ŠKOLA

Reč škola je izvorno starogrčkog porekla i prvobitno je označavala dokolicu, besposlicu, odmor, zabavu. Dosta kasnije je postala učilište – mesto gde se uči. Međutim, još uvek u društvenoj svesti odjekuje prvobitno značenje reči škola, i živo se diskutuje koliko „uzalud izgubljenog vremena“ odvuče škola, bilo zbog neadekvatnog izbora sadržaja koji se uče, bilo zbog slabo razvijene atmosfere učenja. Krize obrazovanja, o kojima je bilo reči u prethodnom poglavlju, prevashodno su preslikani problemi školovanja, budući da se potreba za obrazovanjem identifikovala sa obavezom školovanja.

Matematičko obrazovanje treba podići na viši nivo i istovremeno relaksirati stege školovanja.

Potraga za odgovorima na velika pitanja nastave

Slika Feliks Klajn (1849–1925) je ostavio dubok trag u matematici svojim naučnim istraživanjima, Klajn se dosta bavio i pitanjima nastave matematike. Sa velikim entuzijazmom je popularizovao matematiku i nastojao da modernizuje nastavu i približi je aktuelnim teorijama i istraživanjima. Upamćen je kao posebno harizmatičan i otvoren za komunikaciju. Klajn je inicijator mnogih seminara, udruženja, međunarodnih organizacija i skupova.

Klajnove didaktičke ideje su zaista velike, a danas još uvek aktuelne, jer praktično nikada nisu zaživele u punom smislu. Izvodi iz predgovora njegove čuvene knjige *Elementarna matematika sa napredne tačke gledišta* (prvo izdanje 1908. godine)[1], bez ikakvih bitnih izmena se uklapaju u novije „manifeste“ savremene nastave matematike. Sama knjiga je nastala na osnovu predavanja o nastavi matematike, koja je Klajn godinama držao u raznim prilikama.

… pomenuću trotomnu Enciklopediju Elementarne matematike (Enzyklopädie der Elementarmathematik) koju su napisali Veber i Velštajn, delo koje se među novijim publikacijama najviše odgovara mojim namerama. … Istovremeno ću ukazati na bitne razlike između tog dela i plana mojih predavanja. U Enciklopediji, čitava struktura elementarne matematike je izgrađena sistematično i logično, na zrelom jeziku naprednih studenata. Ne uzima se u obzir kako bi se te stvari zaista mogle uključiti u školsku nastavu. Izlaganje u školama, međutim, trebalo bi da bude

[1] Недавно је Springer, 2016. године, објавио нове преводе Клајнових књига: *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint, Volume I: Arithmetic, Algebra, Analysis*; *Volume II: Geometry*, *Volume III: Precision Mathematics and Approximation Mathematics*

psihološko, a ne sistematično. Nastavnik, da tako kažemo, mora da bude diplomata. On mora uzeti u obzir psihičke procese kod učenika da bi privukao njihovo interesovanje; i uspeće samo ako izlaže stvari u obliku koji je intuitivno razumljiv. …

Iako se to podrazumeva, treba — mutatis mutandis — imati na umu da u svakoj nastavi, čak i na univerzitetu, matematiku treba povezivati sa svim onim što je učeniku u datoj fazi razvoja ozbiljno zanimljivo i što se na bilo koji način može dovesti u vezu sa matematikom. … Upravo tu psihološku vrednost nastojaću naročito da istaknem u svojim predavanjima.

Još jedna razlika između Vebera–Velštajna i mene odnosi se na određivanje sadržaja školske matematike. Veber i Velštajn skloni su konzervativnom pristupu, dok sam ja progresivan. ... Mi, koje nazivaju reformatorima, stavili bismo pojam funkcije u samo središte nastave, jer od svih pojmova matematike u poslednja dva veka upravo on ima vodeću ulogu svuda gde se koristi matematičko mišljenje. Uveli bismo ga u nastavu što je moguće ranije, uz stalnu upotrebu grafičke metode, tj. prikazivanja funkcionalnih odnosa u koordinatnom sistemu, koja se danas podrazumeva u svakoj praktičnoj primeni matematike.

Da bismo omogućili ovu novinu, iz nastavnog programa bismo uklonili veliki deo tradicionalnog gradiva — gradiva koje samo po sebi može biti zanimljivo, ali je manje bitno sa stanovišta svog značaja u vezi sa savremenom kulturom. Snažan razvoj prostorne percepcije, pre svega, uvek će biti jedan od glavnih ciljeva. U višim razredima, međutim, nastava treba da prodre dovoljno duboko u elemente infinitezimalnog računa … da bi prirodnjak ili stručnjak za osiguranje već u školi stekao alate koji će mu biti neophodni.

