

## Коме је намењена прича?

- Флуентност
- Процедурална вештина
- Концептуално разумевање

### "Najkraći test inteligencije"\*

1. Palica i loptica koštaju ukupno 1,10 dolara. Palica košta 1 dolar više od loptice. Koliko košta lopta?
2. Ako pet mašina, za pet minuta napravi pet proizvoda, koliko je vremena potrebno da 100 mašina napravi 100 proizvoda?
3. Deo jezera je pokriven lokvanjima. Svakog dana se udvostruči površina jezera pokrivena lokvanjima. Ako će za 48 dana lokvanji potpuno pokriti celo jezero, za koliko dana će pokriti polovinu jezera?

\* Shane Frederic, Cognitive reflection and decision making, Journal of Economic Perspectives, February 2005

Intuitivni, ishitreni i pogrešni odgovori:

10 centi, 100 minuta i 24 dana.

Tačni odgovori su:

5 centi, 5 minuta, 47 dana.

Table 1  
CRT Scores, by Location

Locations at which data were collected	Mean CRT score	Percentage scoring 0, 1, 2 or 3				N =
		"Low" 0	1	2	"High" 3	
Massachusetts Institute of Technology	2.18	7%	16%	30%	48%	61
Princeton University	1.63	18%	27%	28%	26%	121
Boston fireworks display <sup>a</sup>	1.53	24%	24%	26%	26%	195
Carnegie Mellon University	1.51	25%	25%	25%	25%	746
Harvard University <sup>b</sup>	1.43	20%	37%	24%	20%	51
University of Michigan: Ann Arbor	1.18	31%	33%	23%	14%	1267
Web-based studies <sup>c</sup>	1.10	39%	25%	22%	13%	525
Bowling Green University	0.87	50%	25%	13%	12%	52
University of Michigan: Dearborn	0.83	51%	22%	21%	6%	154
Michigan State University	0.79	49%	29%	16%	6%	118
University of Toledo	0.57	64%	21%	10%	5%	138
Overall	1.24	33%	28%	23%	17%	3428

# THINKING, FAST AND SLOW



DANIEL  
KAHNEMAN

WINNER OF THE NOBEL PRIZE IN ECONOMICS

## Brzo i sporo mišljenje

- **Brzo mišljenje**

- Heurističko
- Ekspertsko

- **Sporo mišljenje**

### Sistem 1

intuicija, instinkt

95%

brzo  
automatski pilot  
asocijativno  
brzopleto

...

### Sistem 2

racionalno razmišljanje

5%

sporo  
zahteva napor  
logično  
sumnjičavo

...



- Свестраност ренесансе
- Дизајн спортских реквизита
- Географске карте – права слика света
- Нови типови просторних структура у архитектури
- Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију

- 1) Позвани сте да одржите једно стручно, математичко предавање на једном од следећих скупова. Која тема највише одговара вашим општим интересовањима?
- 2) На скупу који сте одабрали, слушаоцима треба редом приказати:
  - Диреров загонетни полиедар
  - Засечени икосаедар
  - Димаксион (Фулерова) мапа света
  - Тенсегрити икосаедар
  - Велики икосаедар
- 3) Припремите три врсте предавања: школско, популарно и стручно

# Коме? Диреров загонетни полиедар

- ✓ Свестраност ренесансе
- Дизајн спортских реквизита
- Географске карте – права слика света
- Нови типови просторних структура у архитектури
- Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију



- C. H. MacGillavry, *The Polyhedron in A. Durer's 'Melancholia I': An Over 450 Years Old Puzzle Solved?* *Netherland Akad Wetensch. Proc.*, 1981.
- P. Schreiber, *A New Hypothesis on Durer's Enigmatic Polyhedron in His Copper Engraving 'Melencholia I'*, *Historia Mathematica*, 26, pp. 369-377, 1999.

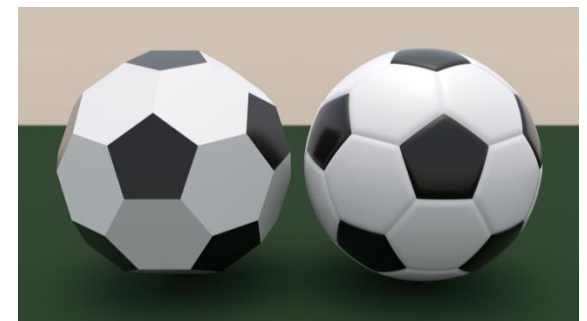
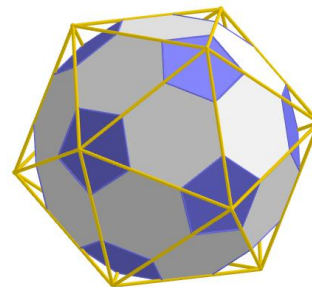
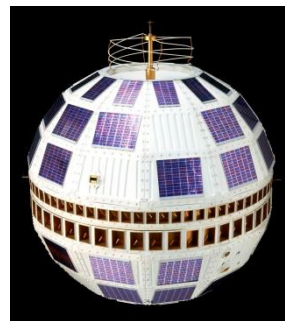
# Коме?

## Засечени икосаедар

- Свестраност ренесансе
- Дизајн спортских реквизита
- Географске карте – права слика света
- Нови типови просторних структура у архитектури
- Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију

Адидас телстар је модел фудбалске лопте коју је немачка фирма за израду спортске опреме Адидас направила 70-тих година 20. века. Дизајн лопте је инспирисан **засеченим икосаедром** који садржи 12 (црних) петоугаоних и 20 (белих) шестоугаоних страна. Овај дизајн је постао класика за фудбалске лопте.

<https://www.geogebra.org/classic/J4mum2dh>

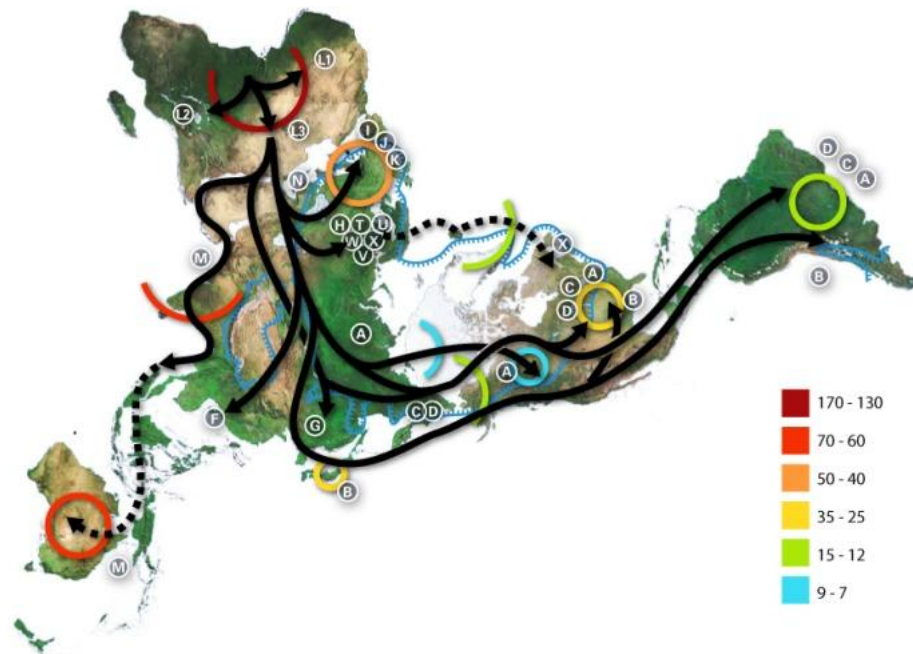


# Коме?

## Димаксион мапа света

- Свестраност ренесансе
- Дизајн спортских реквизита
- Географске карте – права слика света
- Нови типови просторних структура у архитектури
- Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију

**Димаксион (Фулерова) мапа** се добија пројектовањем површине планете Земље на икосаедар. Ову врсту пројекције увео је амерички архитекта, проналазач, дизајнер, проналазач и писац Бакминстер Фулер (1895–1983) да би сачувао облике и пропорције континената, и приказао их као „једино острво“.



