

Kako?

Pitanje je donekle inspirisano dvema temama koje su bile deo školske matematike krajem 20. veka. Štaviše, obe teme su bile zastupljene i u osnovnoškolskoj i u srednjoškolskoj matematici. Jedna tema je **teorija grupa**, druga je **nacrtna geometrija**. Obe spadaju u „noviju matematiku“ jer su nastale na prelazu iz 18. u 19. vek.

Доказ: Из $a \leq b$ следи: $0 \leq b - a$, (својство 14)
 $0 \leq bc - ac$, (својство 15)
 $ac \leq bc$. (својство 14).

Теорема 5. Ако је $a < b$, $d > 0$, онда је:
1. $a + c < b + c$ и 2. $a \cdot d < b \cdot d$.

Доказ: 1. Имамо:
 $a < b \Rightarrow a \leq b$ (по дефиницији релације $<$)
 $a + c \leq b + c$ (својство 14).
Из $a + c = b + c$ следи $a = b$, што је немогуће. Према томе је
 $a + c < b + c$.

2. Доказује се слично као и 1.

Задаци

1. Помоћу комутативног и асоцијативног закона сабирања покажи да је
а) $(a + b) + (c + d) = a + (b + c + d)$; б) $a + b + c = c + a + b$;
в) $a + b + c + d = d + c + b + a$.

2. Да ли комутативни закон важи за одузимање реалних бројева?

3. За сваки од бројева $7, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \sqrt{2} - \sqrt{3}, (a + b)^2$ одреди супротан број.

4. Покажи да је
а) $a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$; б) $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = d \cdot (c \cdot b \cdot a)$.

5. Да ли комутативни закон важи за дељење реалних бројева?

6. За сваки од бројева $3, \frac{1}{3}, \pi, -\frac{1}{\pi}$ нађи реципрочан број.

7. Докажи да је $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.

15. ГРУПА. ПОЉЕ

Помени: Својства реалних бројева.

У досадашњем проучавању бројева поминали смо појам бинарне операције, коју смо дефинисали на следећи начин:

Нека је X произвољан скуп. Функција $f: X \times X \rightarrow X$, која сваком пару (a, b) додељује елемент $f(a, b)$ скупа X , назива се бинарна операција.

4 Matematika za VIII razred osnovne škole

49

Ми ћемо говорити просто о операцији, изостављајући реч бинарна. За означавање операција обично користимо знаке: $+$, $\cdot$, $\circ$, $\ast$, $\oplus$, и др. Уместо $f(a, b)$ пишемо $a + b$, $a \cdot b$, $a \circ b$, $a \ast b$, $a \oplus b$, итд.

Пример 1

У скупу $\mathbb{Q}$ рационалних бројева сабирање је операција. Заста, сваком пару $a, b \in \mathbb{Q}$ одговара $a + b \in \mathbb{Q}$.

Пример 2

Најмањи заједнички садржалац два природна броја је операција. Ако ову операцију обележимо са $\ast$, онда, на пример, имамо:

$$1 \ast 2 = 2, \quad 2 \ast 4 = 4, \quad 9 \ast 6 = 18, \text{ итд.}$$

Вратимо се поново неким својствима реалних бројева. Посматрајмо скуп R и операцију сабирања у скупу R . Уочимо следећа својства операције сабирања:

(1) Сваком пару $a, b \in R$ одговара један и само један реалан број $a + b \in R$.

(2) За $a, b, c \in R$ важи асоцијативни закон

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

(3) За реални број 0 важи

$$a + 0 = a.$$

(4) За сваки $a \in R$ постоји $-a \in R$, тако да је

$$a + (-a) = 0.$$

Узимајући у обзир скуп R , операцију сабирање и претходна својства (2), (3), (4), кажемо да скуп R са операцијом сабирање чини групу. То обично означавамо са $(R, +)$. Елемент 0 називамо неутрални елемент групе $(R, +)$, а елемент $(-a)$ је супротни елемент елемента a .

(5) Како за $a, b \in R$ важи и комутативни закон

$$a + b = b + a,$$

каже се да је група $(R, +)$ комутативна.

Ако претходна разматрања уопштити и посматрамо произвољни скуп G и операцију $\circ$ дефинисану у њему, добијамо појам групе.

Скуп G у коме је дефинисана операција, означамо је са $\circ$, назива се група ако су испуњени услови:

1. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (асоцијативност);

2. постоји $e \in G$, тако да је:

$$a \circ e = e \circ a = a, \quad a \in G;$$

3. за $a \in G$ постоји $a' \in G$, тако да је:

$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Ако је испуњен још и услов:

4. $a \circ b = b \circ a$, $a, b \in G$,

онда се група назива комутативна.

50

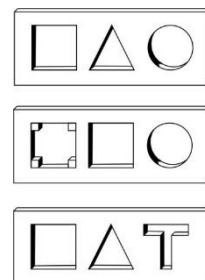
Slike Dve stranice udžbenika iz Matematika za osmi razred koji je bio u upotrebi 1987. godine. Valja istaći rečenicu iz predgovora, tipičnog za to doba: „S obzirom na sistematizovano iznetu materiju po pojedinim manjim odeljcima, na obilje urađenih primera i stil izlaganja, udžbenik je pogodan za samostalni rad učenika“ Inače, ovaj udžbenik sadrži sledeća poglavlja: Relacije i preslikavanja; Osnovne logičke operacije; Polje realnih brojeva; Sličnost; Linearne funkcije, jednačine i nejednačine.

Uvođenje apstraktne algebre (grupe, prstenovi, polja) u školsku matematiku tokom XX veka bilo je posledica razvoja same matematike i uverenje da školska matematika treba da prati tokove savremene matematike u kojima matematičke strukture (grupe, prsteni, polja itd.) zauzimaju veliki značaj. Na takva uverenja veliki uticaj je imala grupa francuskih matematičara (Henri Cartan, André Weil, Claude Chevalley, Jean Delsarte i Jean Dieudonné) koja je

koristila kolektivni pseudonim Nikolas Burbaki. Glavno i nedovršeno Bourbakijevo djelo jesu *Elementi matematike*, višetomna prezentacija glavnih matematičkih disciplina s detaljnim matematičkim dokazima. Ti novi Elementi su jako uticali na školsku reformu matematike, posebno na jedan od najvećih obrazovnih pokreta XX veka u SAD-u, koji je ostao poznat pod nazivom 'New Math'. Veliki zagovornik modernizacije nastave, Jean Dieudonné isticao je da da „Euclidean geometry should no longer be the centre of school mathematics; algebraic structures should take that role.“ Duh ovog pokreta se lepo može osetiti kroz seriju matematičkih udžbenika "The Modern Mathematics for Schools" (1961). Ipak, promene nisu dugo živele. Čitav pokret je uglavnom bio bezuspešan i relativno brzo napušten pod teretom sve brojnijih kritika. Morris Kline, u svojoj poznatoj knjizi *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math* iz 1973. Godine ozbiljno kritikuje "novu matematiku". Knjiga je stekla veliku popularnost i ubrzo je bila prevedena na mnoge jezike.

Razvoj i mesto nacrtne geometrije u školskim i univerzitetskim programima ima drugačiju istoriju od apstraktne algebre. Ona je bila uvedena prvenstveno iz praktičnih, tehničkih i pedagoških razloga, a tek kasnije je dobila i širi matematički značaj. Nacrtanu geometriju je sistematski uveo Monge krajem XVIII veka. Tokom XIX veka nacrtna geometrija ulazi u tehničke škole, vojne akademije i mnoge gimnazije širom Evrope, pre svega zbog praktične primene u inženjerstvu i razvijanje prostorne imaginacije. Ovi argumenti se ponavljaju u mnogim udžbenicima i reformskim tekstovima XIX i XX veka, i nacrtna geometrija postaje standardni deo srednjoškolskog programa matematike, i to prevashodno u srednjoj i istočnoj Evropi. Počev od 1970-ih dolazi do postepenog smanjenja njenog mesta u programima, pre svega zbog razvoja tehnologije, računarske grafike i CAD sistema, i pomeranja školske matematike ka analizi i diskretnoj matematici. Danas je veoma aktuelni pokušaji da se „nacrtna geometrija“ vrati u nastavu u jednom modernizovanom i reinterpretiranom obliku kroz alate koje nude savremene tehnologije (GeoGebra, 3D modele itd.)

Slika. Duh nacrtne geometrije lepo ilustruje zadatak da se napravi jedan univerzalni čep kojim se mogu zatvarati tri različita otvora – kružni, kvadratni i trougaoni.

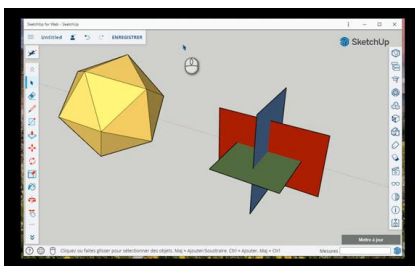
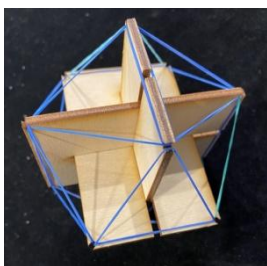


Iako su u školsku matematiku došle sa različitih strana, apstraktna algebra iz teorije, a nacrtna geometrija iz prakse, obe su doživele sličnu sudbinu u školskim programima. Početkom 21. veka sa podozrenjem gleda na ideju da ove oblasti budu deo školske matematike u jednom primerenijem obliku. Da se ne bi ponovili prethodni promašaji valja dobro analizirati razloge koji su do njih doveli. Nisu problematični napredni sadržaji sami po sebi, niti je školski uzrast potpuno nedorastao bazičnim idejama naprednih sadržaja, već su problematični, način na koji sadržaj prezentuje i očekivanja kako će neko da nauči taj sadržaj. Sasvim uprošćeno rečeno, implementacija nove matematike je uglavnom bila zasnovana na euklidovskoj paradigmi prezentovanja konsolidovanog sadržaja, pri čemu su psihološka saznanja uglavnom korišćena da se takav pristup opravda. Mnogo više se može očekivati od sasvim drugačije strategije: iskoristiti psihološka saznanja kao putokaze za postepeno formiranje konsolidovanog matematičkog sadržaja zasnovano na prirodnom razvoju odgovarajućih koncepta.

Cilj trećeg zadatka o ikosaedru u širem smislu, jeste da primeni novu strategiju na „prognane“ oblasti – teoriju grupa i nacrtnu geometriju, u duhu dekatovskog pravila [1] da savetuje da se *nauka stiže* samo kada se u intuitivno i neposredno shvate koncepti i mislima se obuhvati celina logičke argumentacije, ili kraće kada se *činjenice vide* (*seeing the facts*).

Zadatak. Učiniti „vidljivom“ grupu rotacionih simetrija ikosaedra – rotacija oko osa nakon kojih ikosaedar ostaje u istom položaju.

Preporučeno je rešavanje u dve glavne faze. U prvoj, trebalo je konstruisati model ikosaedra pogodan za proučavanje ikosaedra. Studente sam podsetio **šta sve može da znači „konstruisati“**: sastaviti 3D realni model, napraviti 3D prikaz upotrebom pogodnog softvera, pa čak i ispisati koordinate temena i jednačine ivica, i strana birajući neki pogodan položaj ikosaedra u koordinatnom sistemu.



$$\begin{aligned} &(0, \pm 1, \pm \varphi) \\ &(\pm 1, \pm \varphi, 0) \\ &(\pm \varphi, 0, \pm 1) \\ &\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \end{aligned}$$

Слика. Слева надесно: реалан модел је направљен од три златна правоугаоника; виртуелни 3Д модел направљен употребом геометријског софтвера; апстрактни модел задат координатама темена икосаедра.