Početak 20. veka obeležio je veliki međunarodni pokret reorganizacije nastave matematike. Duh tog vremena, a donekle i savremenog doba, ilustruje kratak članak Petra Tipe, objavljen 1920. godine u *Prosvetnom glasniku*, u kome su sažeto prikazane osnovne ideje reforme matematičke nastave. Kao glavna načela reforme, Tipa izdvaja:

1) funkcionalno posmatranje i mišljenje i

2) „dinamičku” geometriju umesto „statičke” Euklidove geometrije. Ubrzo i rezimira:

„Ovo su glavna načela pokreta, koji je stekao oduševljenih pristalica, ali i ogorčenih protivnika, i oni stoje narogušeni jedni prema drugima, braneći jedni reformu (reformisti) a drugi tradiciju (tradicionalisti).

...

Kao i svuda, i ovde se javljaju pomirljivci, koji traže neku zlatnu sredinu da zadovolje obe strane i prekinu spor.

...

Ko će pobediti: reformisti ili tradicionalisti? Ili će pomirljivci složiti protivnike za neku zlatnu sredinu?

Referat Sime Markovića, objavljen 1931. godine u Glasniku jugoslovenskog profesorskog društva, nastavlja da kritikuje školsku matematiku i *pored izvesnih promena u nastavi*. Kako je moderan reformni pokret obuhvatio „ceo kulturni svet”, Marković je smatrao da je naša indiferentnost prema pokretu nedopustiva. U članku je jasno istakao glavne ideje reformnog pokreta i ukazao na načine na koje je potrebno sadržinu i formu tadašnje nastave izmeniti u duhu tih ideja. Neke od ideja su:

1) Nastavu treba osloboditi nepotrebnog tereta;

2) Sve grane matematike treba ispreplitati međusobno tako da ostavljaju utisak jedne harmonične celine;

3) Sve više treba obraćati pažnju na logičko mišljenje;

4) Potrebno je da deca rade, eksperimentiraju; decu treba pripremiti, da osete potrebu za određenim dokazom i predosete istinu koja će dokazom biti potvrđena;

5) Udžbenici ne smeju biti dogmatični i suvi;

6) Nastavnik treba da provede učenika kroz sve etape kroz koje su prošli njegovi preci; brže ali ne preskačući pri tome ni jednu od tih etapa;

7) Učenicima treba što češće davati razne zanimljive probleme, prividne paradokse osnovane na raznim vicevima, treba ih upoznati i sa nekim matematičkim igrama.

Pred kraj 20. veka stanje nastave matematike još uvek nije sjajno. Američki matematičar Vitni (1907 – 1989) nastavlja sa ozbiljnim kritikama:

> Već nekoliko decenija svedoci smo neuspeha u nastavi matematike u školama uprkos intenzivnim i brojnim naporima da se popravi stanje stvari. Treba da shvatimo da imamo fundamentalne nedostatke u procesu školovanja. Ali izgleda da se niko iskreno ne bavi ovim problemom; težimo ka „izvanrednom“ bez osvrtanja na uzroke neuspeha ili sporedne pojave preduzetih akcija, pokušavamo da izlečimo simptome umesto da postavimo dijagnozu, usmereni smo na polaganje testova umesto na značajne ciljeve.

Whitney, H. (1985). *Taking responsibility in school mathematics education*. The Journal of Mathematical Behavior, 4(3), 219–235.

Uopšteno govoreći, uz opasnost da se pomalo i pretera, tokom čitavog perioda se ponavljaju skoro iste kritike za koje izgleda da ne postoji volja da se zaista ozbiljno razmotre. Istorijat svih pokreta za reformu nastave matematike jeste jedna zanimljiva tema, o kojoj će tek povremeno biti reči u narednim poglavljima. Izdvojene kritike sasvim su dovoljne da otvore mnogo važnija pitanja: Zašto su uvek aktuelne kritike nastave matematike izrečene pre više od jednog veka?, Mogu li se uopšte ostvariti Klajnove zamisli iz Predgovora?, Gde uporno grešimo?, Zašto postoji generalno nepoverenje prema promenama? itd. U potragu za odgovorima moglo bi se poći, na primer, od samo jedne rečenice iz Predgovora koja je u svim kasnijim raspravama i analizama uzeta kao jedna od fundamentalnih ideja Klajnovog pokreta:

> *Mi, koje nazivaju reformatorima, stavili bismo pojam funkcije u samo središte nastave, jer od svih pojmova matematike u poslednja dva veka upravo on ima vodeću ulogu svuda gde se koristi matematičko mišljenje.* (∗)

Na ovaj zahtev je školska matematika, sredinom 20. veka odgovorila uključivanjem pojma funkcije u nastavne programe počev od viših razreda osnovne škole, zanemarujući potpuno Klajnovu ideju „psihološke reorganizacije“ nastave. Ubrzo, nekoliko decenija kasnije, pojavljuje se ogroman broj članaka u kojima se oštro kritikuje prerano uvođenje formalne definicije funkcije. Anna Sierpińska (1992) u knjizi On Understanding the Notion of Function, nalazi da je rano uvođenje apstraktnog pojma funkcije potpuno beskorisno, da učenici ovaj pojam ili ignorišu ili pogrešno razumeju. \footnote{Još dublju analizu problema nude Ed Dubinsky i Guershon Harel (1992) u The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.} Apstraktan pojam funkcije je nestao iz školskih programa brzinom kojom je i bio uveden.

