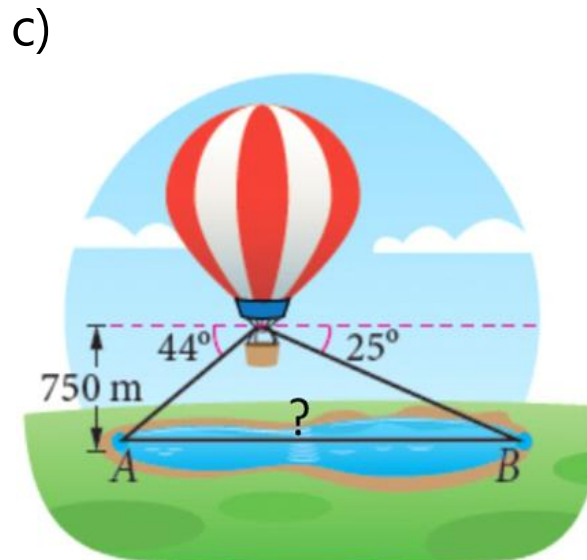
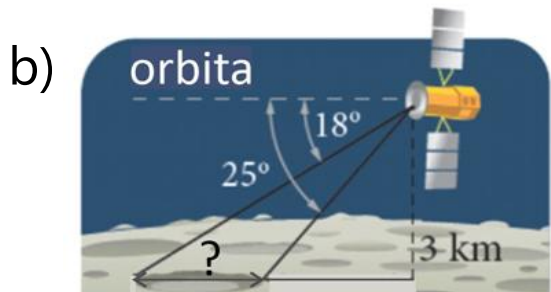
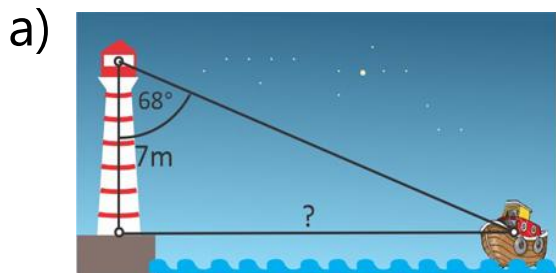
$$8.7 \times 100 = 870$$

870 metara

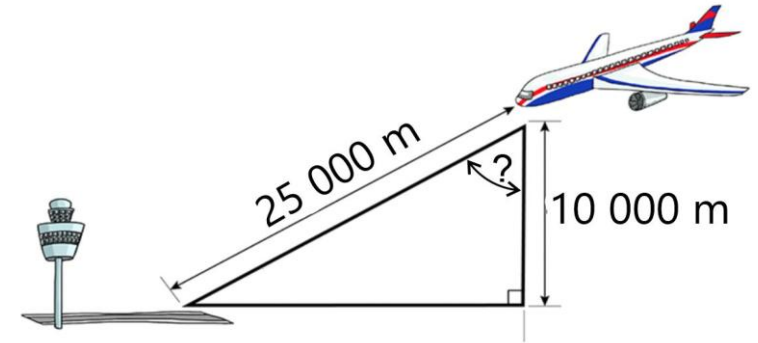
Zbirka zadataka

Kako izbeći najveću opasnost u pustari?

2. Posade okeanskih brodova, putničkih aviona, svemirskih letelica putuju poput kroz pustare čije jednolično okruženje navodi putnike da se izgube u neograničenom kretanju u krug. U pustarama, orijentacija se traži u daljini. Kapetan broda gleda u nebo. Kapetan aviona gleda u zemlju. Ne mogu se direktno meriti udaljenosti, ali se mogu meriti uglovi. Procenite stvarna tražena rastojanja prema podacima sa slike.



3. Avio se nalazi na visini od 10 000 m. Pod kojim uglom treba da usmeri avion za sletanje, ako je od piste udaljen 25 000 m.

