МАТФ
Универзитет у Београду
Математички факултет

Небојша Икодиновић

Зашто је математика данас важна?

- Зашто је математика важна? 2 – 5
- Један необичан задатак 6 – 20
- Осврт на наставну праксу 21 – 25

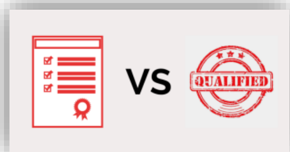
Зашто је математика важна?

Математичка писменост
(на крају образовања)

Одреди средњу вредност и медијану ...

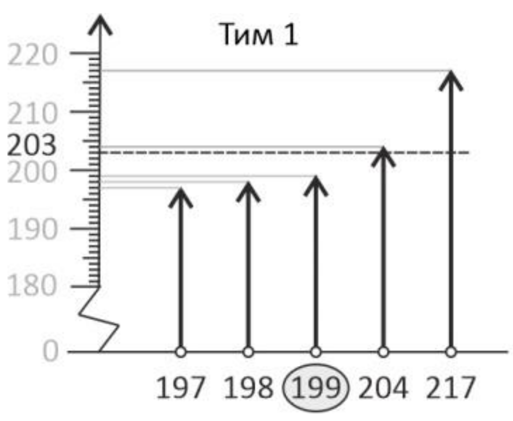
Когнитивне способности
(на почетку професионалне каријере)

Употреби средњу вредност и медијану ...

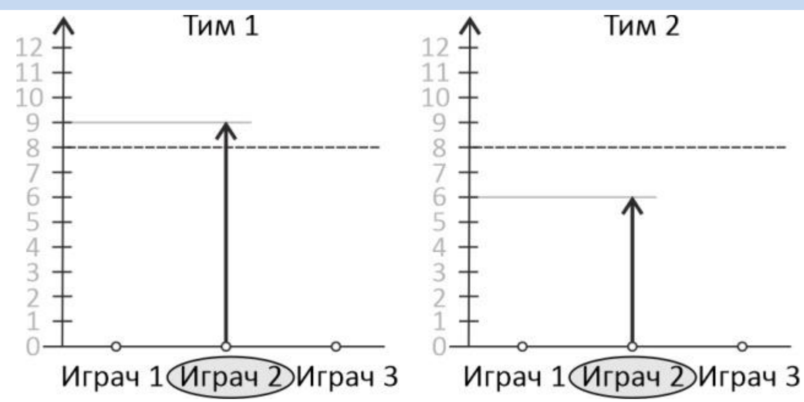


ЗАДАТАК

Петорица кошаркаша високи су 197 cm, 198 cm, 199 cm, 204 cm, 217 cm. Одреди аритметичку средину и медијану.

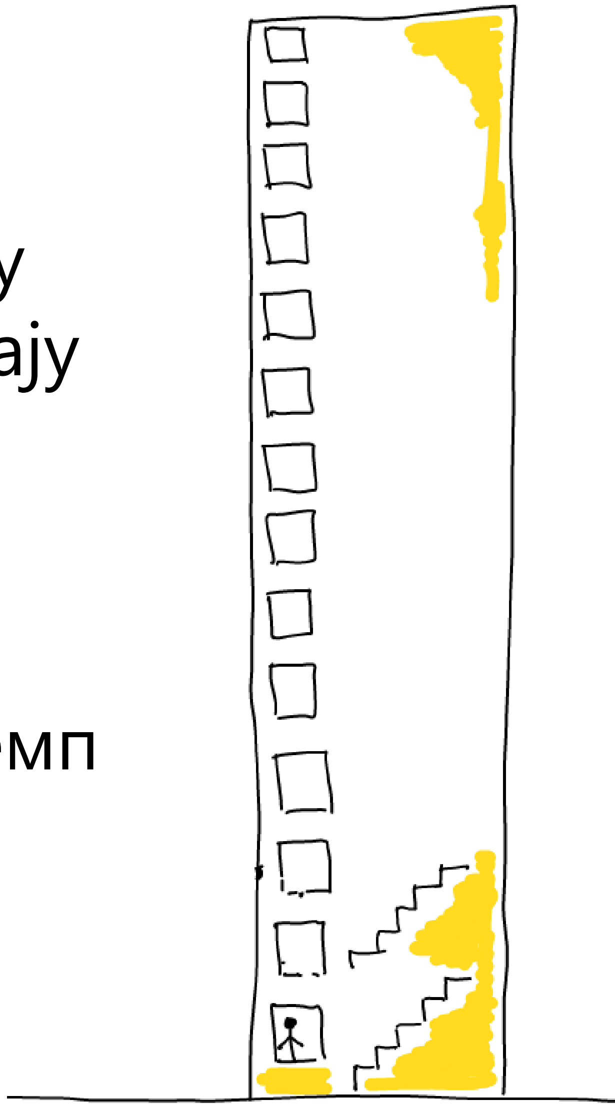


ЗАДАТАК Улични баскет се игра „три на три“. Током утакмице за сваког кошаркаша је забележен укупан број поена који је постигао. За први тим, просечан број кошева је 8, а медијана је 9; за други тим, просечан број кошева је 8, а медијана је 6. Шта закључујеш?



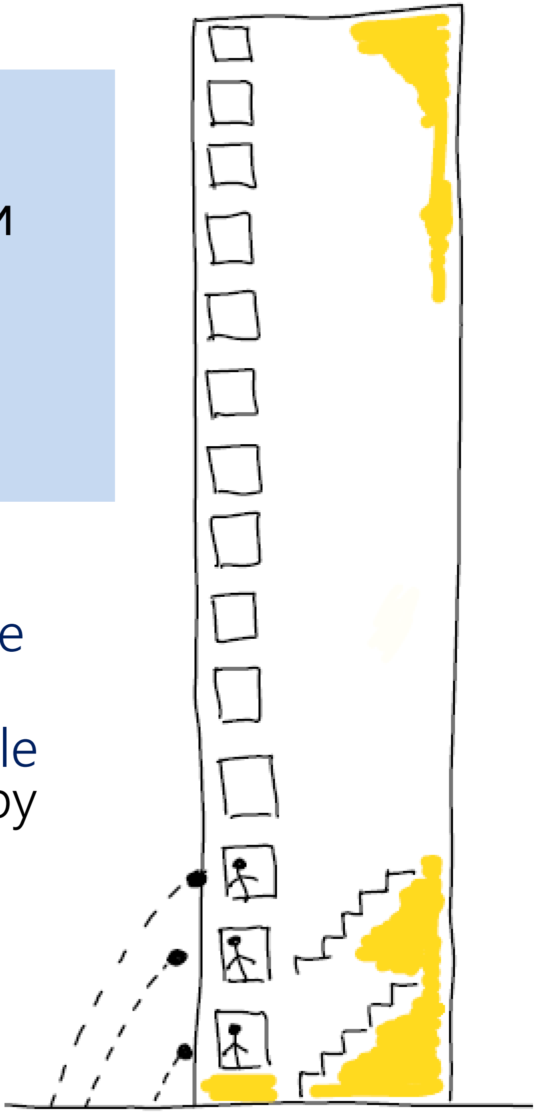
„… деца неће бити успешна у учењу математике уколико се не подучавају **на начин који им омогућава да употребе своју интелигенцију** …“