JEDAN MALI RAZGOVOR Konveksnost …

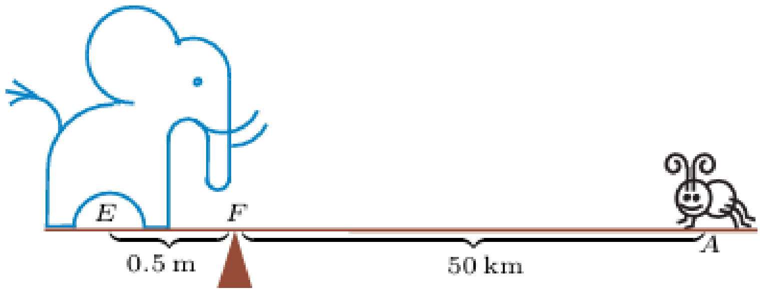
Početkom 21. veka dolazi do reinterpretacije Klajnovih ideja i novih pokušaja da se te ideje ožive. (Hans-Georg Weigand, William McCallum, Marta Menghini, Michael Neubrand Gert Schubring, Editors, The Legacy of Felix Klein https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-99386-7)

Kada se rečenica (∗) sagleda u čitavom kontekstu Predgovora, pojavljuje se znatno šire shvatanje „funkcijskog razmišljanja“. To nije razmišljanje koje u osnovi ima formalnu definiciju funkcije, već razmišljanje usmereno na promene i zavisnosti, i na uočavanje svojstava na koja te promene ne utiču, odnosno zakonitosti koje proizlaze iz zavisnosti. Formalna definicija funkcije treba da se rodi iz neformalne konceptualne slike stvorene nizom raznovrsnih primera transformacija. Ovakvo stanovište zapravo je potpuno u duhu tzv. Erlangenskog programa koji nudi jedan širok pogled na savremenu matematiku: Razumeti invarijante (ono što ostaje isto) pri određenim transformacijama (promenama). Klajn je Erlangenski program razvio pre svega da bi klasifikovao geometrije. Međutim ideje Programa se prirodno šire i na skoro sve oblasti matematike, pa i u samu nastavu. Sledeći taj duh, moglo bi se reći da dobar čas geometrije nije onaj gde se nešto izračuna, i gde se izvede nova posledica aksioma, već gde se otkrije šta se ne menja.

Praktični prilozi, a ne teorijske rasprave Klajnovim opštim načelima nastave matematike.

Polazno načelo: Matematika mora da ostane „živa“, prikazana kao jedna skladno povezana, smislena i dinamična celina.

Razradićemo jedan matematički koncept, a ne za pojedinu nastavnu temu tradicionalnom smislu. Kada se razrada matematičkog koncepta uskladi sa razvojnim fazama kognitivnog sazrevanja dobija se osnovni okvir za sastavljanje savremenog nastavnog plana. Ova zamisao biće prikazana kao mala zbirka zadataka koji su uglavnom nestandardni za tradicionalnu školsku matematiku. Jezgro ove zbirke biće poznati zakon poluge (prve vrste):



🔑 U promeni traži ono što ostaje nepromenjeno.

Ogromnu didaktičku vrednost ima diskusija o promenama sa glavnim pitanjima: Šta se menja? Šta ostaje nepromenjeno? Poznate zagonetke „Nađi razlike“ mogu da posluže kao dobar uzor za mnoge naprednije spoznaje. Posebno je važno da se otkrije značaj matematičkog jezika u opisivanju slika. Na primer, osećaj za prirodne zakonitosti i jednostavna igračka, poznata kao *Arhimedova klackalica*, dovoljni su da deca uoče osnovne zakone poluge i primene ih u jednostavnim situacijama.

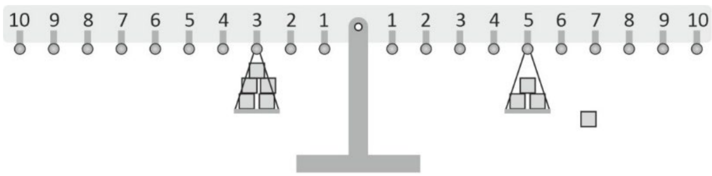
Slika . Arhimedova klackalica prikazana na poseduje veliki didaktički potencijal.

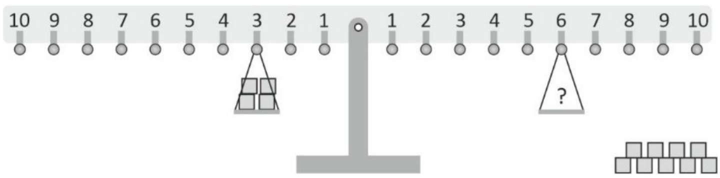
Upotreba ove igračke u početnim fazama učenja potpuno je opravdana činjenicom da je dete sposobno da koristi pojmove i primenjuje zakonitosti u praksi, znatno pre nego što ih postane svesno i što ih potpuno razume [Vigotski L., Mišljenje i govor, *Nolit,* Beograd, 1977.]. Kroz raznovrsne zadatke, prilagođene učenicima najmlađeg uzrasta, mogu se istaći veoma važne pouke.