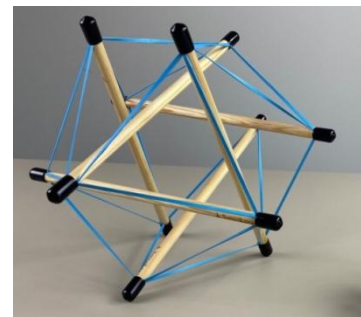
# Коме? Тенсегрити икосаедар

- ❑ Свестраност ренесансе
- ❑ Дизајн спортских реквизита
- ❑ Географске карте – права слика света
- ✓ Нови типови просторних структура у архитектури
- ❑ Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију

Од друге половине 20. века, проучавају се и развијају тзв. тенсегрити конструкције.

Ове конструкције представљају изузетан пример конструкцијске домишљатости и виртуозности.

Међу њима се посебно издваја **тенсегрити икосаедар** који се може направити од штапова и канапа развучених дуж ивица тзв. Јесеновог икосаедра.



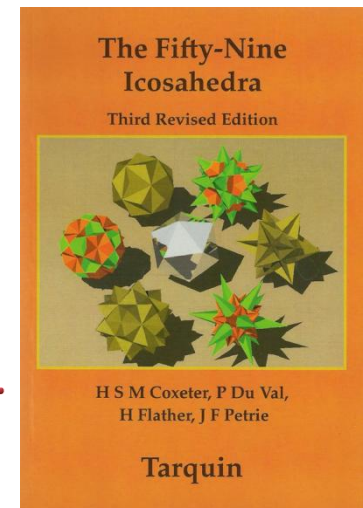
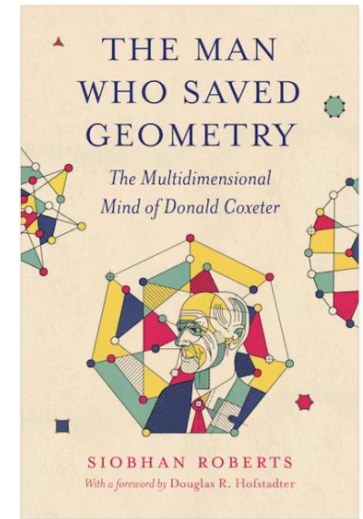
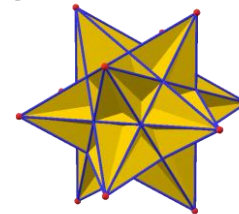
# Коме?

## Велики икосаедар

- Свестраност ренесансе
- Дизајн спортских реквизита
- Географске карте – права слика света
- Нови типови просторних структура у архитектури
- Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију

Доналд Коксетер (1907–2003) је британско-канадски математичар који се сматра једним од највећих геометара 20. века.

Коксетер се прославио се истраживањима која су резултирала књигом: Коксетер, Вал, Флатер, Петри, Педесет-девет икосаедара, која је први пут објављена 1938. године и у којој се разматрају и набрајају **стелације икосаедра.**

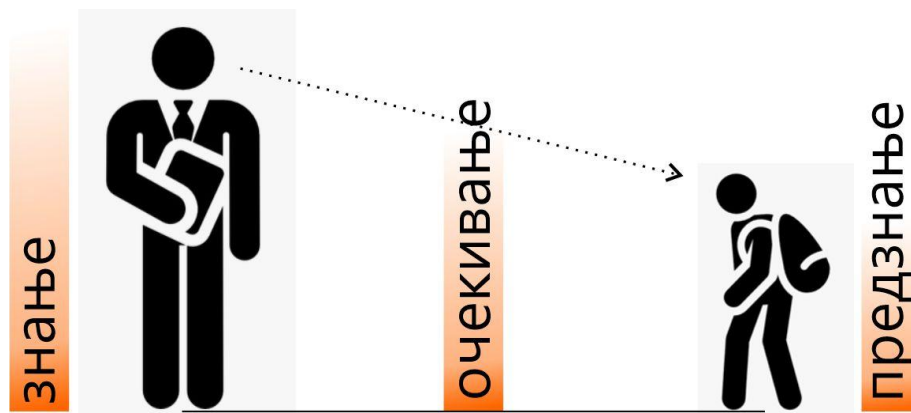


# Коме?

## М Где сви грешимо?

Изградња позитивног става према математици издваја се као један од најважнијих циљева наставе математике.

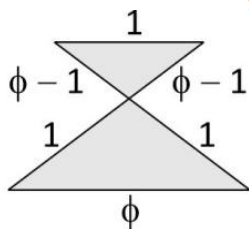
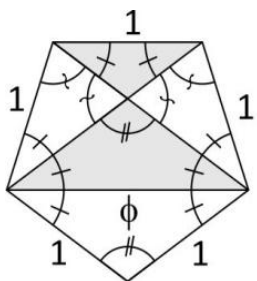
3)\*\* Припремите три врсте предавања: стручно, школско и популарно



# Коме?

М.Г.

## Учионица: примери и задаци



$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$

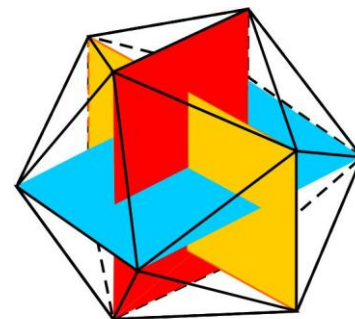
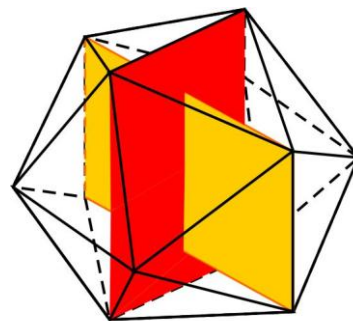
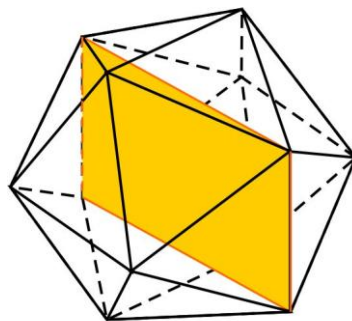
$$\phi^2 - \phi = 1$$

$$\left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\approx 0,618\ 033\ 988\ 7 \dots$$

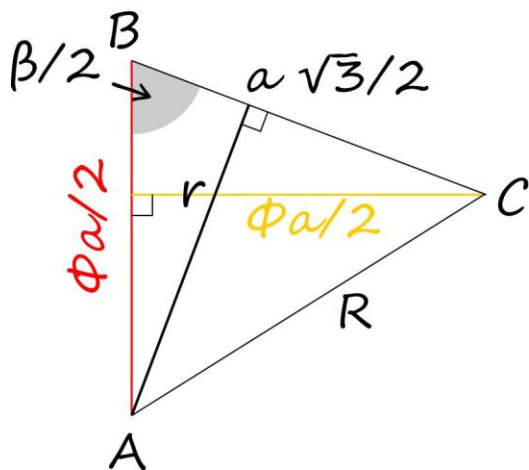
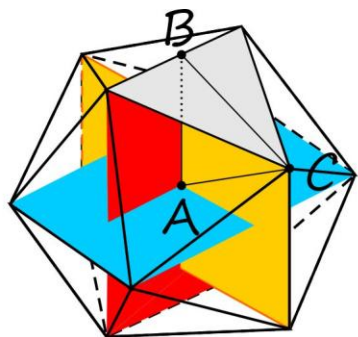
**Задатак** Златни правоугаоник јесте правоугаоник код кога је однос дуже и краће странице једнак златном броју  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618\ 033\ 988\ 7$ . Пронађите три златна правоугаоника која образују темена правилног икосаедра. Какав је међусобни однос међу равнима тих златних правоугаоника?



# Коме?

МГД

## Учионица: примери и задаци



**Задатак** Изведите образац за:

- полупречник уписане сфере ( $r$ );
- полупречник описане сфере ( $R$ );
- запремину икосаедра ( $V$ ).
- Одредите угао  $\beta$  између две суседне стране икосаедра.

**Решење в)**

$$V_{\text{ico}} = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot r = \dots = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} a^3$$

# Ко ме?

## МГДУ Принцип прилагођавања

Учење организовати тако да га ученик (студент) доживљава као смислено и вредно труда.

- Теорије мотивације
- Социокултурна теорија образовања (Виготског, Леонтијева и Лурије)

Циљеви учења математике:

- примена математике;
- развој мишљења.