Ричард Скемп



На разговору за посао, комисија тражи од вас да ...

ЗАДАТАК Дате су вам 2 билијарске кугле. Експериментално одредите највиши спрат зграде од 36 спратова са којег се може бацити билијарска кугла тако да се након пада не разбије. Потребно је наћи стратегију одређивања критичног спрата у **најмањем броју** покушаја.



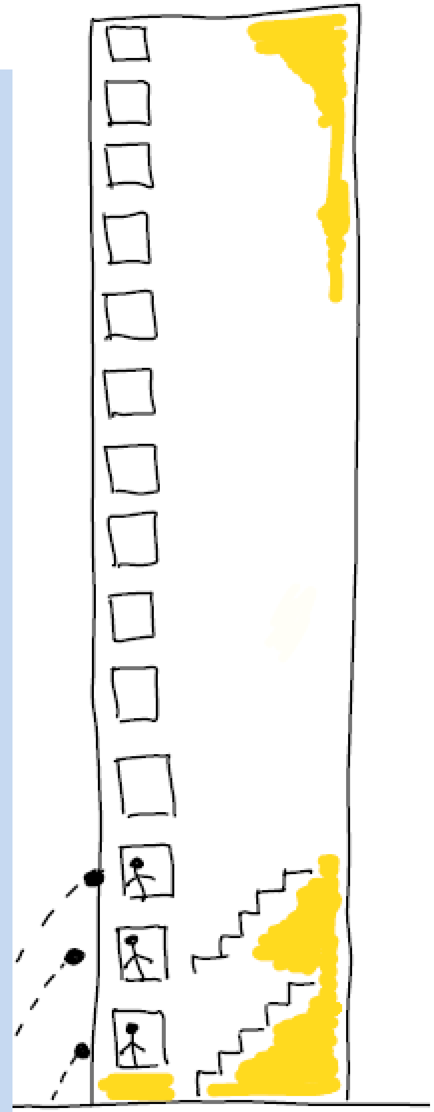
- Glass Balls, A Practical Guide to Quantitative Finance Interviews, by Xinfeng Zhou
- An Egg-Drop Experiment, Which Way Did the Bicycle Go, And Other Intriguing Mathematical Mysteries, by Kohnhauser J.D.E., Velleman D., Wagon S.
- Please Do Break the Crystal, MIT OpenCourseWare, https://www.youtube.com/watch?v=Fp7usgx_CvM&t=2s
- The Light Bulb Problem, ...

...

На разговору за посао, комисија тражи од вас да ...

ЗАДАТАК Дате су вам 2 билијарске кугле. Експериментално одредите највиши спрат зграде од 36 спратова са којег се може бацити билијарска кугла тако да се након пада не разбије. Потребно је наћи стратегију одређивања критичног спрата у **најмањем броју** покушаја.

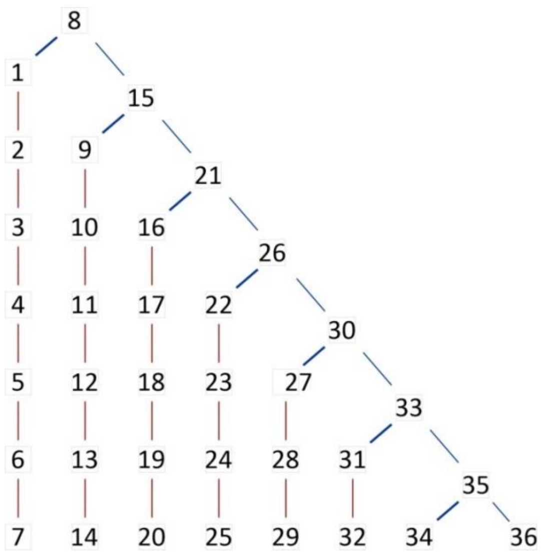
- Ако се кугла након бацања са неког спрата не разбије, онда је можете поново користити, без бојазни да је иоле мањег квалитета.
- Ако се кугла разбије приликом бацања са k-тог спрата, разбиће се и приликом бацања са сваког вишег спрата.
- Ако се кугла не разбије приликом бацања са k-тог спрата, неће се разбити ни приликом бацања са било ког нижег спрата.



Остављамо читаоцу да ...

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од 36 спратова помоћу 2 кугле.

РЕШЕЊЕ Критични спрат се може одредити у највише 8 корака. Прво треба бацати једну куглу редом са спратова, 8, 15, 21, 26, 30, 33, 35. Ако се прва кугла разбије на неком од ових спратова, другу куглу треба бацати редом са спратова који су испод спрата на коме се прва кугла разбила, и изнад су спратова са којих се прва кугла није разбила (ако је таквих спратова било). Дијаграм показује шему експеримента који ће се сигурно завршити после највише 8 покушаја, без обзира који спрат је критичан. Није тешко уочити да је 8 најмањи број покушаја.



ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **100** спратова помоћу 2 кугле.

Може се показати ...

36 спратова
и 2 кугле

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **100** спратова помоћу 2 кугле.

Теорема

Најмањи број покушаја p да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу 2 кугле једнак је највећем природном решењу неједначине:

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq s$$

Решење

Најмањи природан број који је решење неједначине

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq 100$$

јесте број 14.