Z. Posmatraj situacije prikazane na slikama. Opiši šta je različito, a šta je isto? U opisima koristi matematičke termine: brojeve, jednakost i nejednakost, zbir itd.

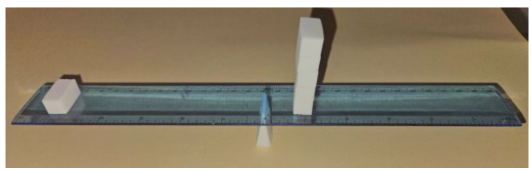
SLIKE …

Z. Dopuni sliku tako da prikazana poluga bude u ravnoteži.





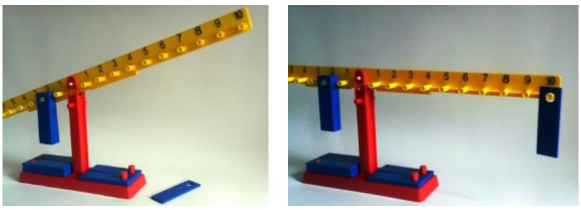
Slika. Zakoni poluge se mogu otkrivati i eksperimentom za koji su dovoljni dugačak ravan lenjir i nekoliko gumica za brisanje od kojih su napravljena opterećenja i postolje za lenjir.



Matematika opisuje i objašnjava svet — ne postoji izvan njega.

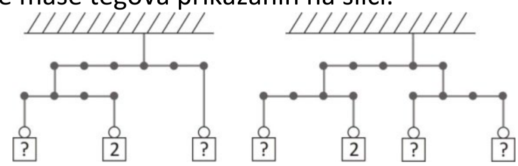
Primene daju smisao zakonima. Realistične situacije ne smeju potpuno potisnuti realne situacije. Didaktička vrednost realističnih primena nije sporna, ali je znatno manja od realnih primena.

Z. Arhimedova klackalica je veoma popularna u zabavnim parkovima širom sveta. Na fotografiji desno, prikazana je klackalica koja je bila izložena u jednom naučnom parku u Beogradu. Sa jedne strane metalne šipke privezan je automobil (smešten u žuti kavez). Sa druge strane šipke nalazi se ručka. Kada se ručka povuče na dole, automobil se podiže. Za to nije potrebna velika snaga, jer čak i dete može da podigne automobil. Istraži kako je moguće da dete podigne automobil?



Slika. Kroz „igru“ se jednostavno može objasniti zašto dete može da podigne auto zakonom prema kome je jedna pločica na broju 10 u ravnoteži sa 10 pločica na broju 1.

Z. Odredi nepoznate mase tegova prikazanih na slici.



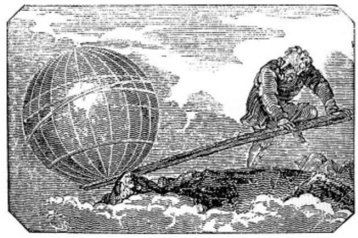
Matematika je priča, a ne rečnik termina i popis činjenica.

O značaju priče bilo je reči na samom početku ove knjige. Na ovom mestu, čitanje i analiziranje priča je predstavljamo kao didaktički vredan zadatak i za matematiku. Veliki je broj tekstova koji bi bili pogodni za svojevrsnu matematičku čitanku. Ovom prilikom izdvajamo odlomak (donekle skraćen i adaptiran) iz Plutarhove priče *Život Marčela* koja često nije uključena u prevode priča iz Uporednih biografija. Odlomak je pogodan nastavak prethodnih eksperimenata.

Z. Pročitaj sledeći odlomak i odgovori na pitanja i zadatke ispod teksta.

Marcelo je, sa šezdeset galija sa po pet redova vesala, opremljenih raznim oružjem i projektilima, i sa velikim mostom od dasaka postavljenim na osam povezanih brodova, na kome je bila sprava za izbacivanje kamenja i strela, napao zidine, oslanjajući se na temeljnu i veličanstvenu pripremu i na sopstvenu slavu. Sve to, međutim, pokazalo se kao beznačajno pred Arhimedom i njegovim mašinama.

Ove mašine Arhimed je osmislio ne kao nešto naročito važno, već kao neku vrstu zabave u geometriji, ispunjavajući želju kralja Hijerona da deo svojih teorijskih razmatranja primeni u praksi i približi ih opažanju i svakodnevnoj upotrebi. Eudoks iz Knida i Arhita iz Tarenta bili su prvi začetnici te čuvene mehanike, koju su koristili kao ilustraciju geometrijskih istina i kao sredstvo da se eksperimentalno potvrde zaključci koji su previše složeni za dokazivanje rečima i crtežima. Ali zbog Platonove osude takvih postupaka kao kvarenja čiste geometrije, mehanika je odvojena od geometrije i napuštena od filozofa, pa je postala vojna veština.