# Светски куп у рачунању напамет

... међународно такмичење живих калулатора. На Купу 2024. године убедљиви победник, и то у свим категоријама, био је 12-годишњи [Aaryan Nitin Shukla](#) Аријан Нитин Шукла.



1. Сабирање десет десетоцифрених бројева

4190187220

+3967093178

+8567125486

+1005683165

+3635944647

+7645865467

+3506970235

+6710259450

+2347894647

+4995420559

[7 минута]

2. Множење два осмоцифрена броја

18467941 · 73465135

[10 минута]

3. Израчунавање квадратног корена шестоцифреног броја на осам децимала

$\sqrt{530179}$

[10 минута]

4. Који је дан био датог датума? Датуми се случајно бирају из периода 1600–2100;

нпр. 8. 12. 1721.

[1 минут]

...

# Математичари као „живи калкулатори“

---

✂ Израчунај напамет:

i)  $(714 - 99) - (714 + 99) + 99 \cdot 2$

ii)  $12\,000\,000 \cdot 0,00012$

iii)  $1 - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$

iv)  $\frac{\frac{0,1}{0,2}}{\frac{0,4}{0,6}}$

v)  $\sqrt{25^2 - 24 \cdot 25 + 24}$

✂ Заокружи слово испред вредности израза. Дозвољена је употреба калкулатора.

i)  $(9,6 + 6,72 : 0,05) : (5,1 : 1,7 - 7 : 3)$

A) 214,93    Б) 489,6    В) 216    Г) -244,8

ii)  $834,4 - (3432,12 - (43,01 - 1,35 \cdot 62,4))$

A) 1,864                      Б) -2638,95

В) В) -2556,49            Г) -5197.304

✂ Израчунај без употребе калкулатора:

i) 4190187220

ii) 67941 · 73465

+3967093178

+8567125486

+1005683165

+3635944647

# Почетна настава математике

Први и други разред:  
таблице сабирања и  
множења се уче  
напамет

Трећи разред: усмени и  
писмени поступци

Четврти разред:  
писмени поступци

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

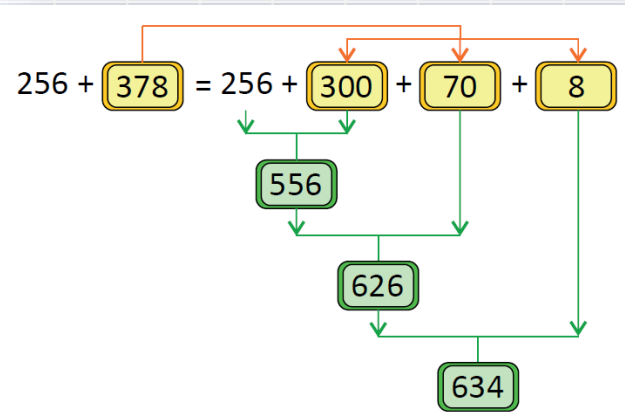
# Почетна настава математике

Први и други разред:  
таблице сабирања и  
множења се уче  
напамет

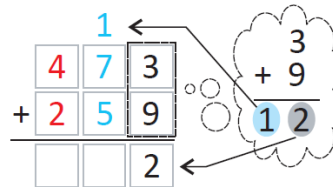
Трећи разред: усмени и  
писмени поступци

Четврти разред:  
писмени поступци

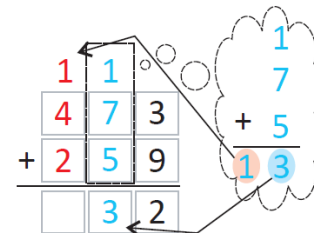
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7										16
8										17
9										18
.										9
0										0
1										9
2										5 18
3										24 27



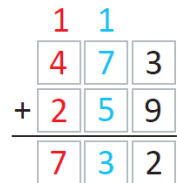
1. корак



2. корак



3. корак



# Почетна настава математике

**Први и други разред:**  
таблице сабирања и множења се уче напамет

**Трећи разред:** усмени и писмени поступци

**Четврти разред:**  
писмени поступци

## ПРОГРАМ НАСТАВЕ И УЧЕЊА ЗА ТРЕЋИ РАЗРЕД ОСНОВНОГ ОБРАЗОВАЊА И ВАСПИТАЊА:

- Усмени поступци рачунања осим у писаној форми, увежбавају се усменим рачунањем (без записивања) у циљу практичне примене у реалним ситуацијама везаним за рачунање са новцем и др.
- Ученике треба упућивати на коришћење едукативних софтвера и апликација за увежбавање основних рачунских операција.
- Савремене наставне методе укључују и употребу различитих софтверских апликација. Ученике треба упознати са употребом калкулатора ради провере тачности рачуна. Наставник ученике може упућивати на различите апликативне софтвере и бесплатне едукативне игре на мобилним телефонима, таблетима и рачунарима.



# Рачунање напамет

„Таблица“ множења са  
11, 12, ...

33



Calcul mental

- a)  $46 \times 7 + 46 \times 3 = ?$
- b)  $21 \times 35 + 79 \times 35 = ?$
- c)  $58 \times 14 - 58 \times 4 = ?$
- d)  $0,6 \times 79 + 0,4 \times 79 = ?$
- e)  $2,6 \times 3,5 + 7,4 \times 3,5 = ?$

## множење са 2

$2 \cdot 1 = 2$

$2 \cdot 2 = 4$

$2 \cdot 3 = 6$

$2 \cdot 4 = 8$

$2 \cdot 5 = 10$

$2 \cdot 6 = 12$

$2 \cdot 7 = 14$

$2 \cdot 8 = 16$

$2 \cdot 9 = 18$

$2 \cdot 10 = 20$

## множење са 12

$12 \cdot 1 = 12$

$12 \cdot 2 = 24$

$12 \cdot 3 = 36$

$12 \cdot 4 = 48$

$12 \cdot 5 = 60$

$12 \cdot 6 = 72$

$12 \cdot 7 = 84$

$12 \cdot 8 = 96$

$12 \cdot 9 = 108$

$12 \cdot 10 = 120$

## множење са 3

$3 \cdot 1 = 3$

$3 \cdot 2 = 6$

$3 \cdot 3 = 9$

$3 \cdot 4 = 12$

$3 \cdot 5 = 15$

$3 \cdot 6 = 18$

$3 \cdot 7 = 21$

$3 \cdot 8 = 24$

$3 \cdot 9 = 27$

$3 \cdot 10 = 30$

## множење са 13

$13 \cdot 1 = 13$

$13 \cdot 2 = 26$

$13 \cdot 3 = 39$

$13 \cdot 4 = 52$

$13 \cdot 5 = 65$

$13 \cdot 6 = 78$

$13 \cdot 7 = 91$

$13 \cdot 8 = 104$

$13 \cdot 9 = 117$

$13 \cdot 10 = 130$

# Рачунање напамет

„Таблица“ множења са  
11, 12, ...

33



Calcul mental

- a)  $46 \times 7 + 46 \times 3 = ?$
- b)  $21 \times 35 + 79 \times 35 = ?$
- c)  $58 \times 14 - 58 \times 4 = ?$
- d)  $0,6 \times 79 + 0,4 \times 79 = ?$
- e)  $2,6 \times 3,5 + 7,4 \times 3,5 = ?$

✘ Израчунати напамет производ  
двоцифреног и једноцифреног броја:

i)  $19 \cdot 6 = ?$

$$9 \cdot 6 = 54,$$

$$5 + 6 = 11 \rightarrow 19 \cdot 6 = 114$$

ii)  $17 \cdot 8 = ?$

$$7 \cdot 8 = 56,$$

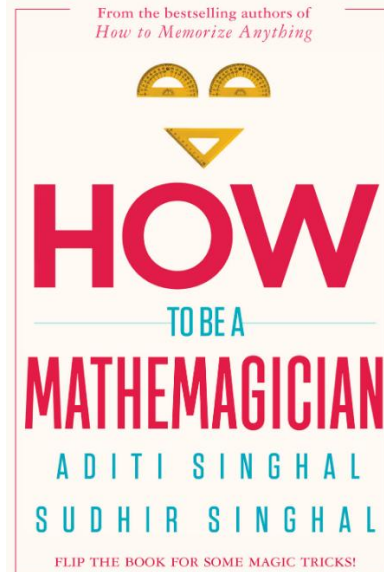
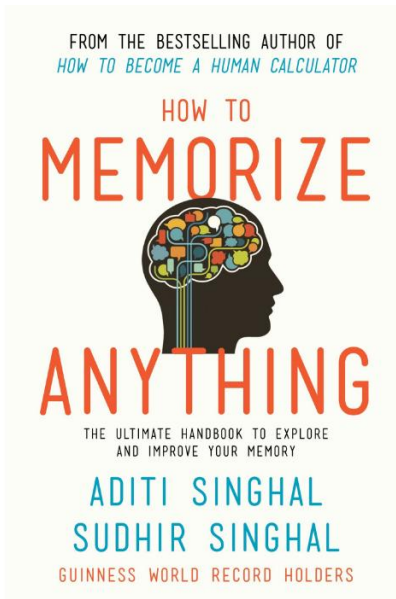
$$5 + 8 = 13 \rightarrow 17 \cdot 8 = 136$$

iii)  $14 \cdot 7 =$

iv)  $87 \cdot 6 =$

# Рачунање напапет

Израчунај напамет производ двоцифреног  
и једноцифреног броја: ...