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **837** спратова помоћу 2 кугле.

Може се показати ...

36 спратова
и 2 кугле

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **100** спратова помоћу 2 кугле.

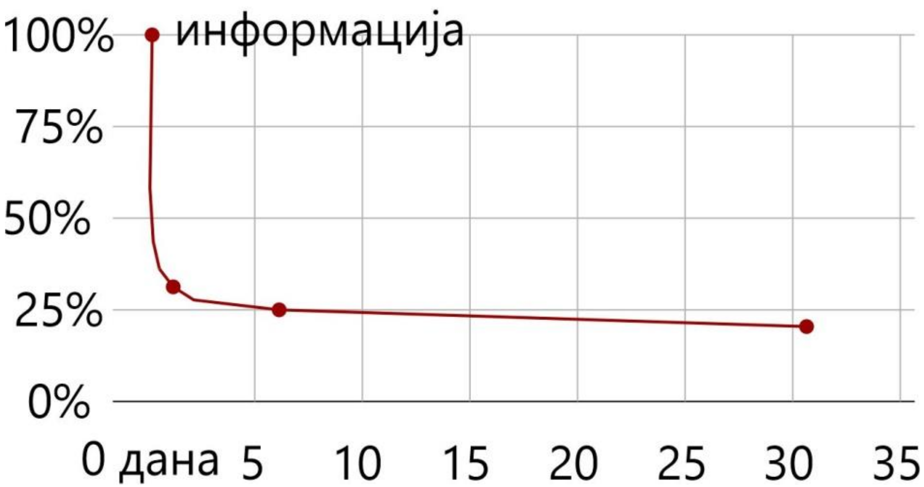
Теорема

Најмањи број покушаја p да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу 2 кугле једнак је највећем природном решењу неједначине:

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq s$$

Крива заборављања

Ебингхаусова крива заборављања



ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **837** спратова помоћу 2 кугле.

100 спратова
и 2 кугле

Хеуристички приступ

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **100** спратова помоћу **3** кугле.

Добро, боље, најбоље …

Боље је имати било какву стратегију, него никакву.

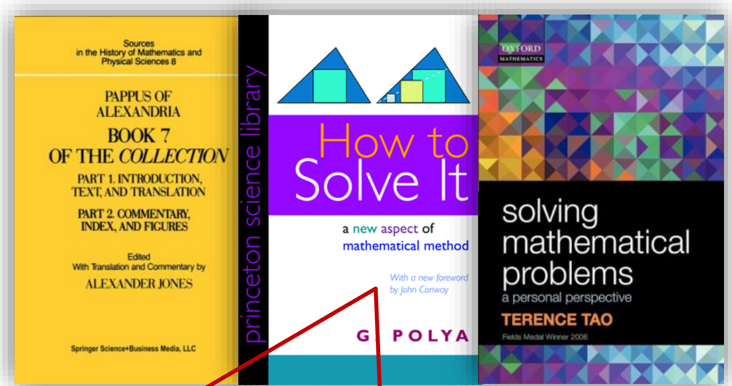
стваралачко мишљење

Постоји ли боља стратегија?

критичко мишљење

Постоји ли најбоља стратегија?

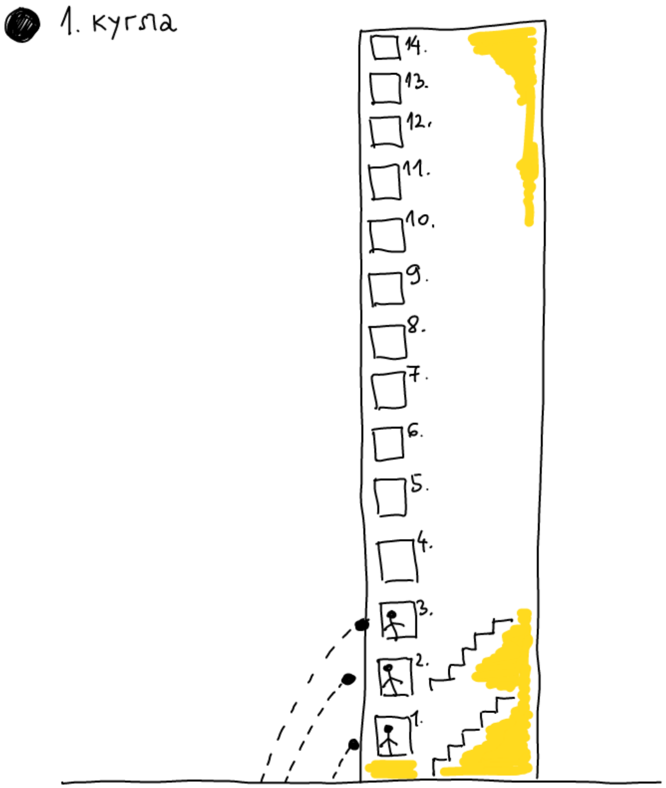
аналитичко мишљење

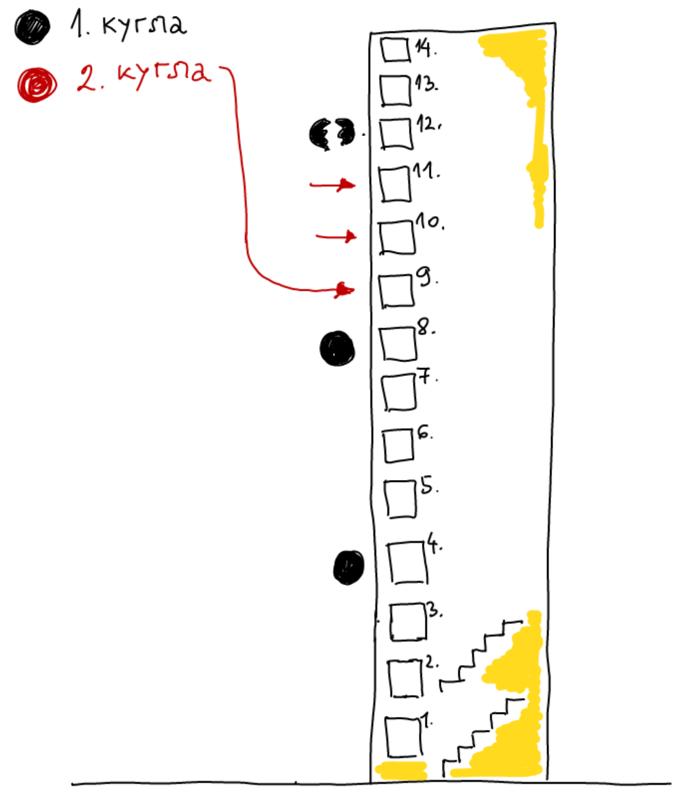


ИЗ ПРЕДГОВОРА Ако наставник с ученицима само механички "теше" увежбане поступке, смањује њихово интересовање и кочи њихов интелектуални развој. Но ако он у својим ученицима буди радозналост дајући им задатке који су примерени њиховом знању и ако им помаже стимулативним питањима, развијаће у њима склоност за самосталним мишљењем и показивати им путеве до њега.