Друга фаза jeste da se izabrani model iskoristi kao očigledno sredstvo da se proučavaju odnosi između rotacionih simetrija ikosaedra. Za ovu fazu, incijalno je trebalo popisati sve rotacione simetrije ikosaedra i posmatrati njihove međusobne odnose kroz operacije nadovezivanja simetrija i „undo“-operacije kojom se poništava dejstvo simetrija. Naravno, dozvoljena je bila mogućnost da se napiše i program koji olakšava računanje sa rotacionim simetrijama. Kao krajnji izazov je postavljeno pitanje „Може ли се некако просто видети да је група ротационих симетрија икосаедра проста?“ У питању је садржана математичка теорема која је имала велики значај у математици. Неки студенти се нису сећали шта значи да је нека група проста, а није помогло ни „објашњење“ да она нема прaviх нормалних подгрупа. Сvakako cilj је био да „познате ствари“, поново науче на један нов начин.

У наставку је развијен један увод у теорију група дуж правца одређених паровима мисаоних операција. Наравно, циљ није да се потпуно прикажу све мисаоне операције (што не би ни било могуће), нити да се пружи свеобухватни увод у теорију група (што такође није могуће). Циљ је да се истакне суштину повезаност два психолошка тока –мишљења и активног учења на репрезентативним примерима група, током којег се спонтано све дубље открива теорија група. Садржај увода је следећи:

позитивна и негативна аналогија	–	Аритметика часовника
анализа и синтеза	–	Кејлијев граф
индукција и дедукција	–	Симетрије правилних полигона
апстракција и конкретизација	–	Репрезентације група
генерализација и специјализација	–	Grupe permutacija

Analogija

Људска меморија ради по принципу препознавања шаблona. Postupanje на основу сличности са неком познатом ситуацијом уз прилагођавање уoченим разликама јесу суштinsке карактеристике аналогije, мисаонog процесa који игра велику улогу у решавању проблема било које врсте, и који се често назива „srž spoznaje“. Сама реч аналогija потиче од грчке речи (грч. αναλογία – podudaranje) [грч. analogia – sklad, pravilnost, odnos, srodnost], често се говори о позитивној и негативној аналогiji, јер је веома важно узети у обзир и сличности и разлике у

situacijama koje nisu istovetne. Postupanje po analogiji dobar je put da istražuju i nova područja, ali i da se uči na greškama.

Aritmetika časovnika

Sasvim obično pitanje „Ako mala kazaljka pokazuje na 8, na koji broj će pokazivati posle 8 sati?“ može biti motivacija da se razvije tzv. aritmetika časovnika, po uzoru na *običnu* aritmetiku. Aritmetika časovnika je zasnovana na specifičnoj računskoj operaciji koju primenjujemo na brojeve prikazane na brojčaniku sata. Kada tu novu računsku operaciju primenimo na neka dva broja sa brojčanika, rezultat je običan zbir ta dva broja ukoliko je manji od 12, a u suprotnom je zbir umanjen za 12. Ako i tu novu operaciju označimo sa $\oplus$, sledeći račun daje odgovor na postavljeno pitanje: $8 \oplus 8 = 8 + 8 - 12 = 4$. Nije teško uočiti analogije između „obične“ aritmetike i aritmetike časovnika. Brojeva prava je zamenjena brojčanicom, svojevrsnom „brojevnom kružnicom“. Novo sabiranje se može posmatrati kao skakanje sa broja na broj u smeru kazaljke na satu. Tom novom sabiranju odgovara i oduzimanje koje se može predstaviti skakanjem u smeru suprotnom smeru kazaljke na satu.

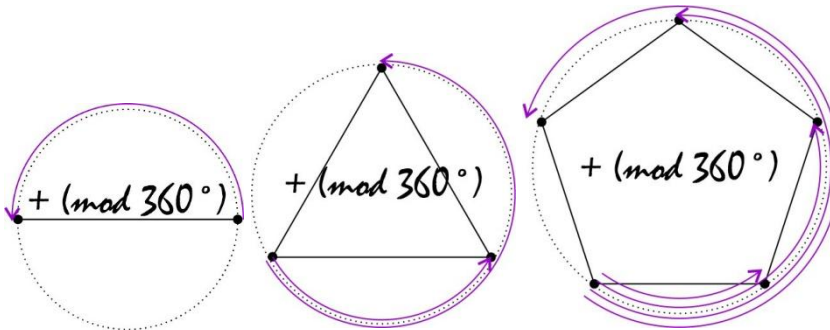


Slika ??. Prikazane su neke analogije između obične aritmetike i aritmetike časovnika.

Nova aritmetika podseća na sve faze učenja obične aritmetike: 1) Računanje; 2) Izučavanje svojstava računskih operacija (npr. Da li je tačna jednakost $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, kada se promenljive zamene bilo kojim brojevima sa brojčanika?) 3) Rešavanje jednačina:

Navika da koristimo brojčanik sata sa 12 podeoka ne treba da nas sprečava da zamislimo i drugačije satove zasnovane na drugačijim podelama dana. Svaki od tih satova generiše jednu tablicu sabiranja na kojoj se zasniva odgovarajuće

aritmetika. Ukoliko se izabere sat sa n podeoka, odgovarajuće operacije se nazivaju sabiranje, odn. oduzimanje po modulu n .



Aritmetike časovnika zapravo reprezentuju tzv. rotacione simetrije pravilnih poligona. Rotaciona simetrija poligona jeste rotacija poligona oko njegovog centra posle koje se položaj tog poligona ne menja. Sve rotacione simetrije pravilnog poligona su određene celobrojnim umnošcima tzv. karakterističnog ugla. Broj različitih rotacionih simetrija pravilnog poligona jednak je broju njegovih temena. Prirodno se aritmetika nekog časovnika prevodi u aritmetiku rotacionih simetrija odgovarajućeg pravilnog mnogougla.

$$180^\circ + 180^\circ = 0 \pmod{360^\circ}$$

$$2 \cdot 120^\circ + 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ + 240^\circ = 120^\circ \pmod{360^\circ}$$

$$2 \cdot 72^\circ + 4 \cdot 72^\circ = 144^\circ + 288^\circ = 72^\circ \pmod{360^\circ}$$

Analiza i sinteza

Analiza i sinteza su ključni procesi u „hemiji“ razumevanja i rešavanja problema. Još od antičkih tekstova postoje obimne rasprave o ovim metodama. Ipak opšti opisi ovih metoda uglavnom su nepotpuni i uspevaju da pokriju tek neke njihove aspekte. U najširem smislu, analiza predstavlja razbijanje složenih koncepata i sistema na manje ideje i delove da bi se razumela njihova struktura, uočile veze među njima i proučile njihove funkcije u celini. Nasuprot tome, sinteza je kombinovanje različitih ideja i delova u celinu koja uglavnom nije prosta ukupnost polaznih komponenti. Najčešće se primenjuju kombinovano, dajući jedinstvenu **analitičko-sintetičku metodu**. Svako istraživanje počinje svojevrsnom analizom odgovarajućih problema i pitanja. Ta analiza zapravo predstavlja traženje puta do rešenja. Ta potraga je često puna stranputica koje mogu sadržati i veoma korisne tragove za nastavak analize.

Analiza jeste reč koja učestvuje u nazivima velikog broja matematičkih disciplina: matematička analiza (i razne podoblasti, matematička analiza,

kompleksna analiza, funkcionalna analiza); analitička geometrija. U svakom od ovih slučajeva poreklo imena ističe svojevrsnu metodologiju rešavanja problema: osnovno oruđe matematičke analize jesu granični procesi (nastali iz antičke metode iscrpljivanja), dok je metod koordinata glavni alat analitičke geometrije.

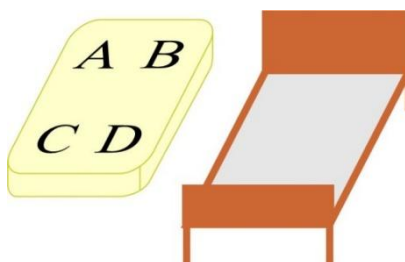
Sinteza je postupak komplementaran analizi, i **uglavnom** polazi sa mesta na kome se završila analiza, a završava se tamo odakle je analiza započeta. Sinteza **uglavnom** zanemaruje stranputice analize i prikazuje samo logički uređen put, koji matematičari često završavaju rečima „što je i trebalo dokazati“. Veliki problem školovanja predstavlja zanemarivanje analitičkog pristupa problemima, uz isticanje u prvi plan samo sintetičkog prikaza rešenja. Reč *analitika* bi se mogla uzeti za stari naziv za *logiku*. Ova promena naziva nije beznačajna. Dok su analitiku zanimali tokovi misli pri rešavanju problema, logiku više brine koherentnost sinteze.

Kejlijev graf Sledeći problem predlaže Brian Hayes kao zanimljiv uvod u teoriju grupa.

Zadatak. Proizvođači dušeka za spavanje savetuju da se dušek povremeno preokrene da bi se izbeglo neravnomerno habanje dušeka. Koja je najbolja strategija periodičnog preokretanja dušaka?

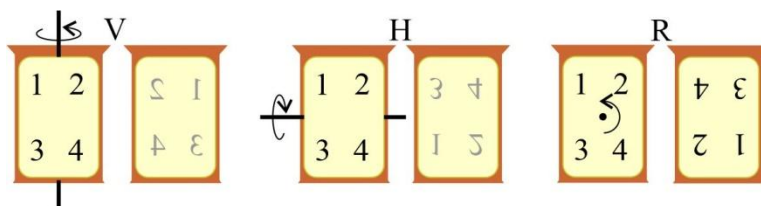
Pretpostavimo da je dušek pravougaonog oblika. Bitno je da uočimo „statičke“ i „dinamičke“ aspekte probleme:

1. sve moguće načine da promenimo položaj dušeka;
2. sve moguće položaje dušeka postavljenog u ram kreveta.



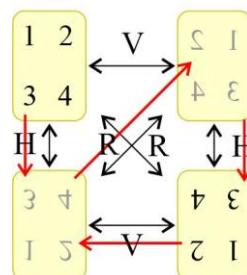
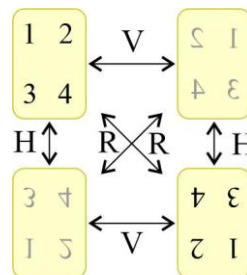
Da bismo lakše pratili promene položaja dušeka pogodno je njegove uglove obeležiti slovima (ili brojevima, bojama i sl.).

Postoje tri osnovna načina da promenimo položaj dušeka: vertikalno prevrtanje (V); horizontalno prevrtanje (H); rotacija (R). Ove promene položaja dušeka nazvaćemo transformacijama.



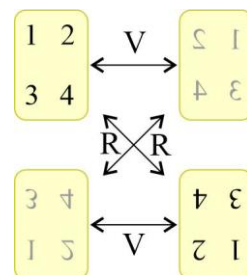
Uočavamo i da se dušek može na četiri načina postaviti u ram kreveta. Ono što je najvažnije jeste međusobna povezanost svih mogućih položaja i svih mogućih promena položaja. Zgodno je tu povezanost prikazati pomoću grafa čiji su čvorovi moguća stanja, a ivice su strelice pri čemu svaka strelica predstavlja odgovarajuću transformaciju iz polaznog stanja u krajnje stanje.