Лекција којом су Адити Сингал и Судир Сингал својевремено поставили Гинисов рекорд тако што су одржали час са највећим бројем ученика – 2312 ученика је учило таблицу ...

# Квадрати напамет ...

Memorizing Squares by  
Association - First 25 -  
**Quick Mental Math Trick**

[https://www.youtube.com  
/watch?v=Mg5RSkhqQuI](https://www.youtube.com/watch?v=Mg5RSkhqQuI)

✂ Уочите правило за брзо рачунање.

$$\overline{11}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{11} + 1) + 1^2 = 10 \cdot 12 + 1 = 121$$

$$\overline{12}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{12} + 2) + 2^2 = 10 \cdot 14 + 4 = 144$$

$$\overline{13}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{13} + 3) + 3^2 = 10 \cdot 16 + 9 = 169$$

$$\overline{14}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{14} + 4) + 4^2 = 10 \cdot 18 + 16 = 196$$

$$\overline{15}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{15} + 5) + 5^2 = 10 \cdot 20 + 25 = 225$$

$$\overline{16}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{16} + 6) + 6^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{17}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{17} + 7) + 7^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{18}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{18} + 8) + 8^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{19}^2 = 10 \cdot 1 \cdot (\overline{19} + 9) + 9^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

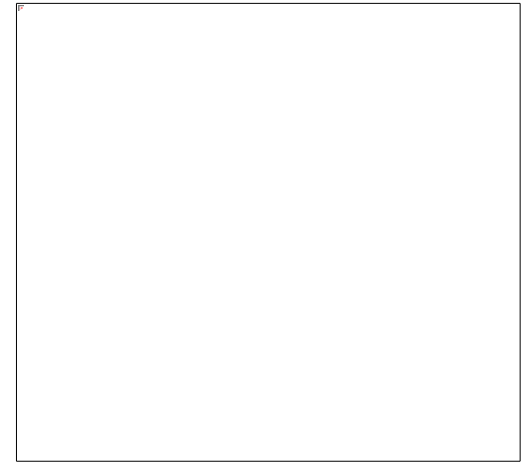
# Квадрати напамет ...

$50^2$	2500
$51^2$	2601
$52^2$	2704
$53^2$	2809
$54^2$	2916
$55^2$	3025
$56^2$	3136
$57^2$	3249
$58^2$	3364
$59^2$	3481
$60^2$	3600

	$5^2$	25
2	$15^2$	225
3	$25^2$	625
4	$35^2$	1225
5	$45^2$	2025
6	$55^2$	3025
7	$65^2$	4225
8	$75^2$	5625
9	$85^2$	7225
10	$95^2$	9025
11	$105^2$	11025

✘ Уочите правило за брзо квадрата бројева до 1000.

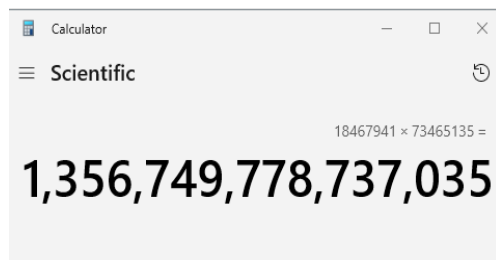
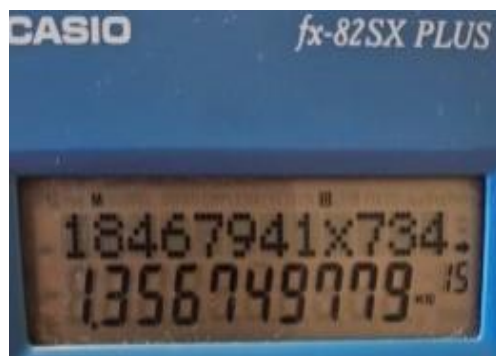
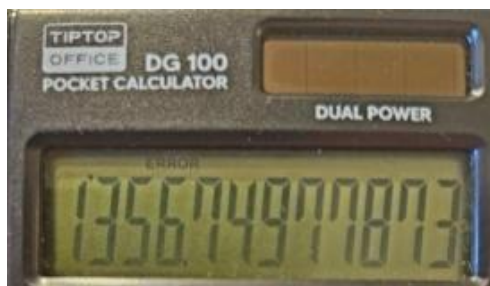
$$\begin{array}{r}
 67^2 \\
 \hline
 3 \quad 6 \quad 4 \quad 9 \\
 \quad 8 \quad 4 \\
 \hline
 4 \quad 4 \quad 8 \quad 9
 \end{array}$$



i)  $83^2$

ii)  $813^2$

# Калкулатор вешто ...



Светски куп у рачунању напамет

... међународно такмичење живих калкулатора. На Купу 2024. године убедљиви победник, и то у свим категоријама, био је 12-годишњи [Aarvan Nitin Shukla](#) Аријан Нитин Шукла.

1. Сабирање десет десетоцифрених бројева  
4190187220  
+3967093178  
+8567125486  
+1005683165  
+3635944647  
+7645865467  
+3506970235  
+6710259450  
+2347894647  
+4995420559  
[7 минута]

2. Множење два осмоцифрена броја  
18467941 · 73465135  
[10 минута]

3. Израчунавање квадратног корена шестоцифреног броја на осам децимала  
 $\sqrt{530179}$   
[10 минута]

4. Који је дан био датог датума? Датуми се случајно бирају из периода 1600–2100;  
нпр. 8. 12. 1721.  
[1 минут]

2. Множење два осмоцифрена броја  
18467941 · 73465135

✘ Најједноставнији калкулатори не могу да прикажу производ два осмоцифрена броја. На три различита калкулатора, након уноса израза  $18467941 \cdot 73465135$  добијени су следећи излази:

1. калкулатор: 1356.74977873 ERROR

2. калкулатор:  $1.356749779 \times 10^{15}$

3. калкулатор: 1,356,749,778,737,035

Шта значе ови изрази?

✘ Како се помоћу најједноставнијег калкулатора могу одредити последње три цифре производа  $18467941 \cdot 73465135$ ?

# Напредни задаци за калкулатор

---

- ✘ Израчунај количник и остатак при дељењу броја:  
а) 3 726 са 486   б) 453 079 са 1 208   в) 34 567 432 са 178
- ✘ Израчунај највећи заједнички делилац бројева:  
а) 126 и 315   б) 300 и 252   в) 550 и 198
- ✘ Два узастопна броја чији је производ 5402.
- ✘ Три узастопна броја чији је производ 32736.
- ✘ Два узастопна броја чији је збир квадрата 3613.
- ✘ а) Укуцајте број 999999 и поделите га са 7.  
б) Баците коцкицу (или изаберите неки број од бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6) и добијеним бројем помножите број добијен под а).  
в) Цифре производа добијеног под б) поређајте у растућем поретку. Који број се добија?  
г) Поновите поступак а)-в), за другачије изборе броја под б). Упоредите крајње резултате који се добијају. Шта уочавате?

# Нивои знања (математике, језика, ...)

❑ Флуентност

(спонтано, интуитивно, течно ...)

❑ Процедурална вештина

(тачно, функционално, флексибилно ...)