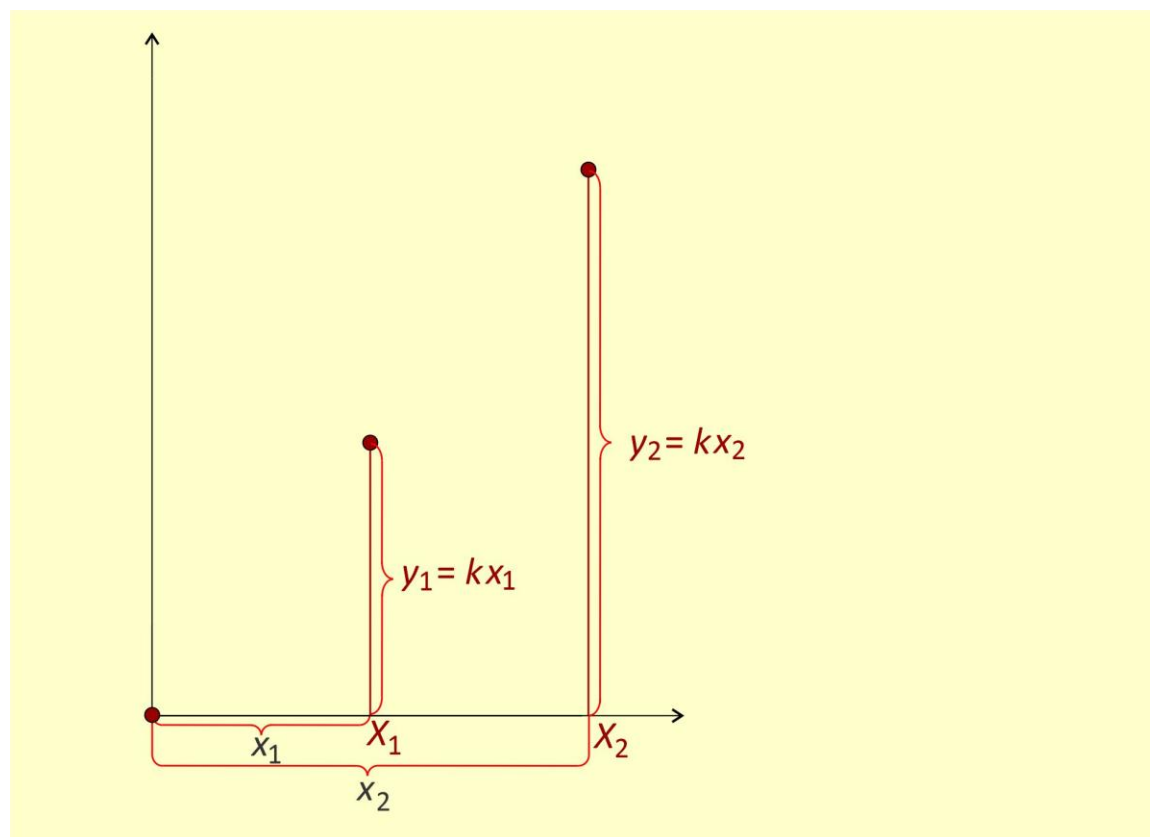
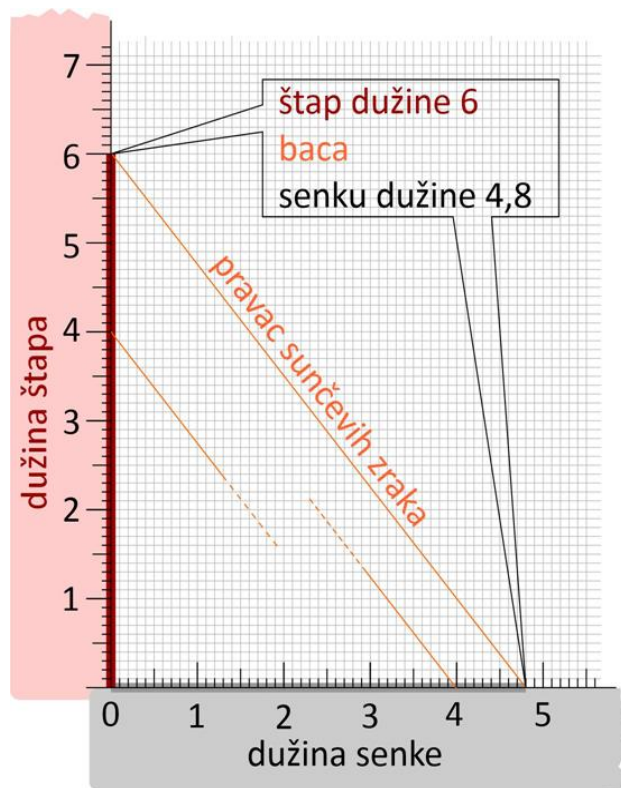


4. Rampa za kolica treba da bude postavljena uz stepenik visine 15 cm. Ugao između rampe u tla mora da bude 5°. Odredi dužinu rampe. Na kom rastojanju od stepenika će biti postavljen početak rampe?