Graf predočava obilje informacija o transformacijama, odn. mogućim položajima grafa. Uzastopne primene transformacija označavaćemo nadovezivanjem slova kojima su označene te transformacije. Na primer, izraz HRHV označava sledeći niz radnji: horizontalni preokret – rotacija – horizontalni preokret – vertikalni preokret. Slika desno pokazuje promene stanja posle transformacije HRHV primenjene na početnu poziciju duška.



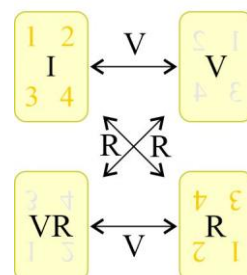
Izdvajamo neka zapažanja.

1) Dve uzastopne primene iste transformacije vraćaju u isto stanje. Na ovo svojstvo ukazuje dvosmernost svake strelice. Da bismo ovo pogodnije zapisali uvodimo oznaku I za „transformaciju“ koja ne menja stanje (i koju najčešće primenjuje većina korisnika duška): $RR = I$, $HH = I$, $VV = I$. Primetimo da se slovo I može zanemariti u složenijim izrazima $RI = R$, $HRI = HR$, $IVIR = VR$ itd.



2) Redosled primene dve transformacije nije bitan: $HR = RH$, $VH = HV$ itd. Kažemo da je nadovezivanje transformacija komutativno.

3) Svake transformacija se može zameniti uzastopnom primenom preostale dve transformacije: $HR = V$, $VH = R$, $RV = H$ itd. Ako sa grafa iznad izostavimo strelice označene istim slovom, dobijamo graf koji opisuje promene između bilo koja dva stanja primenom preostale dve osnovne transformacije.



Primenom zakonitosti $RR = I$, $VV = I$ i $VR = RV$ računamo vrednost bilo kog izraza sastavljenog od vertikalnih obrta i rotacija. Na primer, $RVRV = RRVV = IVV = VV = I$. Ova jednakost znači da je uzastopna primena redom transformacija R , V , R , V istovetna „mirovanju“, tj. identičnoj transformaciji. Slično pokazujemo da je $VRVRV = V$

Navikli smo da transformacije opisujemo početnim i krajnjim stanjem. Promena perspektive je ovde od ključnog značaja. Svako stanje se može opisati transformacijama koje su izvršene na nekom unapred izabranom početnom stanju. Dobijeni graf se naziva Kejljev graf i označava svojevrstu tablicu nadovezivanja transformacija. Identitete $RVRV = I$ i $VRVRV = V$ možemo pročitati sa Kejljevog grafa. Uvek polazimo od I i pratimo gde se završava odgovarajuća putanja. Putanja $RVRV$ se završava u I , a $VRVRV$ u V .

Indukcija i dedukcija

Indukcija i dedukcija zauzimaju posebno značajno mesto u matematici. Naime, i sama matematika se, na sebi specifičan način, bavi ovim konceptima, a rezultati su zaista impresivni. Indukcija i dedukcija su zapravo bazični pojmovi matematičke logike. Princip matematičke indukcije, koji suštinski određuje strukturu prirodnih brojeva, prepoznat je kao fundamentalni princip izgradnje i structure jezika, posebno tzv. formalnih jezika, među kojima se danas posebno izdavaju programski jezici. Deduktivni sistemi predstavljaju jasno utvrđene mehanizme valjanog zaključivanja unutar nekog induktivno izgrađenog jezika. Već ove dve uopštene odrednice ukazuju na jedan od najznačajnijih doprinosa matematičke logike – na izgradnju računara i neprekidno pomeranje granica njegovih mogućnosti.

Opšta značenja termina *indukcija* i *dedukcija* su nešto šira od značenja koje imaju u matematici. Najrasprostranjenije „definicije“ indukcije kao *metode zaključivanja od posebnog ka opštem*, a dedukcije kao *metode zaključivanja od opšteg ka posebnom* nisu mnogo upotrebljive. Ovakve „definicije“ bi u didaktičkom smislu mogle poslužiti samo za razvoj kritičke diskusije. Mnogo bolje značenje ovih termina određuje poreklo ovih reči. Latinska reč *inductio* znači uvođenje, navođenje, pobuđivanje. Latinska reč *deductio* znači izvlačenje. Indukcija i dedukcija imaju mnogo veću vrednost za didaktički razvoj neke teorije, kada im se značenje približi matematičkom smislu i poveže se sa analitičko-sintetičkim metodom.

Indukcija bi se mogla posmatrati kao misaona operacija svojstvena za postepenu izgradnju nekog sistema, pri čemu se u svakom koraku te izgradnje vodi računa o svojstvima koja ostaju sačuvana i onima koja prestaju da važe. Osobine čitavog sistema obično nisu poznate, i pokušaj prenošenja osobina uslosnažavanjem sistema predstavlja upravo suština induktivne metode. Pažljiv

induktivni način razmišljanja očuvanje svojstava teži da poveže sa samim koracima usložnjavanja sistema, čime će idealno stići i do samih osobina sistema. Uverenje da se izvesna osobina sa jednog nivoa izgradnje sistema prenosi na naredni nivo može biti i pogrešno, što kaže da "indukcija nije pouzdana". Ovakva izjava potpuno iskrivljuje suštinu indukcije. Kao što analiza problema može da dovede do starnputice u rešavanju, tako može biti pogrešna i pretpostavka da neke osobine ostaju očivane usložnjavanjem sistema. Ovo svakako ne treba posmatrati kao mane ovih metoda, već neminovnosti svake kreativne delatnosti koje približavaju rešenju.

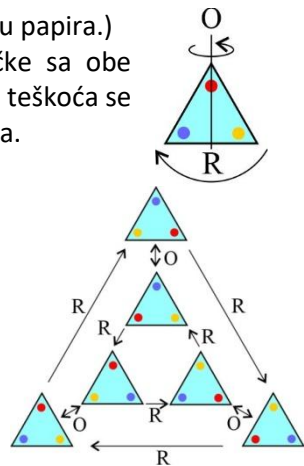
Dedukcija izvodi osobine o zatvorenom, već konstruisanom sistemu i o njoj je već bilo reči. Dedukcijom se izvode zaključci iz polaznih osobina, aksioma primenom pravila koja poštuju osnovno načelo "ne sme se nanositi šteta istinitosti"; iz tačnih pretpostavki izvode se tačne pretpostavke. Deduktivna metoda čini osnovu sintetičke metode u matematici. U tom smislu, euklidovski način prezentovanja geometrije, baziran na dedukovanju posledica polaznih aksioma, naziva se i sintetičkom geometrijom.

Grupe simetrija pravilnih poliedara

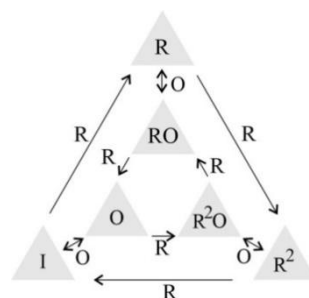
Ista istraživanja mogu se sprovesti za dušeka različitih oblika. Posebno su važni slučajevi pravilnih mnogouglova. (Umesto dušeka može se koristiti providni papir izrezan u obliku pravilnog mnogougla, a okvir kreveta može zameniti podudaran pravilan mnogougao nacrtan na listu papira.)

Postavljanje trougla u trougaoni okvir; obeležene tačke sa obe strane i postavljanje u trougaono postolje. Bez posebnih teškoća se može ponoviti rešavanje problema pravougaonog dušeka.

a) Nacrtati graf čiji su čvorovi svi mogući položaji „dušeka“ povezani strelicama koje odgovaraju transformacijama: preokretom oko jedne unapred izabrane ose rama (O) i rotacijom za karakterističan ugao tog mnogougla (R).



b) Nacrtati odgovarajući Kejljev graf. U Kejljevom grafu svaki položaj duška se opisuje transformacijom kojom se taj položaj dobija polazeći od izabranog početnog položaja. Da bi se pojednostavilo zapisivanje, više uzastopnih primena iste transformacije skraćeno se zapisuje navođenjem broja ponavljanja u gornjem indeksu; RR, RRR, RRRR itd. skraćeno zapisujemo R^2 , R^3 , R^4 itd. Nije teško odrediti kojim se transformacijama mogu opisati svi položaji duška



c) Otkriti neke zakonitosti o nadovezivanju transformacija. U svim gornjim slučajevima nadovezivanje transformacija nije komutativno; npr. $RO \neq OR$. Tačne su i sledeće zakonitosti. $OO = I$, $R^3 = I$, $OR = R^2O$. Spisak ove tri zakonitosti definiše svojevrsni račun sa transformacijama. Na primer, $OROR^2OR^3O = \dots = R$

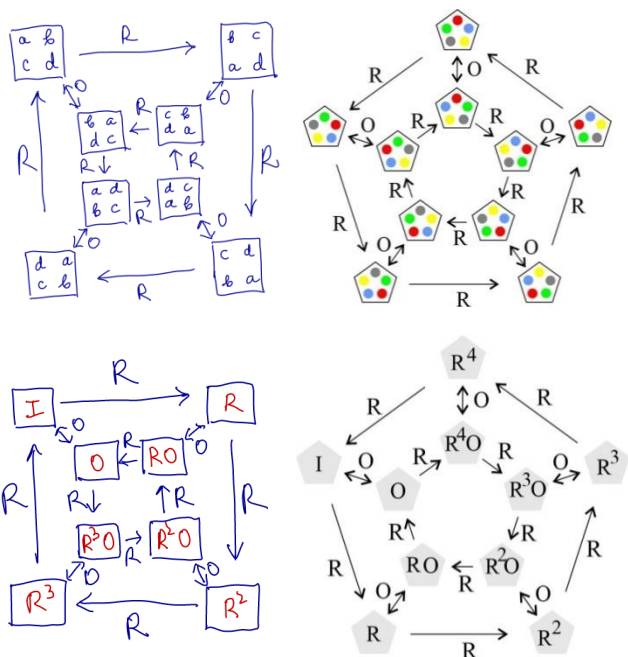
d) U računima poput ovog prirodno se nameće pitanje rešivosti jednačina. Na primer, odrediti, ako postoji, transformaciju $\$X\$$ kojom se dušek iz položaja R^2O prevodi u R, tj. da je $R^2OX=R$. Nije teško pročitati rešenje sa grafa.

Međutim, graf pomaže da se uoči mnogo opštiji pristup rešavanju jednačina $AX=B$, gde su A i B neke poznate transformacije. Rešenje X nalazimo tako što na putanju suprotno usmerenu putanji A nadovežemo putanju B. Zato bi „preusmeravanje strelica“ bila posebno korisna operacija nad transformacijama. Takva operacija bi se mogla nazvati ‘undo’, ali je uobičajen naziv **inverz**, jer se njome poništava dejstvo neke transformacije, tj. menja se smer strelica y ppaφy: O^{-1} okreće smer strelice O i R^{-1} okreće smer strelice R. Pošto je O dvosmerna strelica, dejstvo obrta poništava još jedna primena istog takvog obrta, pa je zapravo $O^{-1}=O$. Nije teško uočiti i da je $R^{-1}=R^2$. Inverz bilo koje putanje jeste zapravo suprotno usmerena putanja.

Za svaki pravilan mnogougao moglo bi da se sprovede isti istraživački scenario. Na sličan način se može razviti račun kada zamislimo da je dušek drugačijeg oblika.