❑ Концептуално разумевање

(сагледавање структуре, веза, разлога ...)

## Основне фазе вежбања:

- ❑ „Загревање“ [10 мин]  
менталне  
калкулације са  
малим бројевима
- ❑ Главни део [20 мин]  
писмено  
израчунавање
- ❑ „Истежање“ [10 мин]  
израчунавање  
калкулатором

✘ [напамет] На сваку линији уписати један од бројева  $-3, 5, 7, -2$  тако да једнакости буду тачне.

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = 1$$

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = -13$$

$$\underline{\quad} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = -8$$

✘ [писмено] Израчунати без употребе калкулатора:

i)  $-63 - (-14) \cdot 11$

ii)  $-63 + (-14) \cdot (-11)$

iii)  $17 \cdot (-9) - (-72)$

✘ [калкулатор] Израчунати употребом калкулатора:

i)  $-17\,586 - (-52) \cdot 318$

ii)  $-3\,892 + (-204) \cdot (-37)$

iii)  $107 \cdot (-92) - (-742)$

## Основне фазе вежбања:

- „Загревање“ [10 мин]  
менталне  
калкулације са  
малим бројевима
- Главни део [20 мин]  
писмено  
израчунавање
- „Истежање“ [10 мин]  
израчунавање  
калкулатором

✘ [напамет] Израчунај напамет:  
 $0,7 : 0,2 + 0,1 \cdot 0,3$

✘ [писмено] Израчунај:  
 $15,7 : 0,2 + 0,12 \cdot 1,3$

✘ [калкулатор] Дат је израз  
 $13,928 : 0,0061 + 4,4782 \cdot 237,109$

i) Сваки број у изразу замени његовом приближном вредношћу добијеном заокруглавањем на две децимале, а затим израчунај вредност добијеног изразица применом калкулатора. Добијени резултат такође заокругли на две децимале.

ii) Користећи калкулатор израчунај  $13,928 : 0,0061$  и  $4,4782 \cdot 237,109$ . Добијене резултате заокругли на две децимале и сабери их.

iii) Упореди резултате добијене под i) и ii).

## Основне фазе вежбања:

- „Загревање“ [10 мин]  
менталне  
калкулације са  
малим бројевима
- Главни део [20 мин]  
писмено  
израчунавање
- „Истежање“ [10 мин]  
израчунавање  
калкулатором

✘ [напамет] Реши једначину напамет:  
 $x^2 - 5x + 6 = 0$

✘ [писмено] Реши једначину:  
 $2,5x^2 - 5x + 1,6 = 0$

✘ [калкулатор] У скупу реалних бројева  
решити једначине:

i)  $0,2x^2 - 7,32x + 66,97 = 0$

ii)  $0,2x^2 - 7,32x + 66,98 = 0$

\*\*\*

✘ [напамет] Скицирати график  
 $y = \ln|x| + 1$

✘ [писмено] Испитати особине и нацртати  
график  $y = \frac{\ln|x|+1}{x}$ .

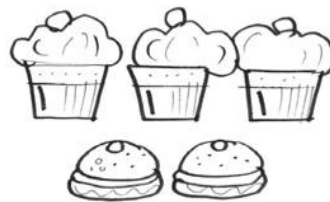
✘ [калкулатор] Нацртати график  $y = \frac{\ln|x|+1}{\sin x}$   
користећи ГеоГебру и испитати особине.

# Предано вежбање



- Ребуси
- „Магични“ бројеви
- Трке у рачуну
- Томбола
- ...

✂ Колико кошта крофна, а колико мафин?



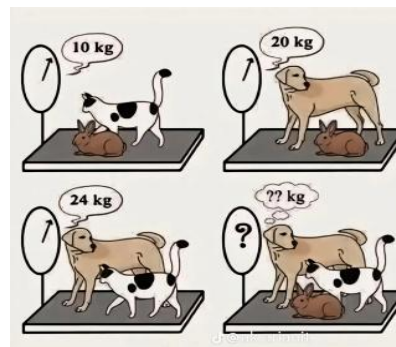
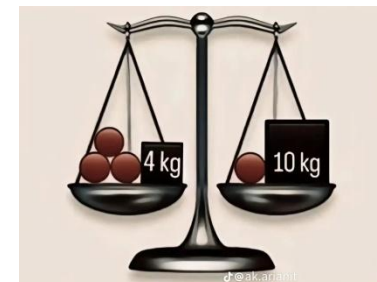
850 динара



550 динара



$$\begin{aligned} \text{Apple} + \text{Apple} + \text{Apple} &= 30 \\ \text{Apple} + \text{Banana} + \text{Banana} &= 18 \\ \text{Banana} - \text{Cherry} &= 2 \\ \text{Cherry} + \text{Apple} + \text{Banana} &= ?? \end{aligned}$$

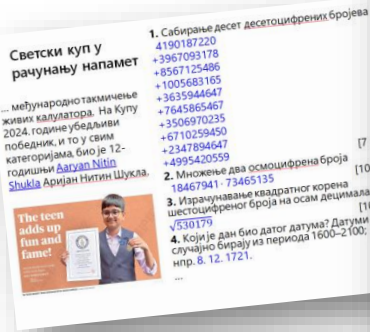


$$\begin{aligned} A + A + A &= 3 \\ B + B + A &= 5 \\ C + C + B &= 8 \\ A + B \times C &= ? \end{aligned}$$

# Трка у рачунању напапет

1. Сабирање десет десетоцифрених бројева

4190187220  
+3967093178  
+8567125486  
+1005683165  
+3635944647  
+7645865467  
+3506970235  
+6710259450  
+2347894647  
+4995420559



✘ Израчунај напет:

8  
+ 9  
+ 3  
+ 2  
+ 7  
+ 6  
+ 9  
+ 5  
+ 4  
+ 7

✘ Саставити Пајтон програм за вежбање дељења троцифрених бројева са 2.

```
import time
from random import randint

time_limit = 10
br_zad = 10
score = 0

for i in range(br_zad):
    t = time.time()
    value = randint(101, 999)
    print('zadatak ' + str(i+1) + ': ' + str(value) + '/2')
    user_answer = float(input('Odgovor: '))
    if time.time() - t < time_limit and user_answer == float(value) / 2:
        score = score + 1
    else: print('NEMA POENA (isteklo je vreme ili je odgovor pogrešan)')
print('UKUPAN BROJ POENA: '+str(score)+' (maks. br. poena je '+str(br_zad)+)')
```

✘ Саставити Пајтон програм за вежбање множења двоцифрених бројева са 2.

```
import time
from random import randint

time_limit = 10
br_zad = 10
score = 0

for i in range(br_zad):
    t = time.time()
    value = randint(10, 99)
    print('zadatak ' + str(i+1) + ': ' + str(value) + '*2')
    user_answer = float(input('Odgovor: '))
    if time.time() - t < time_limit and user_answer == float(value) * 2:
        score = score + 1
    else: print('NEMA POENA (isteklo je vreme ili je odgovor pogrešan)')
print('UKUPAN BROJ POENA: '+str(score)+' (maks. br. poena je '+str(br_zad)+)')
```

# Предано вежбање



- Ребуси
- „Магични“ бројеви
- Трке у рачуну
- Томбола
- ...

Број се не би променио ако дозволимо да се испред записа, слева допише неколико нула. На пример,

$$0127 = 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7,$$

$$0043 = 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3, \text{ итд.}$$

Самим тим, сваки број мањи од 10 000 има четвороцифрени запис.

✘ До магичног броја се долази на следећи начин:

1. Запишите један четвороцифрен број који има бар две различите цифре.
2. Поређајте цифре од највеће до најмање и запишите нови број.
3. Поређајте цифре од најмање до највеће и запишите нови број. Подсећамо, дозвољено је да запис броја почиње цифром 0.
4. Одузмите бројеве добијене у корацима 2 и 3. Уколико је потребно, допишите нуле испред добијене разлике да бисте добили четвороцифрен запис.
5. Са добијеном разликом поновите кораке 2, 3, 4 док не дођете до магичног броја. Који је магичан број?

- 
- Флуентност
  - Процедурална вештина
  - Концептуално разумевање

## Уочити и разумети правило



✘ Зашто се нулом не може делити?

Велики индијски математичар Баскара II (1114–1185) дао је једно од првих коректних објашњења негативног одговора на претходно питање.