Arhimed je u pismu kralju Hijeronu tvrdio da se svakom datom silom može pomeriti bilo koji teret, pa se čak hvalio da bi, kad bi postojala druga Zemlja, mogao pomeriti ovu. Hijeron, zadivljen, zamolio ga je da to pokaže u praksi. Arhimed je tada izabrao veliki brod iz kraljevskog arsenala, koji se nije mogao izvući bez mnogo ljudi, i, napunivši ga teretom i putnicima, seo po strani i, gotovo bez napora, samo povlačeći uže, povukao brod pravolinijski i ravnomerno, kao da plovi morem. Kralj, zadivljen, ubedio ga je da napravi ratne mašine za odbranu i napad, koje će kasnije Sirakužani upotrebiti.

Kada su Rimljani napali zidine, Sirakužane je obuzeo strah, verujući da ništa ne može odoleti toj sili. Ali čim je Arhimed pokrenuo svoje sprave, počeo je da zasipa neprijatelje projektilima i ogromnim kamenjem, koje je padalo sa strašnom silom.

Sa zidina su izbijali veliki kranovi koji su potapali brodove spuštajući na njih teret, podizali ih u vazduh gvozdenim kukama, prevrtali ih i bacali na stene. Brodovi su često dizani u visinu, ljuljani i razbijani.

Marcelo je tada, podsmevajući se sopstvenim inženjerima, rekao: „Moramo li da odustanemo borbe protiv ovog geometrijskog Brijareja, koji se poigrava našim brodovima i nadmašuje storuke divove?”

Brijarej je u grčkoj mitologiji bio sin Urana i Geje, zamišljan je kao storuki džin sa pedest glava.

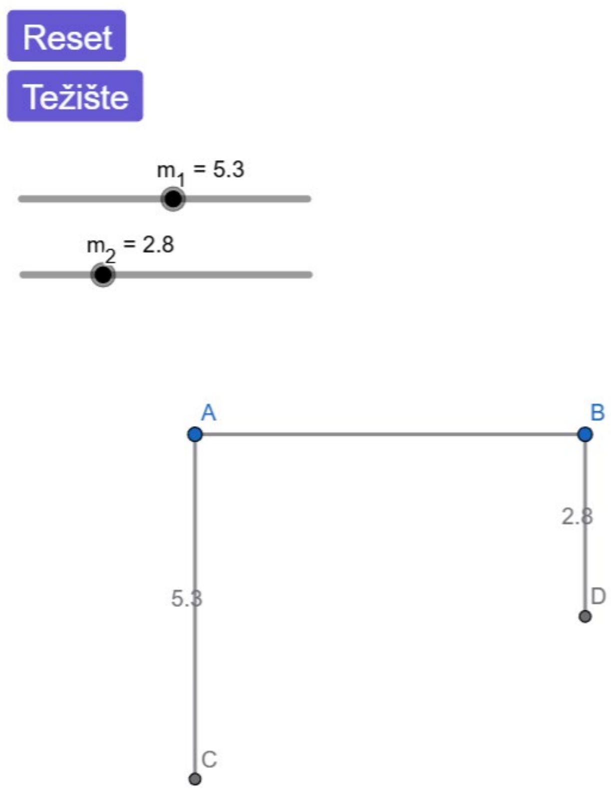
Naravno, pitanja i zadaci su ključna.

1. Objasni razliku između čiste geometrije i veštine pravljenja mašina za praktičnu upotrebu.
2. Zašto su kralju Hijeronu bile važne primene geometrije u praksi?
3. Skiciraj Arhimedove mašine koje su korišćene u odbrani Sirakuze i objasni kako funkcionišu.