Боље је имати било какву стратегију, него никакву.

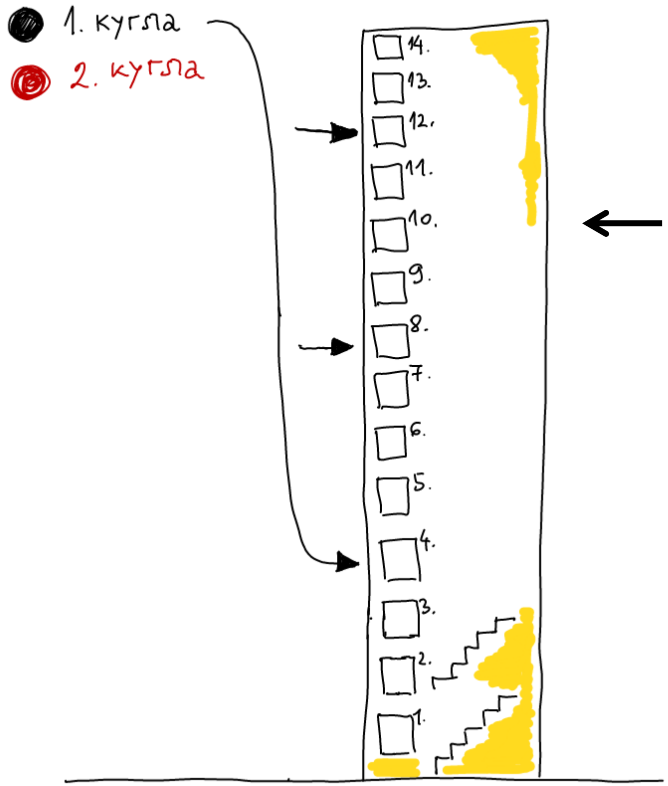
ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **14** спратова помоћу **2** кугле.





Боље је имати било какву стратегију, него никакву.

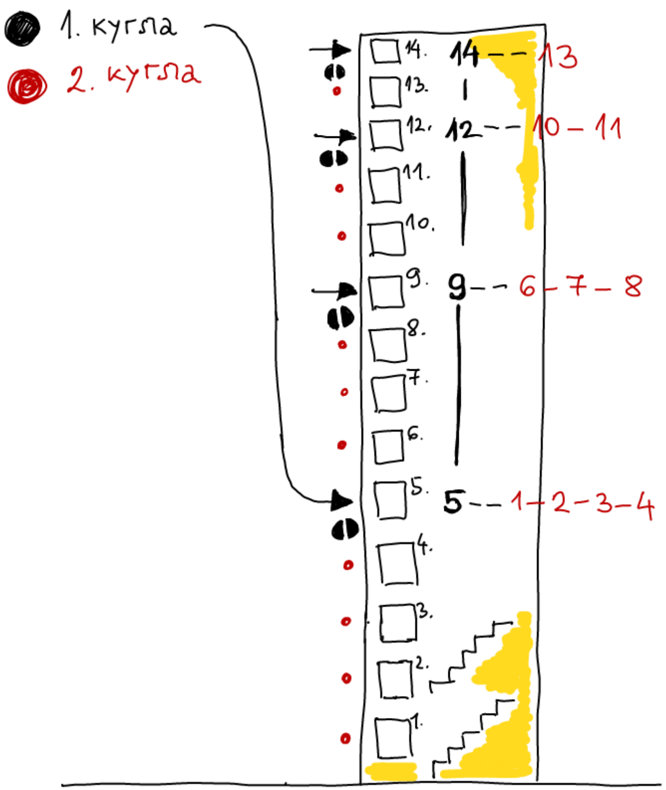
ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **14** спратова помоћу **2** кугле.



Прву куглу бацамо са сваког:	**Највећи број покушаја:**
4. спрата (4-8-12)	3 + 3 = 6

Постоји ли боља стратегија?

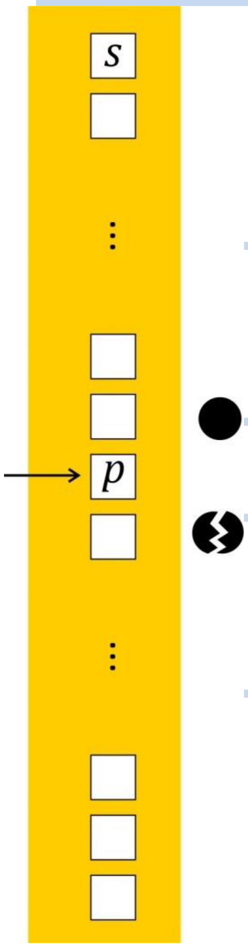
ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **14** спратова помоћу **2** кугле.



Бацања прве кугле.	Кад се прва кугла разбије, бацамо другу куглу.
5	1 → 2 → 3 → 4
9	6 → 7 → 8
12	10 → 11
14	13

Постоји ли најбоља стратегија?

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу **2** кугле.