**Множење** је процес узастопног сабирања.

$$8 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$

**Дељење** је процес узастопног одузимања, све док се стигне до нуле.

Нпр. рачунамо  $16 : 2$

$$16 - 2 = 14 \quad 14 - 2 = 12 \quad 12 - 2 = 10$$

$$10 - 2 = 8 \quad 8 - 2 = 6 \quad 6 - 2 = 4$$

$$4 - 2 = 2 \quad 2 - 2 = 0$$

$$16 : 2 = 8$$

# Дељење

1. корак  $259 : 7 = 3$

2. корак  $259 : 7 = 3$   
 $\begin{array}{r} 259 : 7 = 3 \\ -21 \phantom{0} \\ \hline 4 \phantom{0} \end{array}$

3. корак  $259 : 7 = 37$   
 $\begin{array}{r} 259 : 7 = 37 \\ -21 \phantom{0} \\ \hline 49 \phantom{0} \end{array}$

4. корак  $259 : 7 = 37$   
 $\begin{array}{r} 259 : 7 = 37 \\ -21 \phantom{0} \\ \hline 49 \phantom{0} \\ -49 \phantom{0} \\ \hline 0 \phantom{0} \end{array}$

✂ Израчунај:

i)  $52\,731 : 7$     ii)  $358\,870 : 17$

✂ Ако је 25. маја 2024. године била среда, који дан ће бити 1. јуна 2025. године?

✂ Звездице замени цифрама:

$$\begin{array}{cccccccc} * & * & * & * & : & * & 7 & = & * & * \\ * & * & 5 & & & & & & & \\ \hline & & & * & * & & & & & \\ - & & * & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

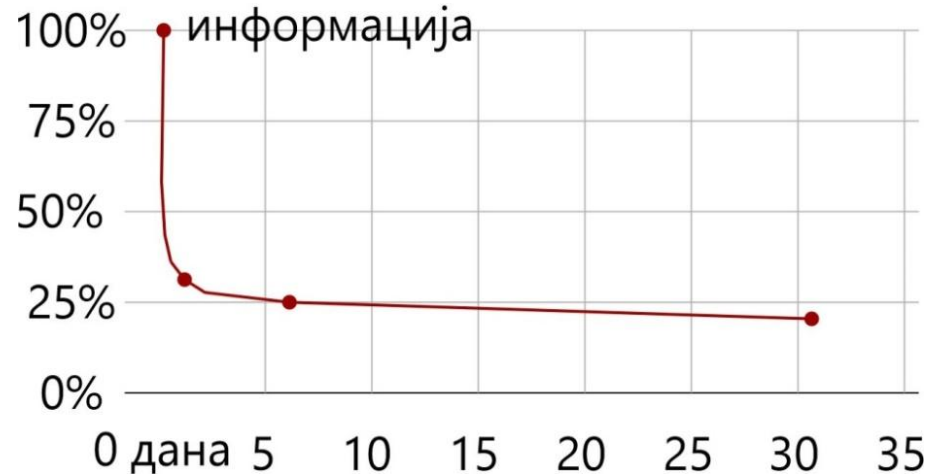
# Вежбање

Repetitio est mater studiorum.

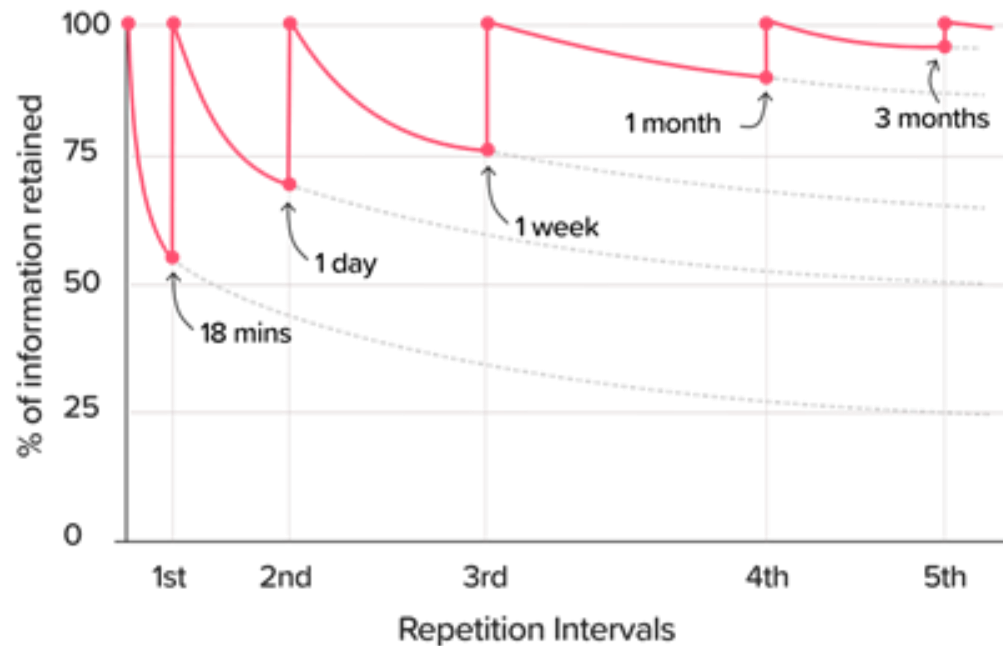
Мрзео сам сваки минут тренинга, али сам рекао „Не одустај. Мучи се сад и проведи остатак живота као шампион.“

Мухамед Али

## Ебингхаусова крива заборављања



## Rate of Forgetting with Study/Repetition



# Разломци

---

*Разломци представљају први озбиљан излет у апстракцију, и због тога је разумевање разломака најкритичнији корак у припреми за алгебру.*

Ханг-Си Ву

професор емеритус за математику  
Универзитета Калифорније у Берклију

- Зашто је, на пример,  $\frac{2}{7} : \frac{1}{9} = 2\frac{4}{7}$ ?
- Да ли је довољно ученицима основне школе само показати одговарајући поступак или су потребна и додатна образложења?
- Како поступак образложити ученицима основне школе?

# Разломци

---

✂ Израчунај:

i)  $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$

ii)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

iii)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

iv)  $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$



# Стимулација за мозак

- Урадите нешто ново свакога дана;
- Обавите неку једноставну радњу недоминантном руком;
- Спелујте речи уназад (без писања);
- Рачунајте напамет;
- Решавајте главоломке, играјте друштвене игре...

РЕШЕЊЕ

$p = 1 \text{ MPa}, \quad \rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

---

$h = ?$

Најпре ћемо претворити мегапаскале у паскале:  $p = 1 \text{ MPa} = 1000000 \text{ Pa}$ .

Из формуле за хидростатички притисак  $p = \rho \cdot G \cdot h$  изразићемо висину тј. дубину воде:

$$h = \frac{p}{\rho \cdot G} = \frac{1000000 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} = 100 \text{ m}$$

Тражена дубина износи 100 метара.

(fMRI) study

Kako pokazuje program intervencije Grifina, Kejsa i Ziglera (Griffin, Case and Siegler, 1994) obuka može imati snažne efekte na uspeh u matematici. Ovaj uspeh verovatno odslikava neuronske promene, jer skorašnje studije pokazuju da učenje novog matematičkog znanja može dramatično promeniti obrasce moždanih aktivnosti (Delazer et al., 2003, 2004). Promene koje se događaju rezultat su, čini se, sadržaja i metoda obuke.

# Стимулација за општи напредак

Књиге преплављују Европу након Гутенберговог епохалног открића.

1492  
1497  
Рачуноводствене књиге моћне породице Медичи почињу да се воде у савременом нумеричком запису.  
Колумбо се искрцава на обале Америке.

1492

1497

Лука Пачоли објављује Божанствену размеру на народном језику, коју илуструје Леонардо Да Винчи.

Дел Феро и Тартаља откривају формуле за решавање кубних једначина.

1543  
1545  
Никола Коперник објављује књигу О кретању небеских тела.

1543

1545

Кардано објављује своје капитално дело Ars Magna (Велика вештина) у коме даје и формуле за решавање алгебарских једначина 3. и 4. степена.

Бомбели уводи комплексне бројеве.

1600  
1601  
Ђордано Бруно је спаљен на ломачи.