Za zadato $\$n\$$, odgovarajući račun se naziva *diedarskom grupom* reda $\$n\$$.

Slika Prikazani su Kejljevi grafovi dve diedarske grupe. Diedarska grupa kvadrata je određena jednakostima: $OO = I$, $R^4 = I$, $OR = R^3O$. Diedarska grupa petougla je određena jednakostima: $OO = I$, $R^5 = I$, $OR = R^4O$.



Apstrakcija i konkretizacija

Apstrakcija je izdvajanje određenih karakteristika skupine predmeta, uz zanemarivanje nekih drugih svojstava koja se odbacuju kao nebitna. [abstrahere = izdvajati, odvajati; trahere = vući] Apstrakcija je misaoni proces na kome se temelje fundamentalni procesi karakteristični za čoveka – govor i mišljenje. Konkretizacija je suprotno usmerena, ka konstrukciji pojedinačnih primera apstraktnih pojmova [concretus – stvaran, predmetan].

Za računanje i rešavanje jednačina u nekoj diedarskoj grupi zadatog reda, uopšte nije potrebno razmišljati o simetrijama odgovarajućeg pravilnog poligona, niti gledati u odgovarajući graf. Zanemarujući potpuno kontekst u kojem su razvijene diedarske grupe, možemo dati sebi priličnu slobodu u definisanju različitih računa. Na primer, možemo proučavati apstraktan račun

$$\langle a, b; a^3 = I, ab = b^2a \rangle$$

bez neke posebne polazne motivacije.

Generalizacija i specijalizacija

Generalizacija ili uopštavanje sastoji se u povezivanju apstrakcijom izdvojenih karakteristika u jednu celinu, a uz znanje da se te odvojene odlike mogu naći i u drugim slučajevima i da ćemo uvek kad budu te karakteristike zajedno date, imati posla sa istom vrstom predmeta ili pojava.

Grupe permutacija

Diedarske grupe na izvestan način „mere“ simetričnost objekta. Ista ideja se prilično opšta i mogla bi se razviti u sasvim različitim kontekstima. Kako bismo poređali sledeće polinome od tri promenljive prema simetričnosti:

$$x_1 + x_2x_3, x_1x_2 + x_2x_3, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1?$$

Intuitivno, izraz je simetričniji što je manje „osteljiv na permutacije (pretumbavanje) promenljivih“. Za svaku permutaciju promenljivih, npr.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

transformišemo i izraze na odgovarajući način:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2x_3 & x_1x_2 + x_2x_3 & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ x_3 + x_2x_1 & x_3x_2 + x_2x_1 & x_3x_2 + x_2x_1 + x_1x_3 \end{pmatrix}$$

Matematika u nastajanju, slikovito nazvana i *živa matematika*, jeste induktivna i konkretna, sa izrazitim analitičkim pristupom problemima. *Konsolidovana matematika* je deduktivna i apstraktna, sa pretežno sintetičkim pristupom uobličavanja znanja. Nastava bi trebalo da bude stalna borba između ova dva polariteta.

Aktivno mišljenje je jedini pokretač aktivnog učenja.

Navedene misaone operacije su osnova ljudskog mišljenja. Predstavljanje su kroz naizgled suprotstavljene parove koji su neophodni kako sa rešavanje problema tako i za stvaranje pojmova. Stvaranje pojmova mora biti spontano, produktivno, nikako reproduktivno.

Ričard Skemp (1919–1995) je pionir u proučavanju psihologije učenja matematike. Balansirajući između matematike i psihologije, i sa teorijskog i sa praktičnog stanovišta, publikovao je veliki broj knjiga za osnovne i srednje škole, ali je razvio i opštu teoriju složenog učenja čoveka.

... deca neće biti uspešna u učenju matematike ukoliko se ne podučavaju na način koji im omogućava da upotrebe svoju inteligenciju umesto da uče napamet.

Др Небојша Икодиновић

НАПРЕДНИ КОНЦЕПТИ НА ЕЛЕМЕНТАРНОМ НИВОУ
— ТЕОРЕМЕ НЕМОГУЋНОСТИ¹

Апстракт. Напредне концепте математике треба пажљиво планирати и систематски разрађивати од раног школовања. У чланку је неколико напредних концепата, који излазе из оквира школске математике, разматрано са елементарног становишта одређеног наставним програмима. Највећа пажња је посвећена познатим теоремама немогућности (о несамерљивости, неконструктивности, недоказивости, неодлучивости итд.) које имају велики методички значај и популаризаторски потенцијал, јер спадају у фундаменталне резултате модерне математике, а и посебно су атрактивне за ширу јавност. Основу чланка чине специфични задаци (пројекти) прилагођени основношколској, одн. средњошколској математици. За решавање ових задатака је довољан школски ниво математике, а решења омогућавају анализу и дискусију усмерену ка напредним нивоима.

1. Увод

Наставне теме углавном планирамо и обрађујемо поштујући принцип научне заснованости, који је базиран на апстрактном, формалном, општем садржају, превасходно постављеном у оквире строго дедуктивног резоновања. Наравно, научни приступ се надовезује на конкретна, неформална, појединачна искуства и запажања, обликована интуитивним и здраворазумским размишљањем. Ови наизглед супротстављени поларитети представљају носећи стуб наставног процеса који би требало непрекидно да балансира између ових крајности. Исто се може рећи и за сам научно-истраживачки процес. Као илустрацију наводимо цитат из чланка *Откриће форсинга* (2002. год.), у коме Пол Кoen² описује своју револуционарну методу доказивања независности неких тврдњи од аксиома теорије скупова: *Да би се размишљало продуктивно, морају се користити све интуитивне и неформалне методе расуђивања које су на располагању.*

Преласком на више нивое обраде неке математичке теме, интуиција све више „бледи“, а хеуристичке компоненте наставе, надовезане на разумљиве проблемске ситуације, све се више занемарују, те просечном ученику постаје све теже да

¹Чланак је заснован на пленарном предавању *Напредни концепти на елементарном нивоу – теореме немогућности*, одржаном на Државном семинару Друштва математичара Србије, 2024. године. Снимак предавања се може погледати на YouTube каналу Друштва математичара Србије, <https://www.youtube.com/@user-vo1ec2re7w>

²Пол Кoen (1934–2007), амерички математичар, најпознатији по доказима независности континуум хипотезе и аксиоме избора од аксиома Цермело-Френкелове теорије скупова (ZF).

учи и развија одговарајуће компетенције. Данас је општеприхваћена теза да хеуристичке вештине такође треба плански развијати. Свака наставна тема треба да се обликује и усмерава ка напредном садржају који ће се на њу надовезати. Као једна од најзначајнијих карактеристика програма се узима јака повезаност и усклађеност сродних наставних тема на различитим нивоима школовања. Хеуристичка организација наставе омогућава и реализацију најважнијих општих исхода образовања: учење са разумевањем, логичко памћење, функционалну примену знања и вештина.

Појмови су производ дугог и сложеног процеса развитка мишљења које почиње опажајним и практичним мишљењем. Одавно су велики, стари ауторитети психологије образовања попут Аха, Пијажеа, Виготског³ и многих других, показали да је стварање појмова скоро увек продуктивно, а не репродуктивно, и да појам настаје у току сложене операције усмерене ка решавању неког задатка [4]. Зато је припрему за напредне садржаје најприродније остварити кроз задатке и пројекте, за чије решавање је довољан елементарни ниво, али који могу отворити дискусију о напреднијим темама са циљем да се ученици са њима интуитивно упознају.⁴ Главна идеја водиља за састављање оваквих задатака могла би се описати речима Лава Виготског [1]: *Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма. Тај иницијални задатак представља камен-темељац на коме ће се изграђивати појам.* Наредни одељци ће бити посвећени школским задацима и пројектима усмереним ка тзв. теоремама немогућности, које су имале велики значај за настанак модерне математике.

2. Теореме немогућности

Свака математичка теорема која показује својеврсну *немогућност* да се нешто уради (конструираше, докаже, одлучи итд.), по правилу, имала је огроман значај за развој модерне математике и рађање нових дисциплина (видети нпр. [4]). Овакве теореме, познате и као *теореме немогућности*, спадају и у најпопуларније математичке резултате који привлаче пажњу шире јавности, инспиришу нове научне резултате изван математике, филозофске расправе, уметничку фикцију итд. Међутим, у настави математике се углавном наводе само као занимљивости, без било каквог детаљнијег приказа и шире дискусије.

Уопштено говорећи, саму математику је створила немогућност директног, непосредног решавања проблема. Геометрија – „мерење земље“ – јесте назив за математику античког доба. Међутим, права геометрија се рађа баш из немогућности директног мерења, решавањем проблема одређивања висине пирамида и стубова, ширине река, па до одређивања међусобних растојања између Земље, Месеца и Сунца и величине ових небеских тела.

³Нарцис Ах (1871–1946), немачки психолог; Жан Пијаже (1896–1980), швајцарски развојни психолог и филозоф; Лав Виготски (1896–1934) совјетски психолог и социолог

⁴Треба истаћи и да оваква настава подразумева да математичко образовање наставника знатно излази из оквира школске математике.

Првом значајном теоремом немогућности сматра се откриће несамерљивости дијагонале и странице квадрата. Користећи савремену терминологију, централно питање, које је довело до овог открића, може се формулисати на следећи начин.

Проблем самерљивости. Могу ли мерни бројеви дијагонале и странице квадрата, при мерењу истом јединицом мере, истовремено бити природни бројеви?

Негативан одговор на претходно питање је почетак покушаја да се ускладе дужи (објекти које меримо) и бројеви (којима изражавамо резултат мерења). Усклађивање је трајало вековима, све до 19. века и радова Дедекинда и Кантора.⁵

Најпознатије теореме немогућности односе се на древне античке конструктивне задатке.

Проблем трисекције угла. Лењиром и шестаром произвољан угао поделити на три једнака дела.

Проблем удвостручавања коцке. Лењиром и шестаром конструисати страницу коцке чија је запремина двоструко већа од запремине задате коцке.

Проблем квадратуре круга. Лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга.

Сматра се да су ови древни проблеми формулисани око 430 пре н. е. Немогућност да се лењиром и шестаром обаве жељене конструкције је показана такође у 19. веку, када су алгебра и математичка анализа развиле довољно моћне методе.

Вековима су трајали покушаји да се Еуклидов пети постулат изведе из осталих аксиома еуклидске геометрије, наравно уз уверење да се то може учинити. Пети постулат, одн. *аксиому паралелности* данас формулишемо по узору на Хилбертове⁶ „Основе геометрије“ [7]:

Нека је a произвољна права и A тачка ван a ; тада постоји, у равни одређеној правом a и тачком A , највише једна права која пролази кроз A и не пресеца a .

Резултати које је добио Лобачевски⁷, истражујући доказивост аксиоме паралелности, довели су до *нееуклидских геометрија* које историчари математике сматрају открићем од епохалног значаја и великом променом у филозофији саме математике.

⁵Рихард Дедекинд (1831–1916), немачки математичар; Георг Кантор (1845–1918), немачки математичар. Посебно су значајни Дедекиндови прилози аксиоматизацији аритметике и заснивању реалних бројева. Два Дедекиндова рада преведена су на многе језике и често заједно штампана као Есеји о теорији бројева: (I) Непрекидност и ирационални бројеви (1858); (II) Природа и значење бројева (1888). Чланак (I) је преведен у публикацији *Заснивање наставе математичке анализе*, Друштво математичара Србије (2019).