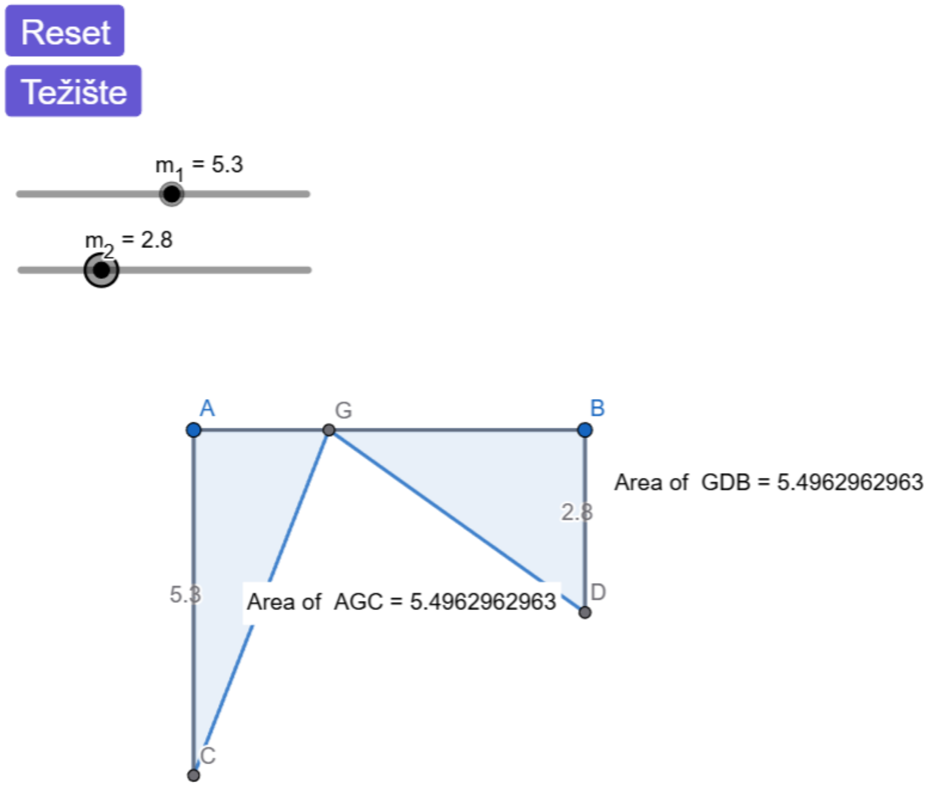
🔑 Dinamička vizuelizacija podiže nastavu matematike na jedan viši nivo

Zahtev s početka veka da se „statička“ geometrija zameni „dinamičkom“ danas dobija svoj puni smisao pojavim softvera koji pružaju neverovatne mogućnosti u nastavnoj praksi.

Podela duži u datoj razmeri $m_1 : m_2$ može se posmatrati i kao traženje težišta šipke na čijim se krajevima A i B nalaze opterećenja čije su mase m_1 i m_2. Pogodno je mase zameniti težinama opterećenja (tj. odgovarajućim silama pod uticajem Zemljine teže), zato što težine možemo predstaviti usmerenim dužima AC i BD čije su dužine srazmerne masama. Zanemarujući taj koeficijent srazmernosti, dobijamo jednu geometrijsku interpretaciju mehaničkog problema. Naravno, duži AC i BD su međusobno paralelne, jer su obe paralelne pravcu delovanja Zemljine teže. Kada je šipka AB u ravnoteži, težine krajeva su normalne na šipku.



Prema zakonu poluge, težište je neka tačka G, između A i B takva da su površine trouglova ACG i BDG jednake. Površina ovih trouglova zapravo predstavlja fizičku veličinu poznatu kao moment sile.



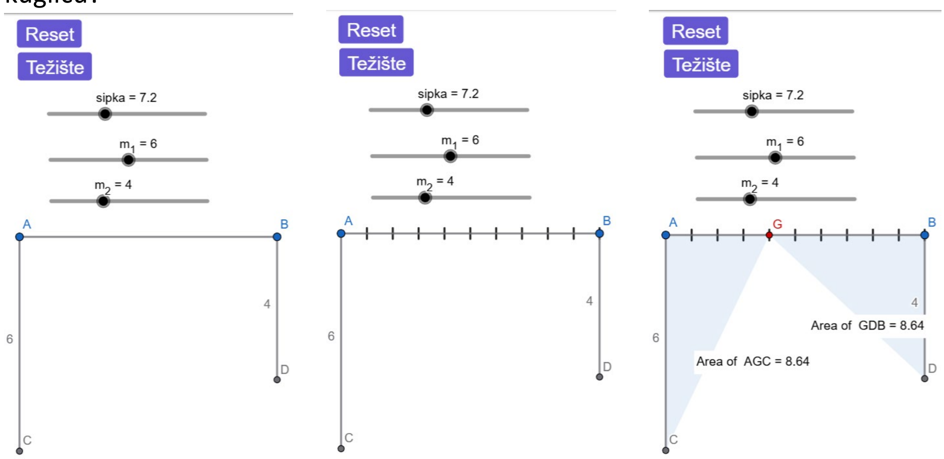
Matematika je jedna.

Izolovanost među pojedinim predmetima (čak među disciplinama istog predmeta) stari je problem nastave. Međupredmetne kompetencije se moraju sistematski i planski razvijati. Veze među oblastima koje se uspostavljaju u okviru pojedinačnih predmeta nisu dovoljne. Neophodno je i eksplicitno predvideti aktivnosti za razvoj ovih kompetencija. Projektnim zadacima čijom bi izradom rukovodio tim nastavnika značajno se mogu da približiti nastavni predmeti i pojedine oblasti sagledati iz različitih uglova. Pored projektnih zadataka veoma je korisno organizovati tematske nedelje tokom kojih svi nastavni predmeti obrađuju jednu istu temu.[2] Ovakve aktivnosti su u potpunom sladu sa sledećom obrazovnom paradigmom: razumevanje opštih ideja i sagledavanje celine, a ne preterano insistiranje na detaljima i zadržavanje na pojedinačnom.