1600

1601

Бурги објављује Логаритамски канон.

Кеплерови закони.



# Кратак поглед на 16. век

Књиге преплављују Европу након Гутенберговог епохалног открића.

1492  
1497  
Рачуноводствене књиге моћне породице Медичи почињу да се воде у савременом нумеричком запису.  
Колумбо се искрцава на обале Америке.

1492

1497

Лука Пачоли објављује Божанствену размеру на народном језику, коју илуструје Леонардо Да Винчи.

Дел Феро и Тартаља откривају формуле за решавање кубних једначина.

1543  
1545  
Никола Коперник објављује књигу О кретању небеских тела.

1543

1545

Кардано објављује своје капитално дело Ars Magna (Велика вештина) у коме даје и формуле за решавање алгебарских једначина 3. и 4. степена.

Бомбели уводи комплексне бројеве.

1600  
1601  
Ђордано Бруно је спаљен на ломачи.

1600

1601

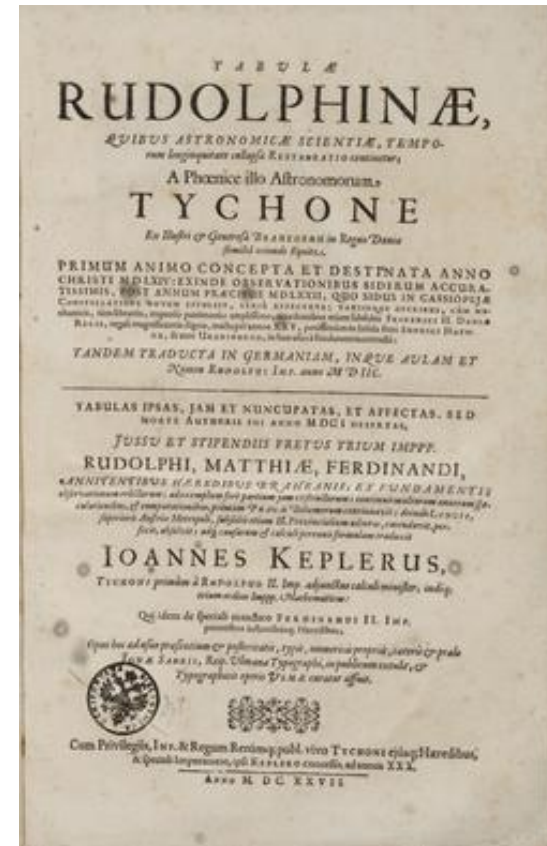
Бирги објављује Логаритамски канон.

Кеплерови закони.



# Кеплер о Биргијевом канону

„... као помоћ у израчунавању, Јоуст Бирги је дошао до логаритама много година пре него што се појавио Неперов систем; али будући да је био лењ и веома некомуникативан човек, уместо да одгаји своје дете за јавну корист, напустио га је по рођењу.“



Кеплер, 1627, *Рудолфове таблице* (лат. *Tabulae Rudolphinae*; састоје се од каталога звезда и таблица које предвиђају положаје планета)

## Задатак

Замислимо да чаробни пасуљ, чим се посади у земљу почне непрекидно да расте. Првог дана достигне висину од 2 m, а затим сваког наредног дана удвостручи висину. Процените време када ће да достигне висину од 21 m?



$t$ (vreme u danima)	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$ (rast u metrima)	2	4	8	16	32	64	128	256

$$2^t = 21$$

$$t = \log_2 21$$

Шта ако још нису  
измишљени логаритми?

0.11796...

## Задатак

Замислимо да чаробни пасуљ, чим се посади у земљу почне непрекидно да расте. Првог дана достигне висину од 2 m, а затим сваког наредног дана удвостручи висину. Процените време када ће да достигне висину од 21 m?



$t$ (vreme u danima)	1	2	3	4	5	6	7	8
$h$ (rast u metrima)	2	4	8	16	32	64	128	256

Bürgi (1552–1632)

Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen

Таблица аритметичке и геометријске прогресије

# Како је Бирги размишљао?

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h = 2^t$	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Сувише  
су велики  
скокови!

$t$	$h = 1.1^t$	$\Delta h$
0	1	0.1
1	1.1	0.11
2	1.21	0.121
3	1.331	0.1331
4	1.4641	0.14641
5	1.61051	0.161051
6	1.771561	0.1771561
7	1.9487171	0.19487171
8	2.14358881	0.214358881
9	2.357947691	

$$\begin{aligned}\Delta h &= 1.1^{t+1} - 1.1^t \\ &= 1.1^t (1.1 - 1) \\ &= 1.1^t / 10\end{aligned}$$

Наредну вредност целобројног степена броја 1.1 добијамо повећавајући претходну вредност за њену десетину.

## Задатак

Замислимо да чаробни пасуљ, чим се посади у земљу почне непрекидно да расте. Првог дана достигне висину од 2 m, а затим сваког наредног дана удвостручи висину. Процените време када ће да достигне висину од 21 m?

$t$	$h = 1.1^t$
0	1
1	1.1
2	1.21
3	1.331
4	1.4641
5	1.61051
6	1.771561
7	1.9487171
8	2.14358881
9	2.357947691

$$2^t = 21 / 16$$

$$2^{t-4} = 1.3125$$

$$1.3125 \approx 1.331 = 1.1^3$$

$$2 \approx 1.9487171 = 1.1^7$$

$$2^{t-4} \approx (1.1^7)^{t-4} \approx 1.1^3 = 1.331$$

$$7(t-4) \approx 3$$

$$t \approx 4 + 3/7 \approx 4.4$$

$$t = \log_2 21 \approx 4.3923174227787602888957082611796...$$

## Задатак

$t$	$h = 1.1^t$
0	1
1	1.1
2	1.21
3	1.331
4	1.4641
5	1.61051
6	1.771561
7	1.9487171
8	2.14358881
9	2.357947691

Замислимо да чаробни пасуљ, чим се посади у земљу почне непрекидно да расте. Првог дана достигне висину од 2 m, а затим сваког наредног дана удвостручи висину. Процените време када ће да достигне висину од 21 m?

$t$ (vreme u danima)	1	2	3	4	5	6	7
$h$ (rast u metrima)	2	4	8	16	32	64	128

$$2^t = 21$$

$$t \approx 4.4$$

Чаробни пасуљ ће висину од 21 m да достигне после 4 дана и 9.6 сати. ( $0.4 \cdot 24 = 9.6$ )

# Бирги је узео финију поделу

$t$	$h = 1.0001^t$	$\Delta H$
0	1	0.0001
1	1.0001	0.00010001
2	1.00020001	0.000100020001
3	1.000300030001	

$$\begin{aligned} \Delta h &= 1.0001^{t+1} - 1.0001^t \\ &= 1.0001^t (1.0001 - 1) \\ &= 1.0001^t / 10000 \end{aligned}$$



$t$	$h = (1.0001^{10000})^t$
0	1
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001

$$1.0001^{10000} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2.718$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, n \rightarrow +\infty$$

# Таблица може да се чита здесна налево



$t$	$h = (1.0001^{10000})^t$
0	1
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001
...	...
$t_1$	$a$
...	...
$t_2$	$b$
...	...

$$a^x = b$$

$$a \approx "e"^{t_1}$$

$$b \approx "e"^{t_2}$$

$$("e"^{t_1})^x \approx "e"^{t_2}$$

$$t_1 x \approx t_2$$

$$x \approx \frac{t_2}{t_1}$$

$$x \ln a = \ln b$$

$$x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Н  
Е  
К  
А  
Д  
А  
  
Д  
А  
Н  
А  
С


# Двосмерно читање


$$h(t) = e^t$$

$t$	$h = (1.0001^{10000})^t$
0	1
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001
...	...
$a$	$e^a$
...	...
$\ln b$	$b$
...	...



$t$	$h = e^t$
0	1
0.0001	1.00010005
0.0002	1.00020002
0.0003	1.000300045
...	...
$a$	$e^a$
...	...
$\ln b$	$b$
...	...


$$t(h) = \ln h$$

# Главна формула!

$t$	$h = (1.0001^{10000})^t$	$\Delta h = h / 10000$	$\Delta t = 0.0001$
0	1	0.0001	$\Delta h = h \Delta t$
0.0001	1.0001	0.00010001	
0.0002	1.00020001	0.000100020001	
0.0003	1.000300030001	...	