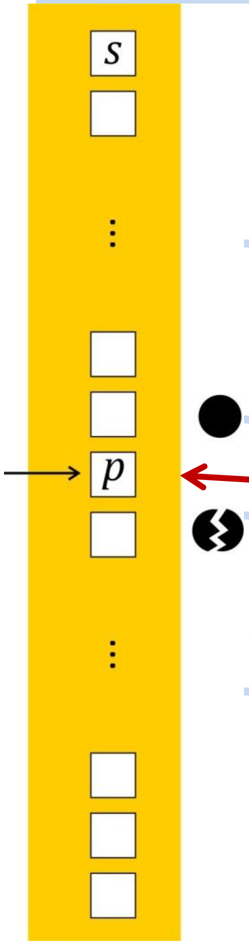


2 кугле
$s - p$ спратова

1 кугла
$p - 1$ спрат

Постоји ли најбоља стратегија?

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од $\boldsymbol{s}$ спратова помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.



$\mathrm{Res}(k, s)$ =најмањи број бацања

$\mathrm{Res}(1, s) = s$

$\mathrm{Res}(k, 0) = 0$

$\mathrm{Res}(k, 1) = 1$

k кугли

$s - p$ спратова

$k - 1$ кугла

$p - 1$ спрат

$$\mathrm{Res}(k, s) = 1 + \min_{1 \le p \le s} \max\{\mathrm{Res}(k-1, p-1), \mathrm{Res}(k, s-p)\}$$

Постоји ли најбоља стратегија?

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **5** спратова помоћу **2** кугле.

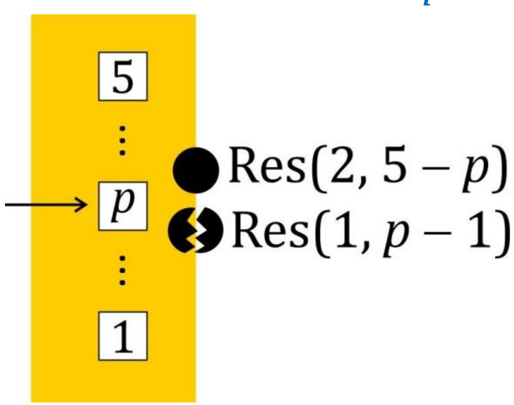
$\mathrm{Res}(1, s) = s$

$\mathrm{Res}(k, 0) = 0$

$\mathrm{Res}(k, 1) = 1$

$\mathrm{Res}(k, s) = 1 + \min\limits_{1 \le p \le s} \max\{\mathrm{Res}(k-1, p-1), \mathrm{Res}(k, s-p)\}$

$$\mathrm{Res}(2, 5) = 1 + \min_{1 \le p \le 5} \max\{\mathrm{Res}(1, p-1), \mathrm{Res}(2, 5-p)\}$$



$\mathrm{Res}(1, 0) = 0$	$\mathrm{Res}(2, 4) = 3$
$\mathrm{Res}(1, 1) = 1$	$\mathrm{Res}(2, 3) = 2$
$\mathrm{Res}(1, 2) = 2$	$\mathrm{Res}(2, 2) = 2$
$\mathrm{Res}(1, 3) = 3$	$\mathrm{Res}(2, 1) = 1$
$\mathrm{Res}(1, 4) = 4$	$\mathrm{Res}(2, 0) = 0$

$$= 1 + 2 = 3$$

Постоји ли најбоља стратегија?

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу k кугли.

```python
import sys

def Res(k, s):
    if k == 1:
        return s

    if s == 0 or s == 1:
        return s

    min = sys.maxsize
    for p in range(1, s + 1):

        res = max(Res(k - 1, p - 1), Res(k, s - p))
        if res < min:
            min = res

    return min + 1
```

$\mathrm{Res}(k, s)$ =најмањи број бацања

$\mathrm{Res}(1, s) = s$

$\mathrm{Res}(k, 0) = 0$

$\mathrm{Res}(k, 1) = 1$

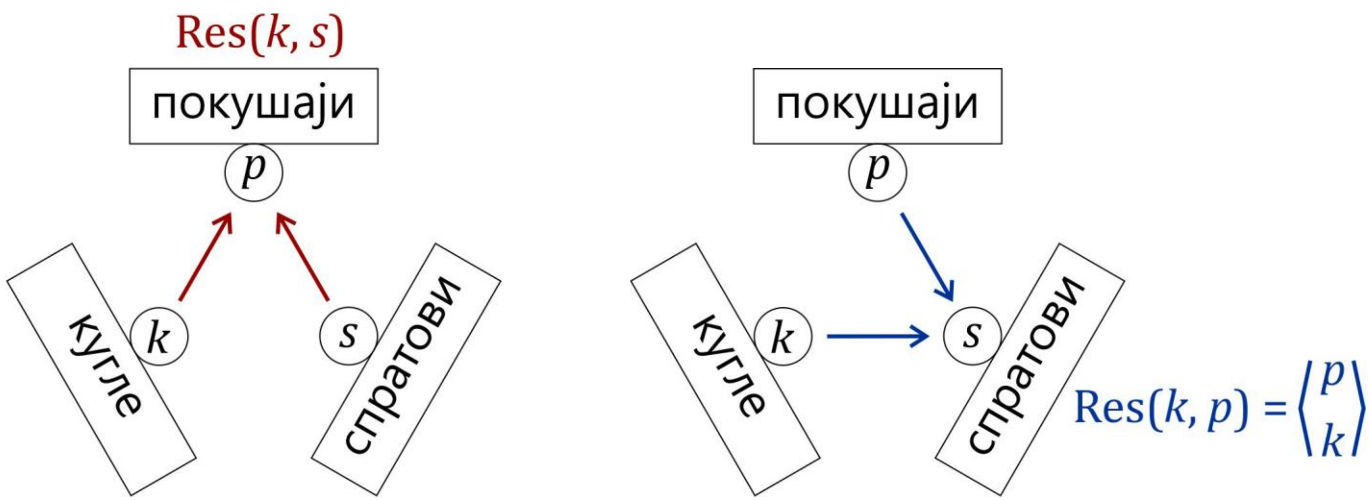
$$\mathrm{Res}(k, s) = 1 + \min_{1 \le p \le s} \max\{\mathrm{Res}(k-1, p-1), \mathrm{Res}(k, s-p)\}$$

```
>>> Res(2,14)
5
>>> Res(3,14)
4
>>> Res(2,36)
```

$O(2^s)$?

Може ли брже?