Tehnologije zaista olakšavaju da se brzo i jednostavno povezuju različite oblasti. Mehanička reprezentacija sledeća dva zadatka rasvetljava dublje odnose između fizike i matematike.

[2] Na primer, o Ravnoteži mnogo toga se može reći u svakom od školskih predmeta: može se diskutovati o ravnoteži u ishrani, sportu, fizici, matematici, umetnosti, …

Z. Duž od 16,4 cm podeliti u razmeri 7 : 3. Odredi dužinu svakog dela?
Z. Miša i Saša treba da podele 13,8 € u razmeri 7 : 3. Koliko će svako dobiti?
Z. U kutiji imamo 7 belih i 11 plavih kuglica. Kolike su šanse da izvučemo belu kuglicu?



Slika . Prikazan je Geogebra prilog koji ilustruje podelu u datoj razmeri $m_1 : m_2$, gde su m_1 i m_2 celobrojne vrednosti. Kada se celina podeli na $m_1 + m_2$ delova, ostaje da se izabere odgovarajuća podeona tačka. Tačka G je od kraja A „mase“ m_1 udaljena $\frac{m_2}{m_1+m_2} AB$, od kraja B„mase“ m_2 je udaljena $\frac{m_1}{m_1+m_2} AB$. Dalje, se lako zaključuje da su površine trouglova AGC i GDB jednake.

🔑 Intuicija pre formalizma.

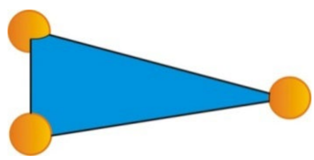
> **Definicija.** Težišna duž trougla je duž koja spaja teme trougla sa središtem naspramne stranice.
> **Teorema.** Sve tri težišne duži se seku u jednoj tački.
> **Definicija.** Težište je tačka u kojoj se seku težišne duži trougla
> **Teorema.** Težište deli svaku težišnu duž u razmeri 2 : 1.

Velika mana tradicionalnih školskih programa jeste rana formalizacija nekih sasvim prirodnih koncepata. Ovo je posledica preterana usmerenost na usko definisane ishode učenja matematike poput: učenika zna šta je težišna duž, šta je težište i primenjuje osnova svojstva. Ovako definisan ishod redukuje gradivo u formalni sažetak, zanemarujući dugotrajne procese stvaranja i razvoja fundamentalnih pojmova. Sledeći zadatak snažno razvija intuiciju, a navedene definicije i teoreme se doživljavaju kao prirodni rezime zaključaka eksperimenta.

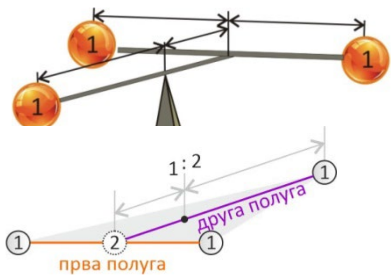
Pojmovi su proizvod dugog i složenog procesa razvitka mišljenja koje počinje opažajnim i praktičnim mišljenjem. Odavno su veliki, stari autoriteti psihologije obrazovanja poput Aha, Pijažea, Vigotskog i mnogih drugih, pokazali da je stvaranje pojmova skoro uvek produktivno, a ne reproduktivno, i da pojam nastaje u toku složene operacije usmerene ka rešavanju nekog zadatka. Zato je pripremu za napredne sadržaje najprirodnije ostvariti kroz zadatke i projekte, za čije rešavanje je dovoljan elementarni nivo, ali koji mogu otvoriti diskusiju o naprednijim temama sa ciljem da se učenici sa njima intuitivno upoznaju. Glavna ideja vodilja za sastavljanje ovakvih zadataka mogla bi se opisati rečima Lava Vigotskog \cite{LV77}:

> *Neophodno je pred učenike postaviti zadatak koji se ne može rešiti drugačije nego stvaranjem pojma. Taj inicijalni zadatak predstavlja kamen-temeljac na kome će se izgrađivati pojam.*

Z. Izrezati karton u obliku konveksnog četvorougla i odrediti centar ravnoteže izrezanog kartona. Preciznije, odrediti tačku tako da postavljanjem te tačke na vrh vertikalno postavljenog štapića karton stabilno stoji.



Do rešenja ovog praktičnog zadatka vodi pokušaj da se „u mislima“ odredi centar ravnoteže „pojednostavljene“ ploče: Gde će biti centar ravnoteže trougaone ploče, čija se masa zanemaruje, u čijim su temenima postavljene kugle od po 1 kg?