1°

$$\frac{\Delta t}{\Delta h} = \frac{1}{h}$$

$$t(h) = \ln h$$

$$t'(h) = (\ln h)' = \frac{1}{h}$$

2°

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = h$$

$$h(t) = e^t$$

$$h'(t) = (e^t)' = e^t$$

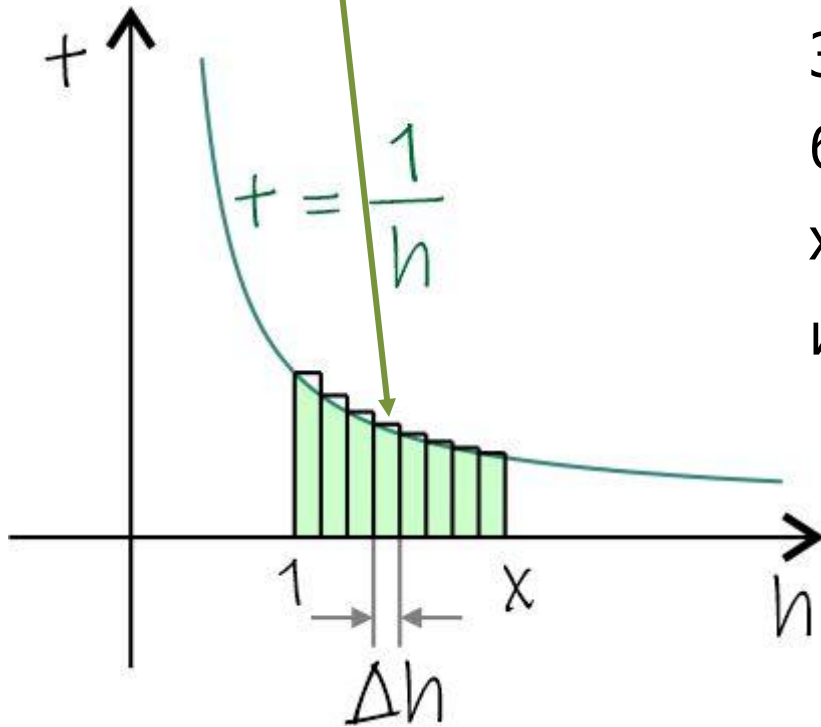
3°

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{h}$$

геометријски  
поглед

# Геометријски поглед

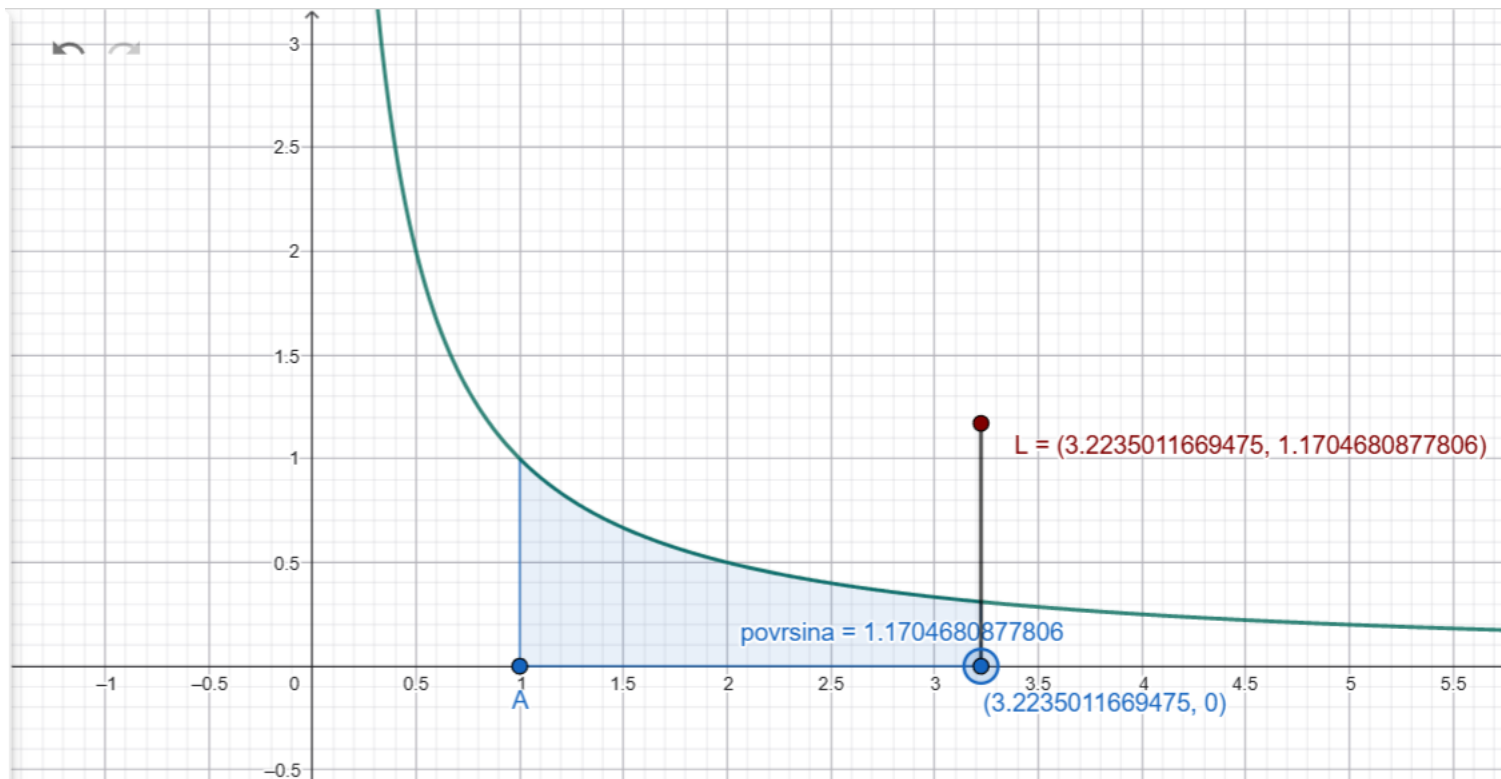
$$\Delta t = \frac{\Delta h}{h}$$



За  $x > 1$ ,  
број  $\ln x$  је површина испод  
хиперболе  $t = \frac{1}{h}$ , у равни  $Oht$   
изнад интервала  $[1, x]$ .

# Геометријски поглед

<https://www.geogebra.org/m/b568hz38>



# Кратак поглед на 16. век

једначина 3. и 4. степена.

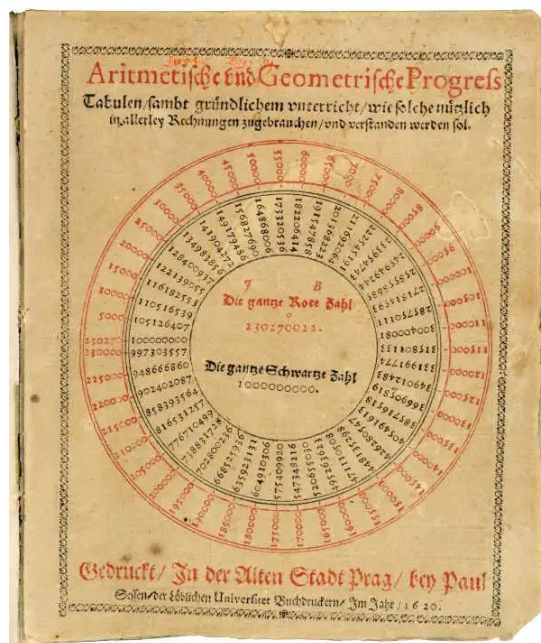
Бомбела уводи комплексне бројеве.

Бордано Бруно је спаљен на ломачи.

1600  
1601

Бирги објављује Логаритамски канон.

Кеплерови закони.



Увођење логаритамских таблица донело је нову револуцију у техникама рачунања.

Седamnaести век се често назива веком генија.

# Задатак 4

---

Из једне од области математика или рачунарство, саставити по три задатка:

- Флуентност (крај основне школе)
- Писменост (крај основне школе)
- Концептуално разумевање концепата (крај средње школе)

Отворен тип задатка, без понуђених одговора, где се уноси кратак одговор: број, реч, ознака и сл.