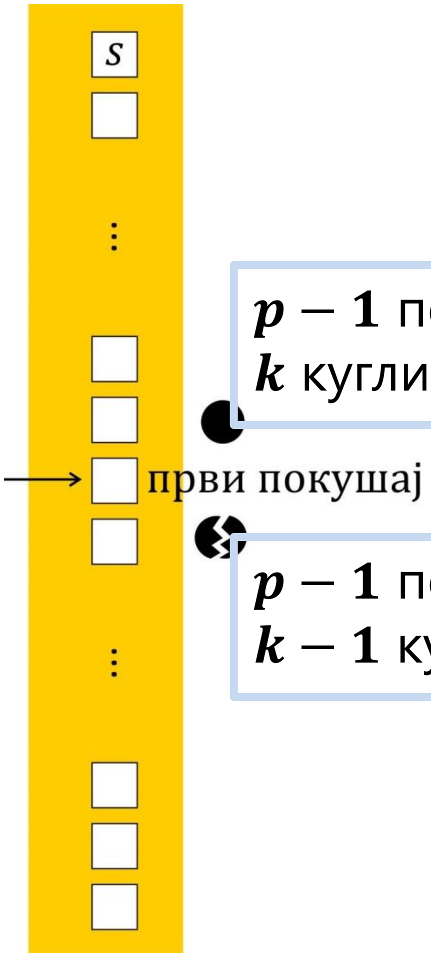
ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од $\boldsymbol{s}$ спратова помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.



ЗАДАТАК Наћи највећи број спратова зграде чији се критични спрат може одредити у највише $\boldsymbol{p}$ покушаја помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.

Може ли брже?

ЗАДАТАК Наћи највећи број спратова зграде чији се критични спрат може одредити у највише $\boldsymbol{p}$ покушаја помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.



$\left\langle {p \atop k} \right\rangle$ = највећи број спратова заграде чији се критични спрат може одредити у $\boldsymbol{p}$ корака са $\boldsymbol{k}$ кугли.

$\left\langle {p \atop 0} \right\rangle = 0$ $\qquad$ $\left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0$

$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \left\langle {p-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {p-1 \atop k-1} \right\rangle + 1$$

$\boldsymbol{p-1}$ покушај
$\boldsymbol{k}$ кугли

$\boldsymbol{p-1}$ покушај
$\boldsymbol{k-1}$ кугла

Може ли брже?

ЗАДАТАК Нађи највећи број спратова зграде чији се критични спрат може одредити у највише $\boldsymbol{p}$ покушаја помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.

$p \mid k$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				
4	0				
5	0				
6	0				
7	0				
8	0				
9	0				
10	0				

$\left\langle {p \atop k} \right\rangle$ = највећи број спратова заграде чији се критични спрат може одредити у $\boldsymbol{p}$ корака са $\boldsymbol{k}$ кугли.

$\left\langle {p \atop 0} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0$

$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \left\langle {p-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {p-1 \atop k-1} \right\rangle + 1$$

Може ли брже?

ЗАДАТАК Наћи највећи број спратова зграде чији се критични спрат може одредити у највише $\boldsymbol{p}$ покушаја помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.

$p\|k$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
2	0	2	3	3	3
3	0	3	6	7	7
4	0	4	10	14	15
5	0	5	15	25	30
6	0	6	21	41	56
7	0	7	28	63	98
8	0	8	36	92	162
9	0	9	45	129	255
10	0	10	55	175	385

$\left\langle {p \atop k} \right\rangle$ = највећи број спратова заграде чији се критични спрат може одредити у $\boldsymbol{p}$ корака са $\boldsymbol{k}$ кугли.

$\left\langle {p \atop 0} \right\rangle = 0$ $\qquad$ $\left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0$

$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \left\langle {p-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {p-1 \atop k-1} \right\rangle + 1$$

>>> Res(2,36)

Може брже!

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од $\boldsymbol{s}$ спратова помоћу $\boldsymbol{k}$ кугли.

```
INT_MAX = 32767

def Res(n, k):
    sprat = [[0 for x in range(k + 1)] for x in range(n + 1)]

    for i in range(1, n + 1):
        sprat[i][1] = 1
        sprat[i][0] = 0

    for j in range(1, k + 1):
        sprat[1][j] = j

    for i in range(2, n + 1):
        for j in range(2, k + 1):
            sprat[i][j] = INT_MAX
            for x in range(1, j + 1):
                res = 1 + max(sprat[i - 1][x - 1], sprat[i][j - x])
                if res < sprat[i][j]:
                    sprat[i][j] = res

    return sprat[n][k]
```

$\left\langle {p \atop k} \right\rangle$ = највећи број спратова заграде чији се критични спрат може одредити у $\boldsymbol{p}$ корака са $\boldsymbol{k}$ кугли.

$$\left\langle {p \atop 0} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \left\langle {p-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {p-1 \atop k-1} \right\rangle + 1$$

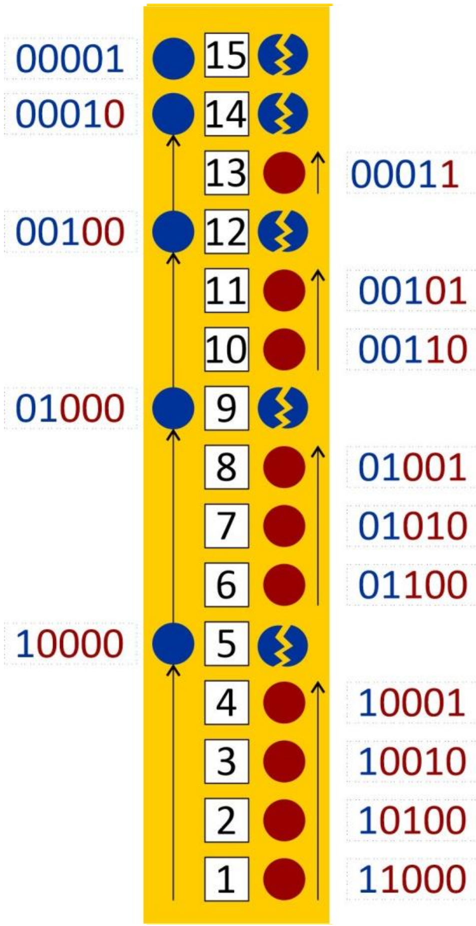
```
>>> Res(2,36)
8
>>> Res(2,100)
14
>>> Res(3,1000)
19
```