Pošto je masa ploče zanemarena, možemo posmatrati sistem koju čine dve šipke. Na jednom kraju prve šipke je pričvršćena kugla od 1 kg, a na drugom kraju je postavljeno središte druge šipke na čijim se krajevima nalaze kugle od po 1 kg. Tada je ovaj drugi kraj prve šipke opterećen masom od 2 kg, pa drugu šipku možemo tretirati kao kuglu od 2 kg. Dakle, centar ravnoteže biće tačka prve šipke koja je dva puta udaljenija od kraja opterećenog jednim kilogramom, nego od kraja opterećenog sa dva kilograma. Uočavamo da se centar ravnoteže trougaone ploče nalazi na liniji koja spaja jedno teme sa središtem naspramne stranice, i pri tome je centar ravnoteže dva puta udaljeniji od temena nego od središta stranice.

Slika . Polazni zadatak o trougaonoj ploči, mogao bi se zameniti proučavanjem igračke u obliku ptice koja će biti u ravnoteži ako na vrh prsta postavimo vrh kljuna. Kada se igračka rasklopi, uočavaju se mali tegovi raspoređeni tako da težište „sistema“ bude vrh kljuna.

🔑 Tehnika bez razumevanja nije matematika.

Misaono određivanje težišta trougaone ploče održava matematiku „živom“, budući da se razmišljanje jednostavno prenosi na složenije ploče. Prihvatanje formalnog sažetka o težištu „umrtvljuje“ matematiku, jer ne sadrži nikakvu ideju kako bi se bi se moglo odrediti težište četvorougla, uz dilemu da ono uopšte postoji. Posle praktičnog zadatka intuitivno se zaključuje da ploča u obliku bilo kog mnogougla ima težište i da se bi se ono moglo odrediti postupno, polazeći od težišta neka dva temena, a zatim uključujući jedno po jedno teme. Sažetak omogućava da se mehanički rešava veoma ograničena klasa zadataka o težištu trougla.

Z. Gde će biti centar ravnoteže četvorougaone ploče, čija se masa zanemaruje, u čijim su temenima postavljene kugle od po 1 kg?

🔑 Učenik treba da vidi istu matematiku koju vidi i matematičar — samo na svom nivou.

Videli smo da kada mase zamenimo težinama, mehaniku približavamo geometriji. Mehanika ne ostaje dužna geometriji. Kada se tačkama pridruže mase dobija se jedan koristan „mehanički metod“ dokazivanja teorema u geometriji. Metod se često naziva „geometrija težinskih tačaka“ (Mass point geometry). Uveo ga je Franc Mebijus 1827. godine zajedno sa konceptom homogenih koordinata. Sam metod danas dobija poseban značaj za oblast računarske grafike, kada svaka tačka dobija „masu“ izraženu intenzitetom boje koja joj je dodeljena.

Slika. Mebijus je najpoznatiji po jednostranoj traci …

Kada se dovoljno dugo i kvalitetno razvija intuicija, definicije i teoreme postaju prirodna potreba da se radi matematika. To lepo primećuje Tom Rike, u svom članku MASS POINT GEOMETRY:

> *Dugo sam pogrešno razumeo matematiku i tek kada sam shvatio da su definicije, postulati i teoreme ključ za sve, konačno sam počeo da napredujem. Na kraju, sve ipak zavisi od toga koliko ste vešti u korišćenju definicija, postulata i teorema kako biste došli do pretpostavki i dokazali nove teoreme. Ali ako ove osnove ne razumete u potpunosti, nećete daleko dogurati u matematici.*

Zamislimo da svaka tačka prostora ima masu, tj. da je prostor sačinjen od objekata koje nazivamo *tačake sa masom*.	**Definicija**. **Tačka sa masom** jeste par koji čine pozitivan broj m i tačka P i koji se obeležava mP.
Ako par *tačaka sa masom* zamislimo kao šipku bez mase na čijim krajevima se nalaze kugle odgovarajuće mase, tada taj par reprezentuje nova tačka sa masom – centar ravnoteže čija je masa jednaka zbiru masa kugli sa krajeva. Tu novu tačku ćemo nazivati zbirom polazne dve tačke sa masom.	**Definicija**. **Zbir** dve tačke sa masom mP i nQ jeste tačka sa masom $(m+n)F$, pri čemu je F tačka takva da je $FQ : FP = m : n$. Opisano pridruživanje nazivamo sabiranjem tačaka sa masom i pišemo: $mP + nQ = (m+n)F$.

SLIKA Nije teško uočiti da je zbir dve tačke sa masom jedinstveno određen.

Uvođenje neke operacije podrazumeva i ispitivanje njenih osnovnih osobina. Za operacije koje se primenjuju na par objekata, u osnovne osobine svakako spadaju komutativnost i asocijativnost.	**Teorema**. 1) Sabiranje tačaka sa masom je komutativno: $aA + bB = bB + aA$, za bilo koje dve tačke sa masom aA i bB. 2) Sabiranje tačaka sa masom je asocijativno: $(aA + bB) + cC = aA + (bB + cC)$, za bilo koje tri tačke sa masom aA, bB i cC.

Slika Nije teško uočiti da je sabiranje tačaka sa masom komutativno – „klackalicu“ samo treba posmatrati sa različitih strana.

Asocijativnost nije tako očigledna. (**Uputstvo:** primeniti Menelajevu teoremu)