⁶Давид Хилберт (1862–1943), немачки математичар

⁷Николај Лобачевски (1792–1856), руски математичар

Рачунар, симбол модерног доба, у извесном смислу се може сматрати производом који је осмишљен у разматрањима „немогућих“ проблема. Реч је о проблемима које је у првој половини 20. века постављао чувени немачки математичар Хилберт. На 2. Светском математичком конгресу, 1900. године, он је одржао чувено предавање на коме је видовито представио 23 проблема за наступајући век. Један од тих проблема остао је познат као

10. Хилбертов проблем. За дату Диофантову једначину са било којим бројем непознатих и целобројним коефицијентима, наћи поступак којим се може одлучити, користећи коначан број операција, да ли та једначина има или нема решења.

У данашњој терминологији, тражи се алгоритам који ће за улаз облика $F(x_1, \dots, x_k) = 0$, где је F полином са непознатим $x_1, \dots, x_k$ и целобројним коефицијентима, вратити одговор ДА, ако једначина има целобројна решења, а у супротном одговор НЕ. На пример, за улаз $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ алгоритам даје одговор ДА, а за улаз $x_1^3 + x_2^3 - x_3^3 = 0$ даје одговор НЕ.⁸ Нешто касније, на математичком конгресу у Болоњи, 1928. године, Хилберт је формулисао општији проблем, и тражио поступак за решавање било које добро дефинисане класе проблема. Овај општији проблем, познат као *проблем одлучивости*, убрзо је добио негативан одговор. Велике заслуге у решавању проблема одлучивости припадају Геделу и Черчу, али је свакако суштински допринос дао Тјуринг⁹ који је трагајући за неодлучивим проблемима замислио апстрактну машину за решавање одлучивих проблема. Та апстрактна машина данас се назива *универзална Тјурингова машина*, а њена (у извесном смислу слабија) физичка реализација се назива *рачунар*. Десети Хилбертов проблем је дуже чекао на одговор. Дефинитиван одговор је дао Матијасевич¹⁰, 1970. године, доказавши да не постоји поступак који се тражи у 10. Хилбертовом проблему. Више детаља о решењу овог Хилбертовог проблем може се пронаћи у [6].

2.1. Задаци за загревање

Сасвим уопштено говорећи, основне методе на којима се заснивају докази теорема немогућности јесу: 1) индиректно резонување и 2) налажење контрапримера. Ове методе свакако захтевају напредни начин размишљања и треба их систематски неговати од раног школовања. Наводимо неколико једноставних задатака који би могли послужити као узор за задатке који подстичу развој поменутих вештина. Задаци прате програм за основне школе и римски бројеви испред формулација препоручују разред у коме би се задатак могао решавати.

Задатак 1. [Индиректно резонување]

IV Ако је $a + b > 100$, онда је $a > 50$ или $b > 50$. Објасните.

⁸Решења једначине $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ су тзв. Питагорине тројке. Према Великој Фермаовој теорему, за $n \geq 3$, не постоје цели бројеви x_1, x_2, x_3 такви да је $x_1^n + x_2^n = x_3^n$.

⁹Курт Гедел (1906–1978), аустријско-амерички математичар; Алонзо Черч (1903–1995), амерички математичар; Алан Тјуринг (1912–1954), енглески математичар

¹⁰Јуриј В. Матијасевич (1947–), руски математичар

- V Ако је ab непаран број, онда и a и b морају бити непарни. Објасните.
 VI Троугао може имати највише један прав угао. Објасните.
 VII Ако је ab ирационалан број, онда је бар један од бројева a или b ирационалан. Објасните.

Решење. У сваком од наведених захтева, индиректно размишљање се природно намеће. (IV) Ако ниједан од бројева a и b није већи од 50, збир не може бити већи од 100. (V) Ако би један од бројева a или b био паран, и производ ab би био паран. (VI) Ако би троугао имао два права угла, онда би збир свих углова тог троугла морао бити већи од 180° . (VII) Ако су и a и b рационални бројеви, њихов производ би такође био рационалан. $\square$

Задатак 2. [Контрапримери]

- IV Нађите два правоугаоника истих површина и различитих обима.
 V Нађите два броја чији је збир дељив са 7, а ниједан од њих није дељив са 7.
 VI Нађите два троугла који показују да троугао већег обима не мора имати и већу површину.
 VII Конструшите петоугао чије су све странице међусобно једнаке, а који није правилан.

Решење. За сваки од наведених захтева, постоји више могућих одговора. У таквим случајевима, корисно је потражити што више могућности. Наравно, најважније је из контрапримера извући одговарајући закључак. (IV) Правоугаоник $2\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ има исту површину као правоугаоник $3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$, али су обими ова два правоугаоника различити. Закључујемо, правоугаоници истих површина не морају имати једнаке обиме. (V) Збир $10 + 11$ је дељив са 7, али $7 \nmid 10$ и $7 \nmid 11$. Закључујемо, дилац збира не мора да дели ниједан од сабирака. (VI) Посматрајмо два правоугла троугла, троугао Δ_1 чије су катете $a_1 = 100\text{ cm}$ и $b_1 = 0,1\text{ cm}$ и троугао Δ_2 чије су катете $a_2 = 3\text{ cm}$ и $b_2 = 4\text{ cm}$. Нека су c_1 и c_2 редом хипотенузе троуглова Δ_1 и Δ_2 . Проценимо обиме ова два троугла (користећи, у другом случају, неједнакост троугла):

$$O_1 = a_1 + b_1 + c_1 \geq 100,1\text{ cm} \quad \text{и} \quad O_2 = a_2 + b_2 + c_2 \leq 2(a_2 + b_2) = 14\text{ cm}.$$

Дакле, $O_1 > O_2$. Међутим,

$$P_1 = \frac{a_1 b_1}{2} = 5\text{ cm}^2 \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{a_2 b_2}{2} = 6\text{ cm}^2,$$

одакле следи $P_1 < P_2$. (VII) Жељени петоугао се може добити од квадрата и једнакостраничног троугла који имају једну заједничку страницу и немају заједничких унутрашњих тачака. $\square$

2.2. Несамерљивост

Проблем несамерљивости дијагонале и странице квадрата прате два веома суптилна концепта: индиректно мишљење и појам конвергенције. Они представљају основ за многе важне математичке теме и треба им посветити посебну пажњу. Наравно, неопходне су постепене припреме за сваки концепт посебно. Наредни задатак је осмишљен тако да ученицима (основних школа) предочи

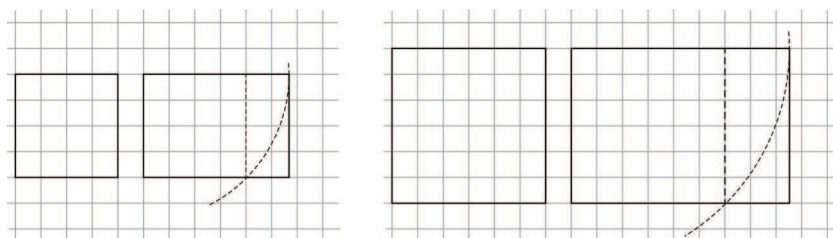
феномене који прате мерење дијагонале квадрата његовом страницом. Погодно је проблем мерења дужине превести у проблем мерења површине, јер овај други приступ пружа више могућности да се основне идеје очигледно представе. Сходно томе, следећи задатак се односи на мерење површине правоугаоника чија је једна страница јединична дуж, а друга страница је дијагонала јединичног квадрата.

Задатак 3. [VII] а) Нацртајте произвољан квадрат користећи квадратну мрежу у свесци. Конструирајте затим правоугаоник чија је једна страница једнака страници квадрата, а друга страница је једнака дијагонали квадрата. Цртајте тако да се једна краћа страница правоугаоника налази на линији квадратне мреже.

б) Користећи квадратну мрежу свеске, процените површину правоугаоника ако је јединица мере полазни квадрат.

в) Упоредите своју процену са проценама осталих ученика. Запишите своја запажања.

Решење и дискусија. а) На слици 1 су приказане две могућности.



Слика 1. Процена површине правоугаоника помоћу квадратне мреже

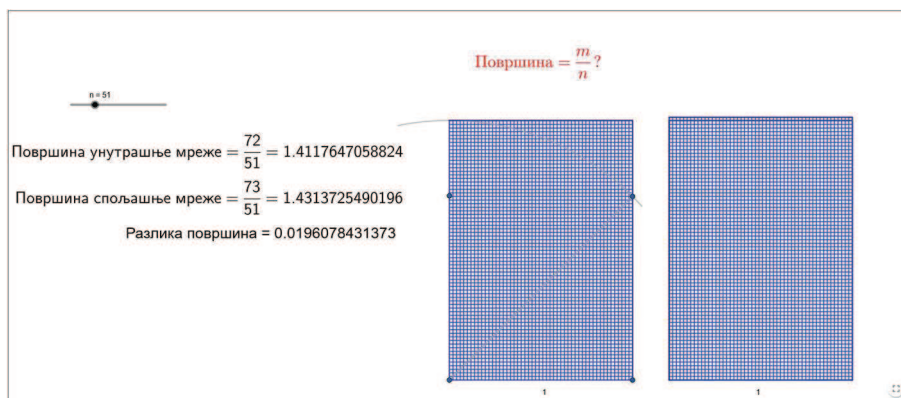
б) За процену површине правоугаоника користимо квадратић мреже нацртане у свесци. (Стандардно, квадратић јесте квадрат странице 5 mm, али то није релевантно.) „Квалитет“ процене површине правоугаоника зависиће од величине полазног квадрата. Што је већи полазни квадрат (тј. садржи више квадратића мреже), процена површине правоугаоника ће бити прецизнија. Нека је n мерни број странице полазног квадрата мерене страницом квадратића. На слици 1 лево је $n = 4$, а на слици 1 десно је $n = 6$. Површину правоугаоника P , узимајући да је јединица мере полазни квадрат, процењујемо одређивањем:

- највећег броја квадратића који се могу надовезати дуж дуге странице правоугаоника, тако да се не „изађе“ из правоугаоника; ако је m добијени број, онда је $P > \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n}$;
- најмањег броја квадратића који се могу надовезати дуж дуге странице правоугаоника, тако да се „покрије“ читава страница; ако је M добијени број, онда је $P < \frac{Mn}{n^2} = \frac{M}{n}$.

Наводимо неке процене у зависности од броја n .

n	процена површине P		
4	$\frac{5}{4} < P < \frac{6}{4}$	тј. $1,25 < P < 1,5$	(слика 1, лево)
5	$\frac{7}{5} < P < \frac{8}{5}$	тј. $1,4 < P < 1,6$	
6	$\frac{8}{6} < P < \frac{9}{6}$	тј. $1,3333 < P < 1,5$	(слика 1, десно)
7	$\frac{9}{7} < P < \frac{10}{7}$	тј. $1,2857 < P < 1,4286$	
8	$\frac{11}{8} < P < \frac{12}{8}$	тј. $1,375 < P < 1,5$	

в) Важно је приметити да се са порастом броја n добија све прецизнија процена. Геометријски софтвери пружају велике могућности да се ефектно прикажу процене за велики број вредности n (слика 2).