Lenjiri ustupaju mesto osama

Dužina štapića (Š)	1	2	3	4.5	6
Dužina senke (S)	0.8	1.6	2.4	3.6	4.8
Š : S	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25



Zbirka zadataka

Kompleksna ravan

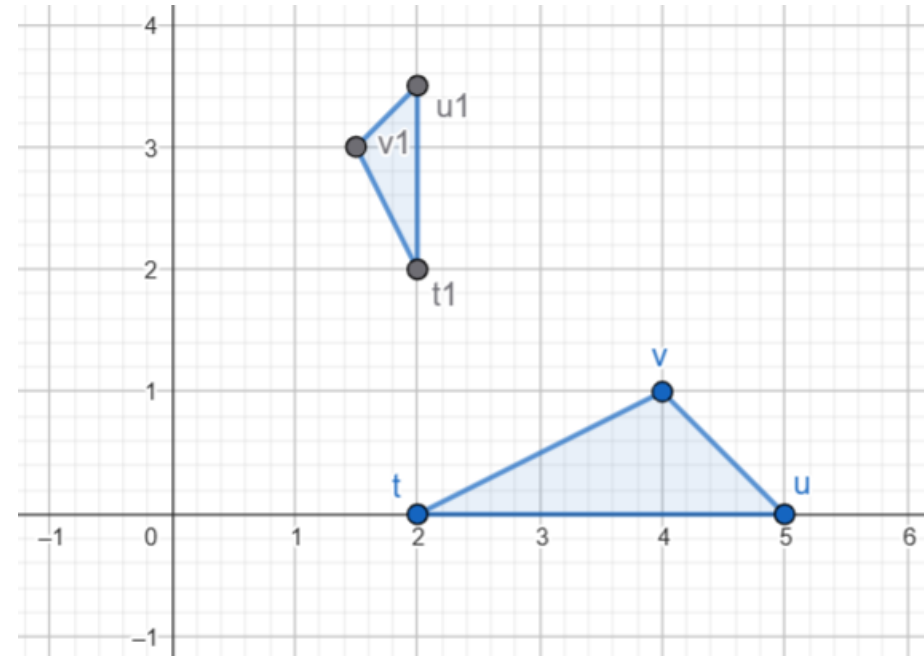
1. a) Nacrtaj u kompleksnoj ravni tačke $t = 2$, $u = 5$, $v = 4 + i$.

b) Ako je $f(z) = z + 2i + 1$, nacrtaj tačke $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$ i ispitaj odnos između trougla čija su temena t , u , v i trougla čija su temena $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$.

c) Ako je $f(z) = iz$, nacrtaj tačke $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$ i ispitaj odnos između trougla čija su temena t , u , v i trougla čija su temena $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$.

d) Ako je $f(z) = 0.5iz$, nacrtaj tačke $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$ i ispitaj odnos između trougla čija su temena t , u , v i trougla čija su temena $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$.

e) Ako je $f(z) = 0.5iz + 2i + 1$, nacrtaj tačke $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$ i ispitaj odnos između trougla čija su temena t , u , v i trougla čija su temena $f(t)$, $f(u)$ i $f(v)$.



<https://www.geogebra.org/calculator/zdwh67yg>

Gle, teorema: Svaka sličnost ravni može se predstaviti u obliku

$$f(z) = az + b \text{ ili } f(z) = \overline{a}z + b$$

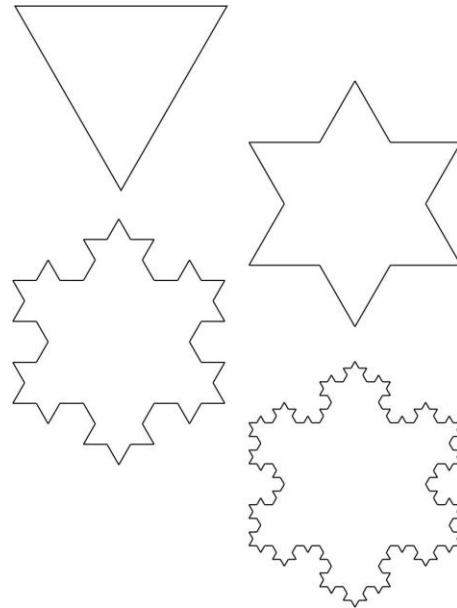
gde su a i b kompleksni brojevi i $a \neq 0$.

Savremena tehnologija

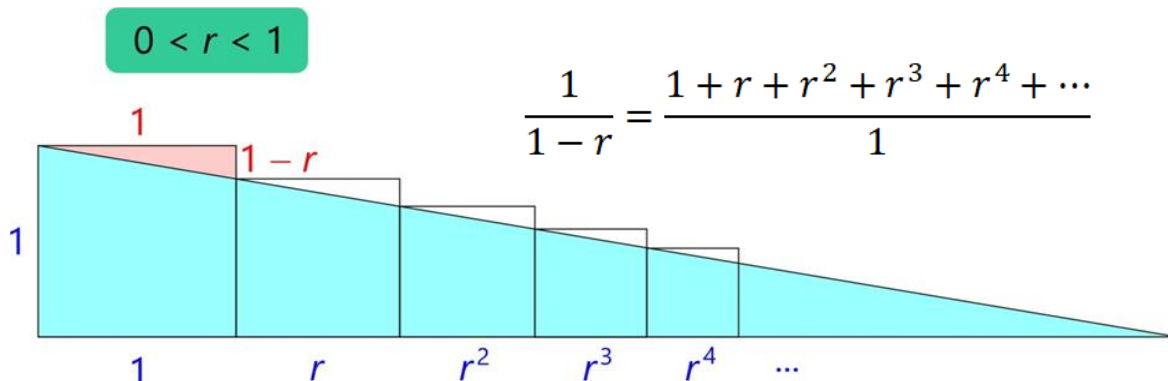
4. Nacrtaj Kohovu pahuljicu. Možeš koristiti i neku aplikaciju za crtanje.

a) Izračunaj obim i površinu svake u zavisnosti od broja stranica.

b) Predvidi kako će se menjati obim, a kako površina pri povećanju broja stranica.



5. Objasni TikTok prilog: [TikTok.mp4](#)



```
# Crtanje Kohove krive korišćenjem Python Turtle
import turtle

# Rekurzivna funkcija
def Koch(n, lenght): # naziv funkcije i argumenti
    if n==0:
        turtle.forward(lenght) # crtanje duži dužine "lenght"
    else:
        Koch(n - 1, lenght) # prva iteracija
        turtle.left(60) # okret ulevo za 60 stepeni
        Koch(n - 1, lenght) # druga iteracija
        turtle.left(-120) # okret ulevo za -120 stepeni
        Koch(n - 1, lenght) # treća iteracija
        turtle.left(60) # okret ulevo za 60 stepeni
        Koch(n - 1, lenght) # završna iteracija

# Okruženje
turtle.Screen().clear()
turtle.speed(0)
turtle.pensize(2)

# Početna tačka
turtle.penup()
turtle.goto(-300,0)
turtle.pendown()

# Parametri
n = 4
lenght = 4

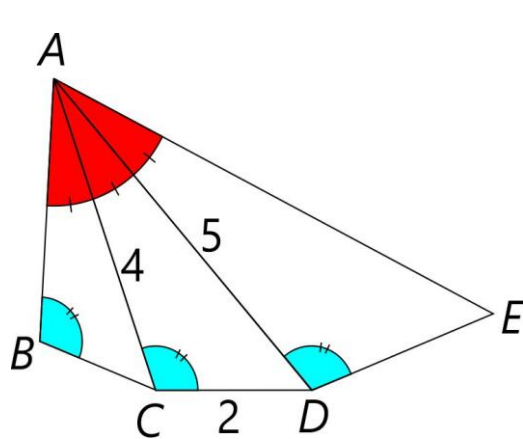
# Pozovi Koch funkciju koristeći parametre
Koch(n, lenght)
turtle.left(-120) # okret ulevo za 60 stepeni
Koch(n, lenght)
turtle.left(-120) # okret ulevo za 60 stepeni
Koch(n, lenght)

turtle.done()
```

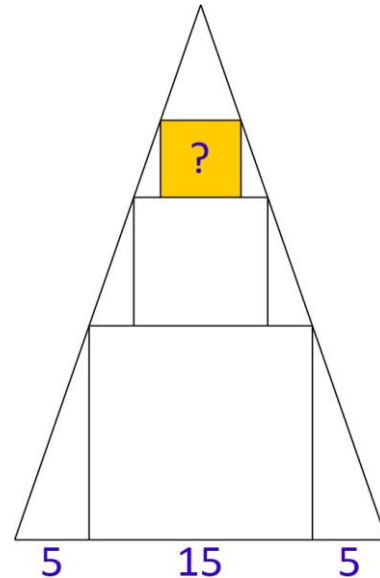
Sertifikaciono testiranje

(matematička pismenost)

1. Izračunaj obim petougla $ABCDE$ prikazanog na slici ispod.



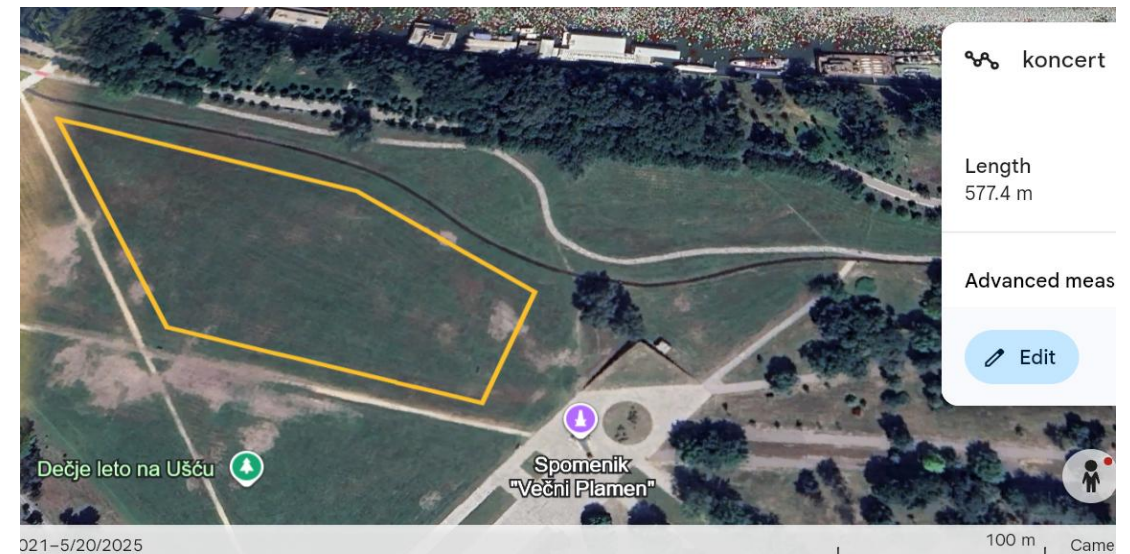
2. Izračunaj površinu obojenog kvadrata koristeći podatke sa slike ispod.



Kvalifikaciono testiranje

(matematički način razmišljanja)

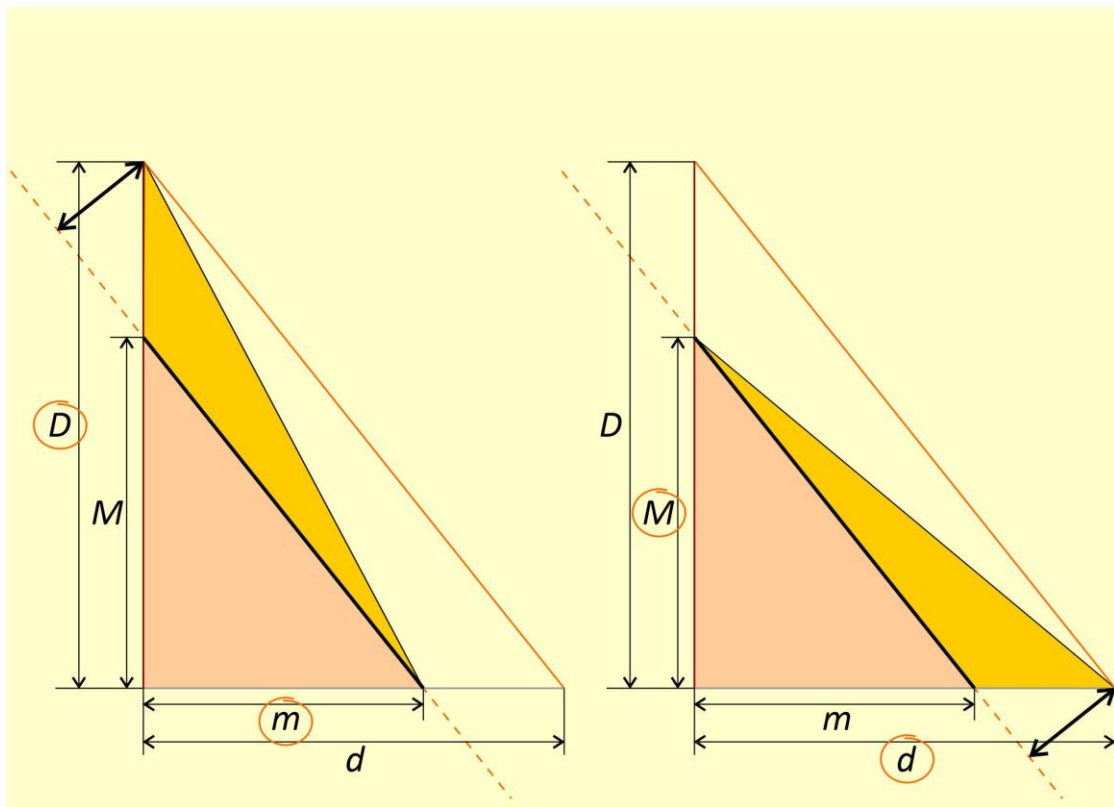
1. Na mapi je prikazan prostor na kome će biti organizovan koncert na otvorenom, pri čemu je predviđeno da publika stoji. Na mapi je nacrtan prostor za publiku. Procenete koliko ljudi može da stane u predviđenom prostoru.



Dodatak o dokazu Talesove teoreme

Teorema: Ako dva pravouгла trougla imaju jednake uglove, onda je razmera jednog para kateta jednaka razmeri drugog para kateta.

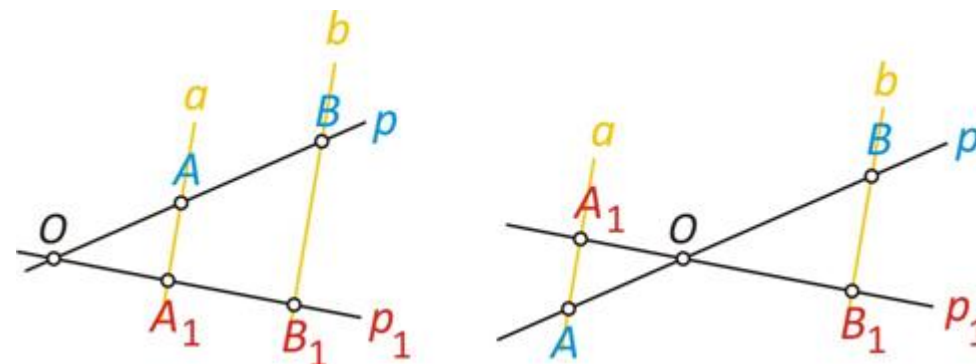
Euklidov dokaz



$$Dm = Md, \text{ odn. } D : M = d : m$$

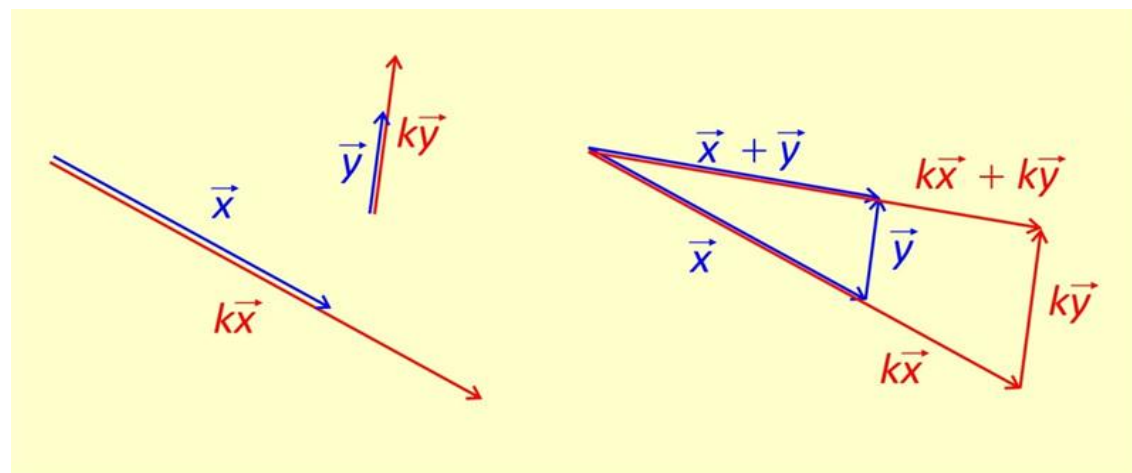
Talesova teorema ...

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{AA_1}{BB_1}$$

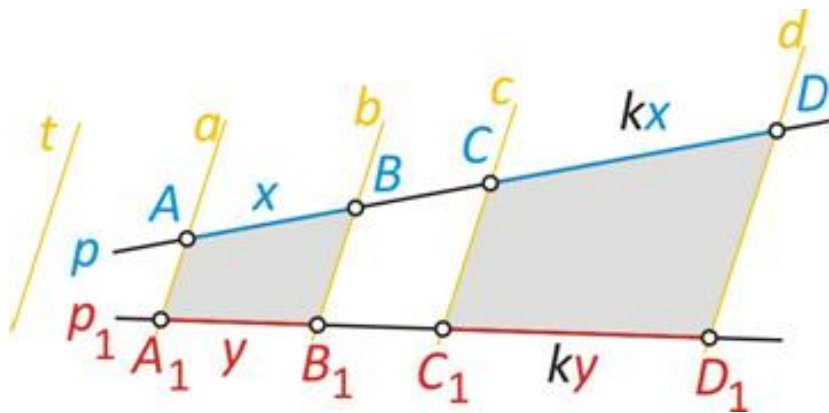


Školski dokaz ...

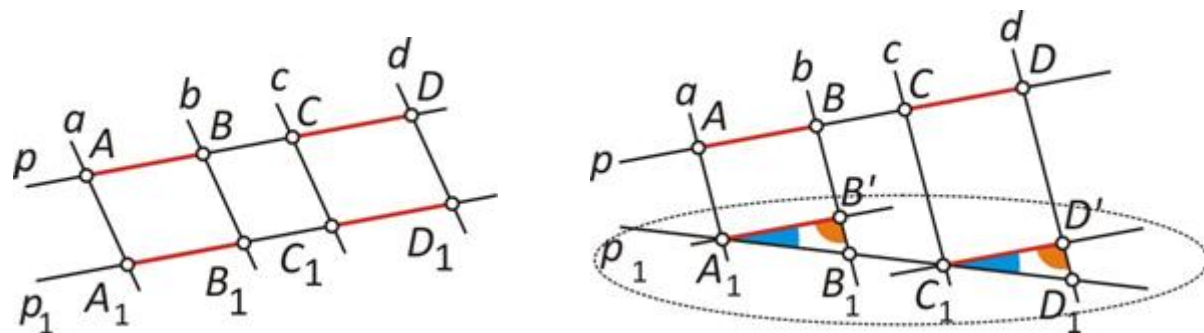
$$k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y}$$



Teorema: Ako za neki realan broj k važi $AB : CD = k$, onda je $A_1B_1 : C_1D_1 = k$.



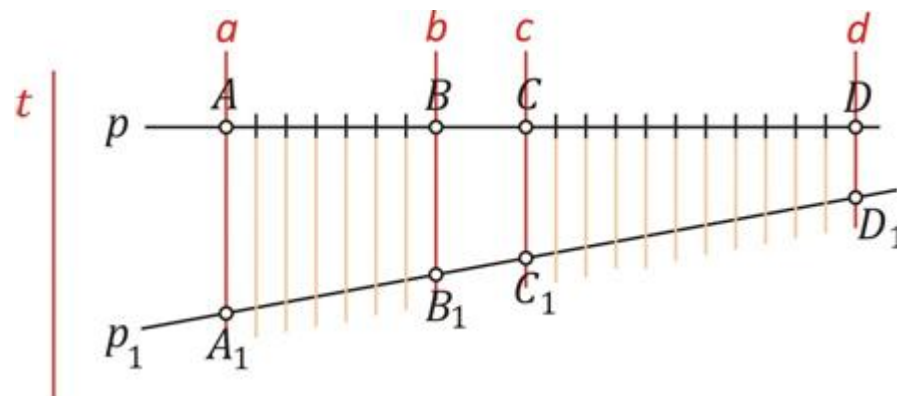
1. slučaj



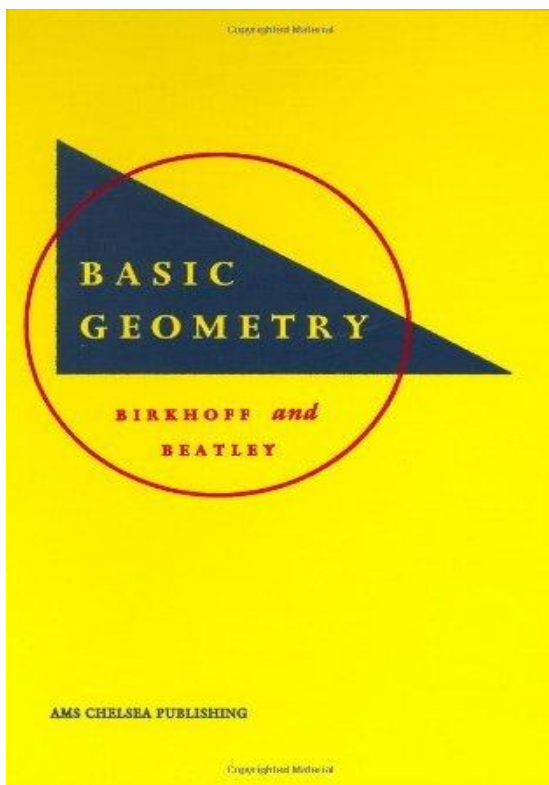
Dokaz.

1. **slučaj:** $k = 1$ – duži AB i CD su podudarne;
2. **slučaj:** k je racionalan broj – duži AB i CD su samerljive;
3. **slučaj:** k je iracionalan broj – duži AB i CD su nesamerljive.

2. slučaj



Osnovna geometrija



Osnovni objekti su tačke $A, B, \dots$ i prave $a, b, \dots$

Osnovni odnosi su određeni rastojanjem između dve tačke

$$(A, B) \mapsto d(A, B) \in [0, +\infty)$$

i veličinom ugla koji određuje trojka tačaka (A, O, B) , $A \neq O$ i $B \neq O$,

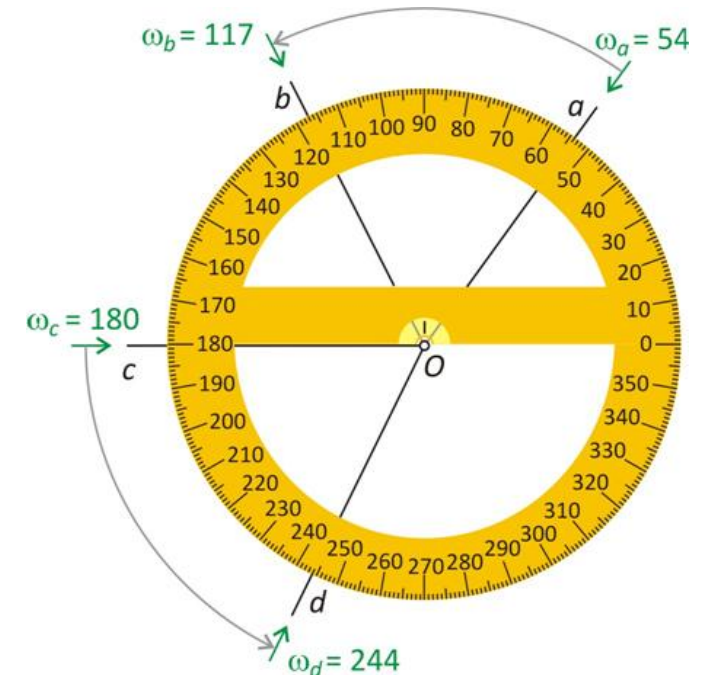
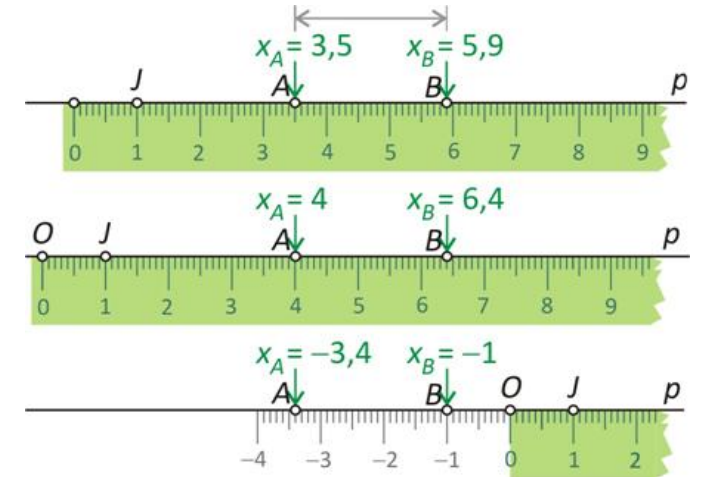
$$(A, O, B) \mapsto m\angle AOB \in [0, 360).$$

Pet aksioma (ne pet grupa aksioma!)

1. Euklidova aksioma
2. Aksioma lenjira
3. Aksioma uglomera
4. Aksioma o pravim uglovima
5. Aksioma sličnosti

Osnovna geometrija

- 1. EUKLIDOVA AKSIOMA** Za svake dve različite tačke P i Q postoji jedinstvena prava koja ih sadrži.
- 2. AKSIOMA LENJIRA** Za svaku pravu p postoji 1-1 funkcija koja tačkama pridružuje realne brojeve, tako da je $d(A, B) = |a - b|$ za sve tačke A, B , gde su a i b brojevi pridruženi tim tačkama.
- 3. AKSIOMA UGLOMERA** Za svaku tačku O postoji 1-1 funkcija koja polupravama O dodeljuje realne brojeve, tako da $m\angle aOb = \beta - \alpha \pmod{360}$, za sve poluprave Oa i Ob , gde su brojevi α i β pridruženi tim tačkama. Štaviše, ...
- 4. AKSIOMA O PRAVUM UGLOVIMA** Svi pravi uglovi imaju istu meru.
- 5. AKSIOMA SLIČNOSTI** ...



Osnovna geometrija

...

5. AKSIOMA SLIČNOSTI Ako za dva trougla ABC i $A'B'C'$ postoji konstanta $k > 0$ takva da važi

$$d(A', B') = k \cdot d(A, B), d(A', C') = k \cdot d(A, C) \text{ i } \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle BAC,$$

onda je

$$d(B', C') = k \cdot d(B, C), \sphericalangle C'B'A' = \sphericalangle CBA, \sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle ACB.$$