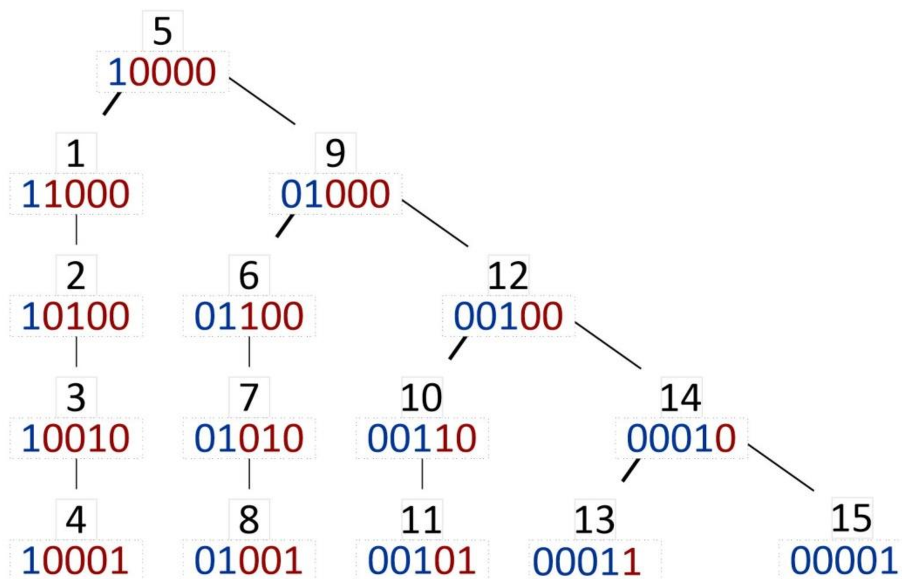
$$\left\langle {p \atop 0} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle {p \atop k} \right\rangle = \left\langle {p-1 \atop k} \right\rangle + \left\langle {p-1 \atop k-1} \right\rangle + 1$$

ТЕОРЕМА

$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \binom{p}{i}$$

Сваком спрату одговара један бинарни низ дужине $\boldsymbol{p}$ у коме се појављује највише $\boldsymbol{k}$ јединица.





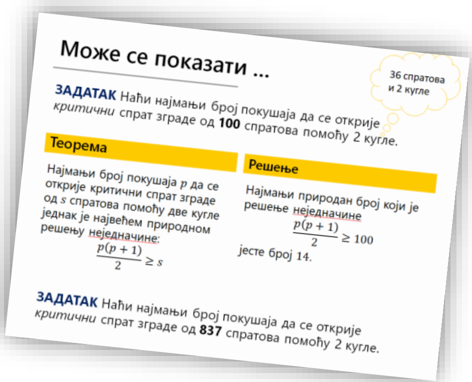
$$\left\langle {p \atop k} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \binom{p}{i}$$

Последица

$$\left\langle {p \atop 2} \right\rangle = \binom{p}{2} + \binom{p}{1}$$

$$= \frac{p(p-1)}{2} + p$$

$$= \frac{p(p+1)}{2}$$


Може се показати ...

36 спратова и 2 кугле

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије *критични* спрат зграде од **100** спратова помоћу 2 кугле.

Теорема

Најмањи број покушаја p да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу две кугле једнак је највећем природном решењу неједначине:

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq s$$

Решење

Најмањи природан број који је решење неједначине

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq 100$$

јесте број 14.

ЗАДАТАК Наћи најмањи број покушаја да се открије *критични* спрат зграде од **837** спратова помоћу 2 кугле.

Пример

$p = 5, k = 3$		
10000	11000	11100
		11010
		11001
	10100	10110
		10101
	10010	10011
	10001	
01000	01100	01110
		01101
	01010	01011
	01001	
00100	00110	00111
	00101	
00010	00011	
00001		

Истраживања

$$?$$

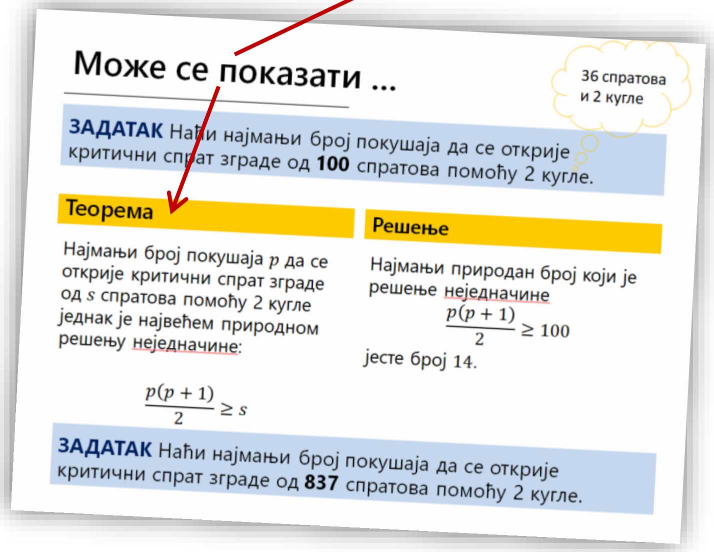
$$=$$

$$? \quad \leq \quad \boxed{\sum_{i=1}^{k} \binom{p}{i}} \quad \leq \quad ?$$

$$\approx$$

$$?$$

Обични примери



Може се показати ...

36 спратова и 2 кугле

ЗАДАТАК Нађи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **100** спратова помоћу 2 кугле.

Теорема

Најмањи број покушаја p да се открије критични спрат зграде од s спратова помоћу 2 кугле једнак је највећем природном решењу неједначине:

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq s$$

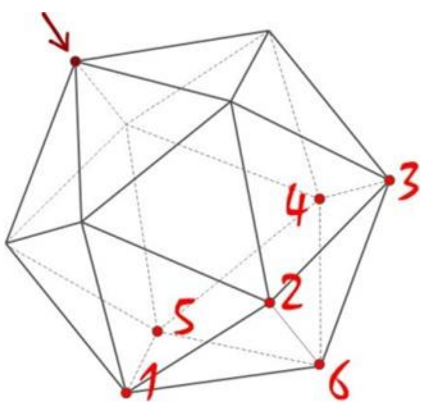
Решење

Најмањи природан број који је решење неједначине

$$\frac{p(p+1)}{2} \geq 100$$

јесте број 14.

ЗАДАТАК Нађи најмањи број покушаја да се открије критични спрат зграде од **837** спратова помоћу 2 кугле.



ТЕОРЕМА $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$

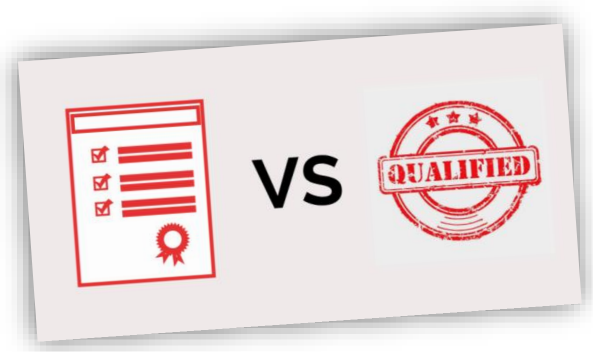
ЗАДАТАК Колико дијагонала има 100-угао?

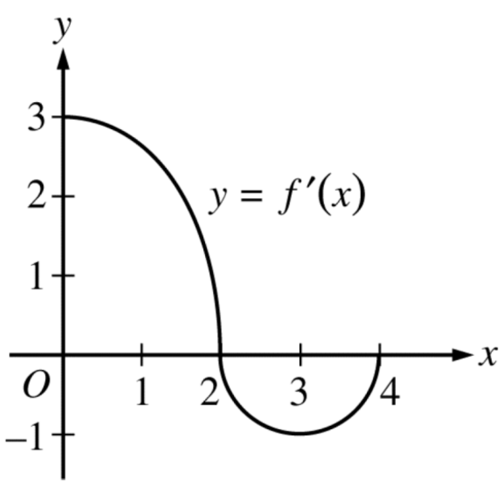
ЗАДАТАК* На шаховском турниру је учествовало пет шахиста, Пера, Мика, Лаза, Сима и Аца. Колико партија је укупно одиграно ако се играло по систему свако са сваким?

ЗАДАТАК* Тачка *O* је почетна тачка шест полуправих. Колико конвексних углова одређују ове полуправе?

ЗАДАТАК** Колико дијагонала има икосаедар?

Обични примери





ЗАДАТАК

a) $\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x^7}}}\right)'$

b) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x^7}}}\mathrm{d}x$

ЗАДАТАК** Функција f је непрекидна на $[0,4]$ и диференцијабилна на $(0,4)$. На слици лево је дат график $y = f'(x)$. Заокружити слово испред тачног одговора.

A) $f(0) < f(2) < f(4)$

B) $f(0) < f(2) = f(4)$

C) $f(0) < f(4) < f(2)$

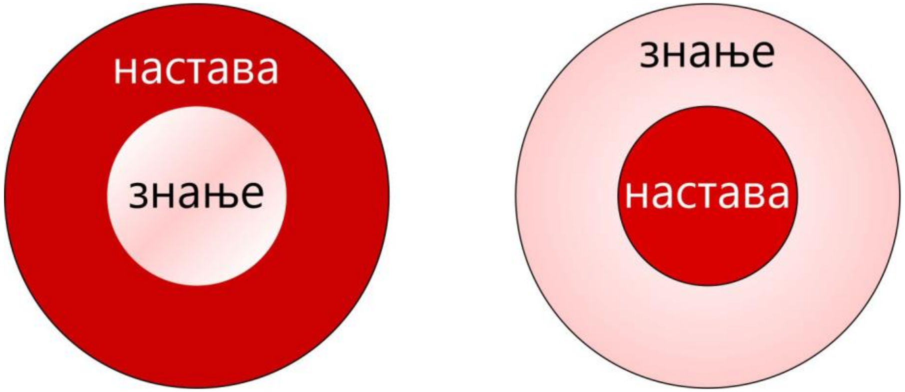
D) $f(4) = f(2) < f(0)$

E) $f(4) < f(0) < f(2)$

Преамбициозни планови, ниски захтеви

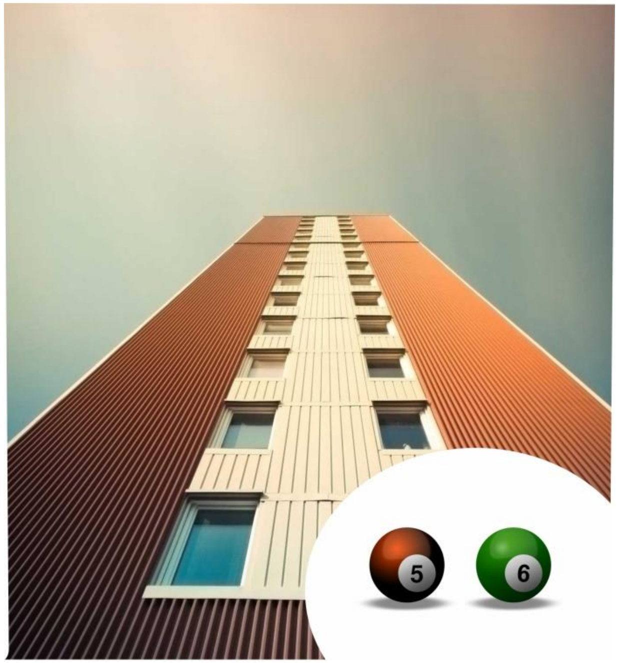
Студенти у просеку запамте само 40% онога што сте им испричали, па зато у курс треба натрпати 250% онога што треба да се научи.

Пол Халмош



- Конструктивистичке теорије (почетак 20. века)
- Planning backwards; Collateral learning (почетак 21. века)

Резиме



- Парцијалне суме биномних коефицијената
  - R. Ash, Information theory
- Сложеност алгоритама
  - J. Flum, M. Grohe, Parameterized Complexity Theory
- „Пар екселанс“ резоновање (Пеонкаре)
  - H. Poincaré, La Science et l'Hypothèse
- **Когнитивне способности су и претпоставка и последица учења математике**
  - M. Danesi (editor), Interdisciplinary Perspectives on Math Cognition