Слика 2. Geogebra прилог за мерење површине правоугаоника:

<https://www.geogebra.org/m/ndeng7ff>

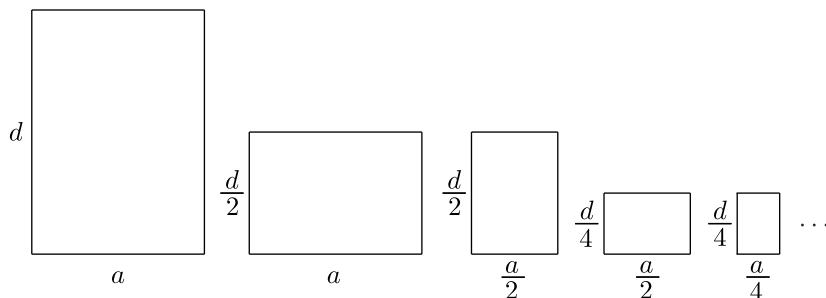
Повећавањем вредности n уочавамо да се не добија тачна вредност површине. Заиста, испоставља се да не постоји n за које се изједначавају површине највеће унутрашње мреже и најмање спољашње мреже. Другим речима, површина правоугаоника, мерена полазним квадратом, није рационалан број. То свакако не можемо проверити поступком који је описан у овом задатку. Сврха задатка је само да се такав резултат наслути. Додатно, приказани поступак мотивише и неке базичне концепте теорије мере, превасходно унутрашњу и спољашњу меру. $\square$

Правоугаоник из претходног задатка има једно занимљиво својство које је нашло и практичну примену при стандардизацији димензија папира.

Задатак 4. [VII] А-формат папира се дефинише следећим својством: *Ако се папир пресавије на пола, добија се правоугаоник истог облика, тј. остаје сачувана размера дуже и краће странице.* За почетни А-формат, означен А0, узима се правоугаоник површине 1 m^2 који задовољава наведено својство; А1 се добија половљењем дуже странице А0 формата; А2 се добија половљењем дуже странице А1 формата, итд. Одредите приближно у милиметрима димензије А0, А1, А2, А3, А4 и А5 формата.

Решење и дискусија. Једнакост коју нам дају познати обрасци за површину квадрата, $\frac{d^2}{2} = a^2$, можемо да запишемо и на следећи начин: $\frac{d}{a} = \frac{a}{d/2}$. Овај запис има занимљиву геометријску интерпретацију:

- (*) када преполовимо дужу страну, добијамо правоугаоник истог облика (сличан) што значи да је сачувана размера страница.



Слика 3. Правоугаоници А-формата

Ако наставимо да половимо дужу страну, добијамо низ правоугаоника истог облика (слика 3).

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d/2} = \frac{d/2}{a/2} = \frac{a/2}{d/4} = \dots$$

А-формат папира се дефинише управо особином (*), уз додатни договор да је формат А0 правоугаоник површине 1 m^2 . Потражимо најприближније целобројне вредности страница А0 формата, у милиметрима, које задовољавају дате услове. Другим речима, А0 формат одређују дужи a и d такве да је

$$d^2 = 2a^2, \quad ad = 1\,000\,000 \text{ mm}^2.$$

Једноставна последица првог услова је једнакост $d^4 = 2a^2d^2$, па узимајући у обзир и други услов добијамо

$$d^4 = 2\,000\,000\,000\,000 \text{ mm}^2.$$

Потрагу за (приближном целобројном) вредношћу броја d можемо обавити *цифрано-цифра*. Број d је сигурно између 1000 и 2000, јер је

$$1000^4 < d^4 = 2\,000\,000\,000\,000 < 2000^4.$$

Наставимо са потрагом између које две стотине (унутар друге хиљаде) се налази d . Како је

$$1100^4 = 1\,464\,100\,000\,000; \quad 1200^4 = 2\,073\,600\,000\,000,$$

закључујемо да је $1100 < d < 1200$. На исти начин одређујемо цифру десетица. Из

$$1180^4 = 1\,938\,777\,760\,000; \quad 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$$

слиди $1180 < d < 1190$. Најзад, одређујемо и цифру јединица. Из

$$1189^4 = 1\,998\,607\,065\,841; \quad 1190^4 = 2\,005\,339\,210\,000$$

добивамо $1189 < d < 1190$. Узимамо да је приближна целобројна вредност дуже стране 1189 mm , одакле једноставно налазимо и приближну целобројну вредност краће стране:

$$a = \frac{1\,000\,000}{1189} \approx 841$$

Уместо добијених вредности, углавном се узимају најближи мањи парни бројеви, јер се мањи А формати добијају половљењем дуже стране. Када се то узме у обзир добијамо да су димензије А0 формата 1188×840 . Одредимо димензије неколико мањих формата:

- (A1) како је $1188 : 2 = 594$, димензије А1 формата су 840×594 ;
- (A2) како је $840 : 2 = 420$, димензије А2 формата су 594×420 ;
- (A3) како је $594 : 2 = 297$, димензије А3 формата су 420×297 ;
- (A4) како је $420 : 2 = 210$, димензије А4 формата су 297×210 ;
- (A5) како је¹¹ $297 : 2 = 148$, димензије А5 формата су 210×148 итд.

Посебно треба нагласити однос страница добијених правоугаоника:

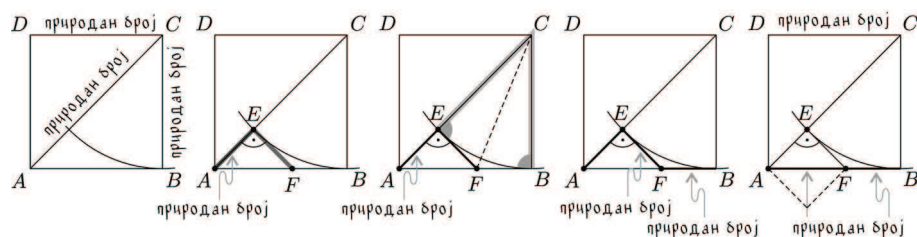
$$\frac{1188}{840} \approx 1,4142857, \quad \frac{840}{594} \approx 1,4141414, \quad \frac{594}{420} \approx 1,4142857, \dots$$

Овај (пројектни) задатак наговештава проблем одређивања односа између дијагонале и стране квадрата. $\square$

Претходни задаци представљају добар увод у разматрање главног питања о самерљивости дијагонале и стране квадрата.

Задатак 5. [VII] Могу ли мерни бројеви дијагонале и стране квадрата истовремено бити природни бројеви? За одговор и образложење искористите следећи текст и слике које га прате.

Претпоставимо да је одговор потврдан! Нека је n најмањи природан број са следећом особином: у квадрату странице n јединица мере, мерни број дужине дијагонале је такође природан број.



Слика 4. Доказ несамерљивости стране и дијагонале квадрата

¹¹Уместо 297 узима се први парни број мањи од њега.

Решење и дискусија. Постоји веома много доказа да се однос дијагонале и странице квадрата не може представити као рационалан број. Доказ приказан у овом задатку је вероватно најближи доказу из античких времена. У њему се користи посебно важан принцип доброг уређења природних бројева: ако постоји природан број са извесном особином, онда постоји и најмањи природан број са таквом особином. Другим речима, скуп природних бројева не дозвољава бесконачан спуст. Ако, из претпоставке да тврдња важи за неки природан број, покажемо да тврдња мора да важи и за неки строго мањи природан број, онда закључујемо да тврдња не важи ни за један природан број.

Одговор надовезујемо на дати текст и слику 4. Нека је $ABCD$ квадрат чија је страница дугачка n јединица мере, према претпоставци у наведеном тексту. На дијагонали AC (чија је дужина природан број) одређена је тачка E таква да је $CE = CB$. Тада је дужина дужи $AE = AC - CE$ такође природан број. Није тешко приметити да је $AB > AE$ (тј. да је дијагонала квадрата краћа од двоструке вредности странице). Тачка F , на страници AB , изабрана је тако да $\triangle AEF$ буде једнакокрако правоугли троугао, са правим углом у темену E . Из подударности троуглова CEF и CBF ($CE = CB$, $CF \equiv CF$, $\angle CEF = \angle CBF = 90^\circ$) следи $EF = FB$. Дакле, $AE = FB$, што значи да је дужина дужи FB природан број, па је природан број и дужина дужи $AF = AB - FB$. Дуж AF је једнака дијагонали квадрата странице AE и дужине обе дужи су природни бројеви, што је у супротности са полазном претпоставком, јер је $AE < n$. $\square$

2.3. Недоказивост

Лобачевски је покушавао индиректним расуђивањем да докаже Еуклидов пети постулат из осталих аксиома еуклидске геометрије. Претпоставио је негацију (једног еквивалента) петог постулата и уз остале аксиоме почео да изводи последице, очекујући да ће у једном тренутку доћи до контрадикције. Не откривши никакву противречност, смело је претпоставио да пети постулат није последица осталих аксиома и да се осим еуклидске геометрије може на сличан начин развити сасвим другачија геометрија. Ова „индиректна метода“ је само наговестила недоказивост, док је коначна потврда тог наговештаја добијена конструисањем контрапримера. Да бисмо што једноставније објаснили о каквим контрапримерима је реч, посматраћемо знатно једноставнији случај. Следи-мо Хилбертове Основе геометрије [7] и, уз одговарајућа поједностављења, замислимо два различита система ствари: ствари првог система називамо тачкама, а ствари другог система правим, и замислимо их у извесном односу припадања. Издвајамо само четири аксиоме припадања:

- (I_1) За сваке две тачке увек постоји права којој припадају обе ове тачке.
 - (I_2) За сваке две тачке не постоји више од једне праве којој би припадале обе тачке.
 - (I_3) Свакој правој припадају најмање две тачке.
 - (I_4) За сваку праву постоји тачка која не припада тој правој.
- и следећу варијанту аксиоме паралелности:

(V) За сваку праву и сваку тачку која не припада тој правој, постоји само једна права којој припада дата тачка и нема заједничких тачака са датом правом.

Како показати да се тврдња (V) не може доказати из претпоставки (I_1) , (I_2) , (I_3) , (I_4) ? Наредни задатак илуструје суштину методе контрапримера којом се разматрају питања недоказивости.

Задатак 6. [ICIII] Замишљамо два различита система ствари: ствари првог система називамо *члановима*, а ствари другог система *тимовима*, и замишљамо их у извесном односу *припадања*. Тимови су формирани тако да важе следећи услови:

(I_1) За свака два члана увек постоји тим коме припадају оба члана.

(I_2) За свака два члана не постоји више од једног тима коме би припадала оба члана.

(I_3) Сваком тиму припадају најмање два члана.

(I_4) За сваки тим постоји члан који не припада том тиму.

Дата је тврдња:

(V) За сваки тим и сваког члана који не припада том тиму, постоји само један тим коме припада дати члан и нема заједничких чланова са датим тимом.

а) Полазећи од само три члана формирајте тимове тако да важе услови (I_1) , (I_2) , (I_3) , (I_4) .

б) Проверите да ли је тачна тврдња (V), за три члана и тимове формиране под а).

в) Ослањајући се на решења захтева под а) и б), објасните зашто тврдња (V) није последица услова (I_1) , (I_2) , (I_3) , (I_4) .

Решење и дискусија. а) Ако чланове обележимо са A , B и C , једноставно добијамо да треба формирати три тима: $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, A\}$.

б) Директно се проверава да тврдња (V) није тачна за системе формиране под а). Изаберимо, на пример, тим $\{A, B\}$ и (јединог) члана C који не припада том тиму. Да ли постоји тим коме припада C али нема заједничких чланова са $\{A, B\}$? Наравно, одговор је негативан. До истог закључка се долази и у осталим случајевима.

в) Ако је нека тврдња последица извесних услова, онда је та тврдња сигурно тачна у свим ситуацијама у којима су испуњени сви наведени услови. Под а) је одређена једна ситуација у којој су истинити сви услови (I_1) , (I_2) , (I_3) , (I_4) , а под б) је показано да тврдња (V) није тачна у тој ситуацији.

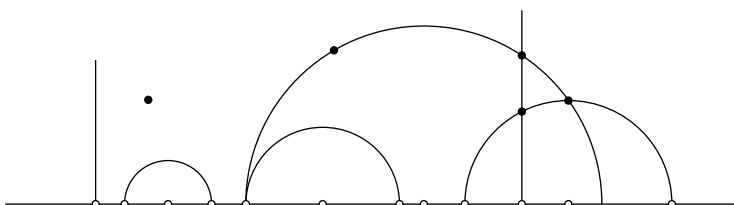
Корисно је испитати и да ли је могућа ситуација која испуњава услове (I_1) , (I_2) , (I_3) , (I_4) , а тачна је и тврдња (V). Није тешко проверити да ће то бити случај ако од четири члана A , B , C , D формирамо тимове $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ и $\{C, D\}$. $\square$

Посебно значајни „системи ствари“ су уведени у следећем задатку. Реч је тзв. Поенкареовом¹² полураванском моделу хиперболичке планиметрије.

¹² Анри Поенкаре (1854–1912), француски математичар

Задатак 7. [I_{СШ}] Дата је (еуклидска) отворена полураван, тј. полураван без граничне праве. Посматрајте следећа два система ствари: *тачке* отворене полуравни и *линије* које могу бити

- полуправе чији почеци припадају граничној правој полуравни и нормалне су на њој, или
- полукружнице те полуравни, чији су центри на граничној правој полуравни, при чему у оба случаја линија не садржи крајње тачке са граничне праве. Подразумева се уобичајен однос *припадања* између тачака и линија (слика 5).



Слика 5. Поенкареов полуравански модел

Испитајте које од следећих особина задовољавају ови системи тачака и линија.

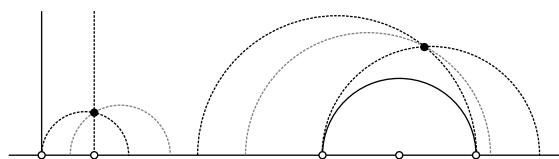
- (I_1) За сваке две тачке увек постоји линија којој припадају обе тачке.
- (I_2) За сваке две тачке не постоји више од једне линије којој припадају обе тачке.
- (I_3) Свакој линији припадају најмање две тачке.
- (I_4) За сваку линију постоји тачка која не припада тој линији.
- (V) За сваку линију и сваку тачку која не припада тој линији, постоји само једна линија којој припада дата тачка и која нема заједничких тачака са датом линијом.

Решење и дискусија. Очигледно је да су тачни искази (I_3) и (I_4). Испитивање истинитости преосталих исказа погодно је посматрати конструктивно, тј. свести на решавање следећих конструктивних задатака.

1. За задате две тачке полуравни конструисати линију (одговарајућу полуправу или полукружницу) која садржи те две тачке.
2. За задату линију (полуправу или полукружницу) и тачку која не припада тој линији, конструисати линију која садржи дату тачку и нема заједничких тачака са датом линијом.

Први конструктивни задатак увек има јединствено решење, одакле следи да су искази (I_1) и (I_2) тачни. Заиста, ако задати пар тачака припада нормали на граничну праву полуравни, онда је тражена линија одговарајућа полуправа. Ако задати пар тачака не припада нормали на границу полуравни, онда треба конструисати симетралу дужи коју одређују те две тачке и тражена линија ће бити полукружница чији је центар пресек симетрале и границе полуравни.

Други конструктиван задатак такође увек има решења, али оно никада није јединствено. Без обзира на избор линије и тачке која јој не припада, увек можемо



Слика 6. Исказ (V) није тачан за Поенкареов полуравански модел

конструисати неограничено много линија које садрже дату тачку и немају заједничких тачака са датом линијом (слика 6).

Решење другог конструктивног задатка показује да исказ (V) није тачан за Поенкареов полуравански модел. Штавише, за сваку линију и сваку тачку која не припада тој линији, постоји бесконачно линија којима припада дата тачка и које немају заједничких тачака са датом линијом. $\square$

2.4. Трисекција угла

Напори да се реше древни конструктивни проблеми, посебно проблем квадратуре круга, често се сликовито описују уверењем да је *утрошено више интелектуалног напора да се реши проблем квадратуре круга него да се човек пошаше на Месец*. Прве потпуне доказе да се проблеми трисекције угла и удвостручавања коцке не могу решити лењиром и шестаром дао је француски математичар Венцел¹³, 1837. године. За проблем трисекције угла, Венцел доказује следећу теорему.

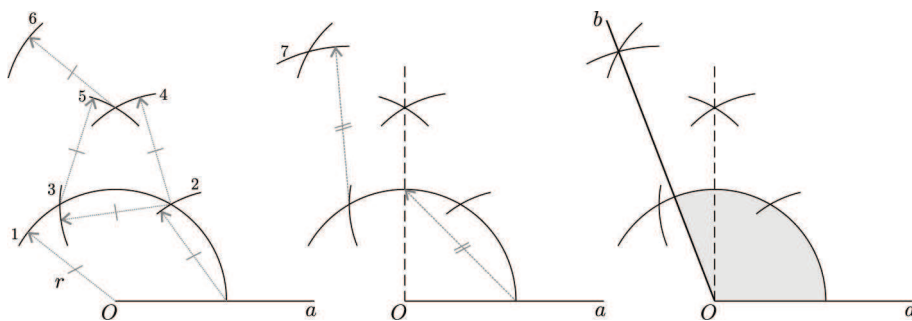
Теорема. *Лењиром и шестаром није могуће конструисати угао од 20° .*

Из претходне теореме директно следи да је проблем трисекције угла нерешив лењиром и шестаром, јер бисмо у супротном, трисекцијом угла од 60° добили угао од 20° .

Доказ Венцелове теореме изостављамо, али предлагемо неколико задатака којима се истичу веома значајни аспекти Венцеловог резултата. Задаци су инспирисани једним проблематичним YouTube прилогом. YouTube, TikTok и друге популарне платформе обилују (едукативним и „едукативним“) прилозима различитог квалитета. Постоје одлични прилози који пружају изузетне могућности за освежење стандардних модела организације наставе и креативно планирање. Међутим и лоши примери имају дидактички потенцијал, јер се могу искористити да изоштре моћ запажања ученика и јачају њихово критичко мишљење. Управо ова идеја је определила наш избор видеа за проблемску ситуацију. Видео приказује једну сасвим једноставну, лако разумљиву геометријску конструкцију, која се завршава некоректном тврдњом да је конструисан угао од 110° . Тврдња се директно супротставља Венцеловом резултату. Прав угао је могуће конструисати лењиром и шестаром, па бисмо конструкцијом угла од 110° једноставно добили и угао од 20° . Следећа три задатка су осмишљена тако да усмеравају истраживање коректности конструкције, отварајући простор за дискусију о самим методама оповргавања.

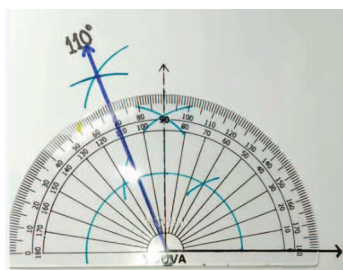
¹³Пјер Венцел (1814–1848), француски математичар

На YouTube-у је доступно неколико видео прилога који својим насловима најављују конструкцију угла од 110° . Слика 7 приказује најважније сцене једне од поменутих видео-конструкција. Полазећи од полуправе, означимо је Oa , прво је конструисано шест лукова једнаког полупречника r (слика 7, лево), а затим и седми лук чији је полупречник дијагонала квадрата стране r (слика 7, средина). Пресек шестог и седмог лука одређује полуправу Ob (слика 7, десно).



Слика 7. Сцене проблематичног YouTube-видеа

Видео се завршава сценом којом је аутор „показао“ да је конструисан угао од 110° . Озбиљнија анализа видео-конструкције би могла започети следећим задацима.



Слика 8. Завршна сцена проблематичног YouTube-видеа

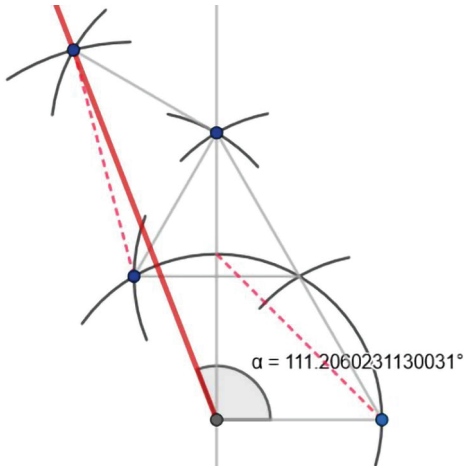
Задатак 8. [ПСШ] Конструишите угао подударан углу aOb из видеа. Измерите овај угао. Уколико мерење покаже да величина угла одступа од 110° , шта би могли бити разлози одступања? Непрецизност конструкције или ваљаност саме методе?

Решење и дискусија. На слици 9 приказана је одговарајућа конструкција помоћу Geogebra-е. Мерењем је утврђено да је мера конструисаног угла већа од 110° .

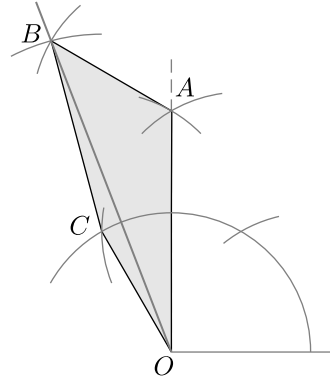
Да ли су ово довољни разлози да се конструкција одбаци? Као што се мерењем не може показати коректност конструкције, ова метода није поуздана ни за одбацивање конструкције. $\square$

Задатак 9. [ПСШ] Уочите четвороугао $OABC$ добијен приказаном конструкцијом (слика 10).

- Одредите углове и стране четвороугла $OABC$.
- Одредите (приближно) величину угла који дијагонала OB заклапа са странама четвороугла $OABC$.



Слика 9. Приказ проблематичне YouTube-конструкције у Geogebra-и и мерење конструисаног угла

Слика 10. Четвороугао $OABC$

Решење и дискусија. а) Четвороугао $OABC$ је састављен од два једнакокрака троугла OCA и BAC , са заједничким краком дужине r . Углови и стране овог четвороугла се једноставно рачунају: $\sphericalangle O = 30^\circ$, $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 165^\circ$; $OC = AB = r$, $BC = r\sqrt{2}$, $OA = r\sqrt{3}$.

б) Применом косинусне теореме на $\triangle OAB$ и коришћењем једнакости $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ добијамо:

$$\begin{aligned} OB^2 &= AB^2 + AO^2 - 2AB \cdot AO \cdot \cos \sphericalangle OAB \\ &= r^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3}r^2 \cos 120^\circ = r^2(4 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Даље, још једном применом косинусне теореме на исти троугао имамо:

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{3r^2 + r^2(4 + \sqrt{3}) - r^2}{2r^2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{3}}} \\ &= \frac{6 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{4 + \sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0,9322857809. \end{aligned}$$

Најзад, употребом калкулатора рачунамо, наравно приближно, величину угла AOB , $\sphericalangle AOB \approx 21,2060231208^\circ$. Овај резултат појачава сумњу у полазну конструкцију. Да је полазна конструкција коректна, угао AOB би требало да буде једнак 20° , а рачун је показао одступање веће од 1° . Ипак, још увек немамо чврст доказ да конструкција није коректна. Разлог је наравно непрецизност приближног рачунања (два пута смо употребили знак $\approx$ уместо $=$). $\square$

Задатак 10. [П_{СШ}]

- Доказати идентитет $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$.
- Доказати да је $\cos 20^\circ$ решење једначине $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

в) Доказати да број $\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ није решење једначине $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

Решење и дискусија. а) Идентитет је једноставна последица познатих формула: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ и $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

б) Тврђење следи из а) за $\alpha = 20^\circ$, и једнакости $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

в) Нешто захтевнији доказ, и то само у техничком смислу, потребан је за део в). Претпоставимо да број $\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ јесте решење једначине $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$. Из једнакости

$$\begin{aligned} x(4x^2 - 3) &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}} \left(4 \cdot \frac{(2\sqrt{3}+1)^2}{4(4+\sqrt{3})} - 3 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}} \left(\frac{13+4\sqrt{3}-3(4+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{7+3\sqrt{3}}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

следи да би морало бити

$$\frac{7+3\sqrt{3}}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}, \quad \text{тј.} \quad 7+3\sqrt{3} = \sqrt{4+\sqrt{3}}(4+\sqrt{3}).$$

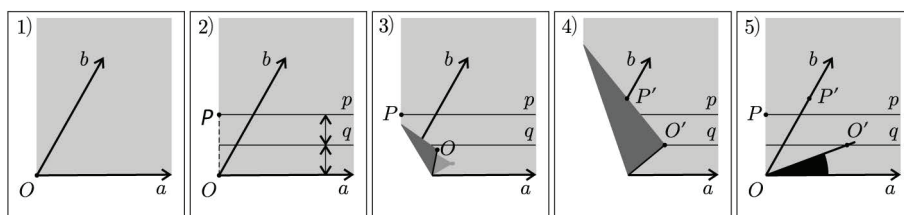
После квадрирања обеју страна последње једнакости добијамо $24 + 9\sqrt{3} = 0$. Последња једнакост је нетачна, јер је $\sqrt{3}$ ирационалан број. Важно је истаћи да се и интуитивно могло наслутити да кубну једначину не може да задовољи неки број представљен бројевним изразом у коме се осим основних рачунских операција користи само квадратни корен.

Тек сада извлачимо непобитан закључак: *полазна конструкција није коректна; YouTube-видео не показује конструкцију угла од 110°* . Интернет обилује некоректним конструкцијама које могу бити полазиште за сличне задатке. $\square$

Чињеница да се лењиром и шестаром не може извршити трисекција произвољног угла инспирише потрагу за новим справама и триковима којима би се овај конструктивни задатак могао решити. Такозвана *оригами трисекција* може бити посебно занимљива за анализу. Оригами трисекцију је открио јапански математичар Хисаши Абе, 70-их година 20. века.

Задатак 11. [I_{CS}] а) Испробај оригами трисекцију угла приказану на слици 11.¹⁴ 1) На правоугаоном папиру нацртати оштар угао aOb тако да се теме O поклопи са врхом доњег левог угла папира, а крак Oa буде нацртан дуж доње ивице. 2) Нацртати праве p и q паралелне краку Oa , тако да једна права (q) буде једнако удаљена од друге праве (p) и праве на којој се налази крак Oa . Нацртати

¹⁴Уместо слике, ученицима се може показати видео који приказује оригами трисекцију. **YouTube**, **TikTok** и сличне платформе садрже велики број добрих анимација овог поступка.

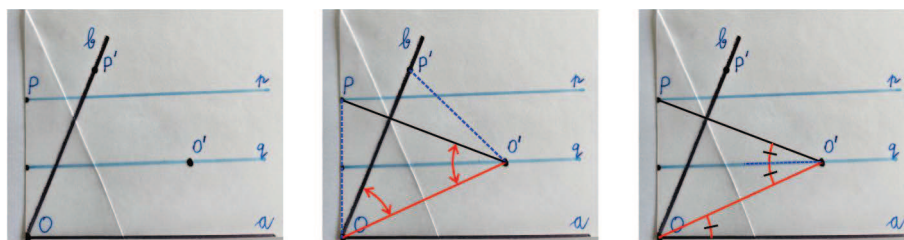


Слика 11.

подножје P нормале из O на праву p . 3-4) Доњи леви угао папира пресавити тако да тачке O и P редом „падну“ на q и Ob , остављајући „трагове“ O' и P' . 5) Полуправа OO' одређује трећину полазног угла aOb .

б) Да ли је приказаним поступком почетни угао заиста подељен на три једнака дела? Детаљно образложите одговор.

Решење и дискусија. а) Пожељно је користити провидан (тзв. паус) папир и нацртати све објекте који су од значаја (слика 12, лево). Додатно, требало би истаћи и линију пресавијања, јер ће особине осне симетрије бити важне у образложењу поступка.



Слика 12. Анализа оригами трисекције

б) Троуглови $OO'P'$ и $O'OP$ су осносиметрични у односу на линију пресавијања (слика 12, средина). Сходно томе, углови $O'OP'$ и $OO'P$ су једнаки, тј. $\angle OO'P = \angle O'Ob$.

Троугао $OO'P$ је једнакокрак и права q полови угао при врху $OO'P$. Према познатој теорему о угловима на трансверзали паралелних правих, оштар угао који q заклапа са OO' једнак је углу $O'Oa$. Закључујемо да је $\angle O'Oa$ једнак половини угла $OO'P$, па је према раније показаном

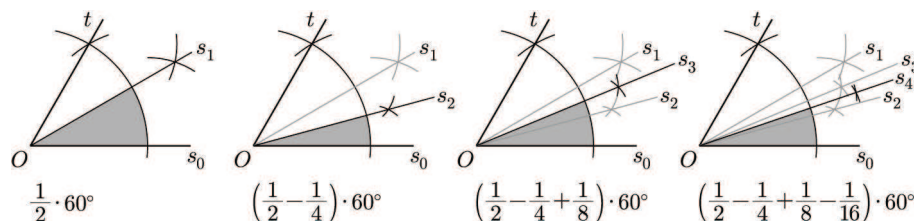
$$\angle O'Oa = \frac{1}{2} \angle O'Ob.$$

Из последње једнакости директно следи да полуправа OO' одређује трећину угла aOb . $\square$

Чињеница да се лењиром и шестаром не може извршити трисекција произвољног угла инспирише потрагу за приближним решењима овог задатка. „Произвољно добре“ приближне конструкције се могу искористити као мотивациони примери граничних процеса.

Задатак 12. [III_{СШ}]

а) Опишите конструкције приказане на слици 13 и одредите величине осечених углова.



Слика 13. Приближна трисекција угла

б) Настављањем претходног поступка, добијају се углови:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 60^\circ, \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) \cdot 60^\circ, \quad \text{итд.}$$

Шта примећујете?

в) Може ли се лењиром и шестаром конструисати угао чија се величина разликује од угла од 20° за мање од $0,01^\circ$? Може ли се разлика учинити још мањом?

г) Ако је ε било који позитиван број, може ли се лењиром и шестаром конструисати угао чија се величина за мање од ε степени разликује од 20° ?

Решење и дискусија. а) Приближна трисекција угла s_0Ot се састоји од низа конструкција симетрала углова. Индуктивно дефинишемо низ полуправих $(Os_n)_{n \geq 0}$ на следећи начин:

- Os_0 је један крак датог угла s_0Ot , а Os_1 је симетрала угла s_0Ot ;
- за $n \geq 2$, полуправа Os_n је симетрала (оштрог) угла $s_{n-2}Os_{n-1}$.

После сваке конструисане полуправе Os_n , једноставно можемо одредити величину угла s_0Os_n . Угао s_0Ot се прво дели на два једнака дела, затим се од половине одузима четвртина, па се додаје осмина, па одузима шеснаестина итд. Ако је величина полазног угла s_0Ot једнака 60° , онда се сваком новом симетралом добијају следећи углови: $\frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \cdot 60^\circ = 15^\circ$, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \cdot 60^\circ = 22,5^\circ$, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}) \cdot 60^\circ = 18,75^\circ$.

б) Настављајући претходни поступак, даље добијамо: $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}) \cdot 60^\circ = 20,625^\circ$, $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}) \cdot 60^\circ = 19,6875^\circ$ итд. Примећујемо да сваком новом симетралом добијамо угао који се све мање разликује од 20° . Уопште, узимајући у обзир формулу за збир коначно много чланова геометријског низа, добијамо:

$$\begin{aligned} \sphericalangle s_0Os_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) \cdot 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \cdot 60^\circ \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} \cdot 60^\circ = \left(1 - (-\frac{1}{2})^n\right) \cdot 20^\circ.$$

Дакле, конструкцијом симетрале Os_n добијамо угао s_0Os_n који је за $\frac{20^\circ}{2^n}$ већи или мањи од 20° .

в-г) Број $\frac{20^\circ}{2^n}$ се може учинити произвољно малим, за довољно велико n . На пример, за $n = 11$ имамо

$$\frac{20^\circ}{2^{11}} = \frac{20^\circ}{2048} = 0,009765625^\circ < 0,01^\circ.$$

Уопште, за било које $\varepsilon > 0$, постоји природан број n такав да је $2^n > \frac{20}{\varepsilon}$. Нека је n_0 најмањи природан број за који важи последња неједнакост, тј. $\frac{20}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Величина угла $s_0Os_{n_0}$ разликује се од 20° за $\frac{20^\circ}{2^{n_0}}$, тј. за мање од ε степени. $\square$

3. Закључак

Велики број фундаменталних научних резултата је потпуно изван оквира школске наставе. Велики број одличних расправа о настави, нажалост, никада се не уздигне до масовне реализације у школској пракси. Велика удаљеност од актуелних научних истраживања и неприлагођеност савременом добу сматрају се великим проблемима наставе уопште. У овом чланку су предложени неки прилози школској настави математике који су инспирисани наведеним проблемима савремене наставе математике. Осим тога, предложени задаци остварују и многе друге опште захтеве савременог образовања: омогућавају активно учење и функционалну примену знања, развој критичког мишљења, повећање информатичке и информационе писмености.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Vigotski, *Mišljenje i govor*, Nolit, Beograd, 1977.
- [2] Н. Икодинович, *Конструкције лежиром и шестаром*, Тангента 42, Друштво математичара Србије, 2005.
- [3] N. Ikodinović, *How to keep balance in education?*, Зборник на трудовите од меѓународната конференција за образованието по математика, физика и сродни науки, Скопје, 27-28 септември 2019, пп. 51–60.
- [4] J. Lützen, *A History of Mathematical Impossibility*, Oxford University Press, 2023.
- [5] D. Flannery, *The square Root of 2. A Dialog Concerning a Number and a Sequence*, Copernicus, New York, 2005.
- [6] Ž. Mijajlović, Z. Marković, K. Došen, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986. <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/593>
- [7] Д. Хилберт, *Основи геометрије*, Класични научни списи, књига XIV, САНУ, 1957 (превод осмог немачког издања, Ж. Гарашанин). <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/435/DavidHilbertOsnoveGeometrije.pdf?sequence=1>

Математички факултет, Универзитет у Београду
nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs