

MNMR

2025/2026

<http://old.matf.bg.ac.rs/p/-nebojsa-ikodinovic>

Polaganje ispita

- Tokom semestra

- pet zadataka (max 50 poena): DZ1, DZ2, DZ3, DZ4, DZ5

Radovi se lično predaju u pisanom obliku; prisustvo na časovima i usmena prezentacija na časovima vežbi;

- odbrana zadataka (max 50 poena) (pret)poslednja nedelja semestra

Odbrana će se prevashodno odnositi na urađene zadatke. Očekuje se dobro poznavanje tog materijala, uz detaljna objašnjenja odgovarajućih koncepata i obrazloženja relevantnih tvrđenja, u usmenom i pismenom obliku.

- Ispitini rokovi – pismeni (max 100)



- Za pripremu zadatka koristiti gotov šablon:

<https://www.overleaf.com/project/69c5702adc603b07de59a277>

Kalendar rada

- Za svaki zadatak biće navedeni rokovi za predaju i termini za odbranu.

	23	24	25	26	27	28
	30	31	1	2	3	4
април	6	7	8	9	10	11
	13	14	15	16	17	18
	20	21	22	23	24	25
	27	28	29	30	1	2
мај	4	5	6	7	8	9
	11	12	13	14	15	16
	18	19	20	21	22	23
	25	26	27	28	29	30
	1	2	3	4	5	6
јун	8	9	10	11	12	13
	15	16	17	18	19	20

MNMR - teme

1. Zašto?
2. Gde?
3. Šta?
4. Kome?
5. Kako?

Osnovna pitanja **bilo kakve** sadržajne komunikacije!

Materijali i obaveštenja:

<http://old.matf.bg.ac.rs/p/-nebojsa-ikodinovic>

1. Zašto?

Zauvek ću biti zahvalan svojoj prvoj učiteljici Emi Goldberg, koja me je naučila trima veštinama: čitanju, pisanju i aritmetici. Mislím da su to jedine ključne stvari kojima dete treba naučiti. Sve drugo je **atmosfera** i učenje kroz čitanje i razmišljanje.

Karl Poper, Traganje bez kraja, intelektualna autobiografija

Euklid: nema kraljevskog puta

- Svaka od 13 knjiga Elementa se završava značajnim teoremama geometrije. Prva knjiga se završava teoremom 47, poznatom pod nazivom Pitagorina teorema. Danas, to je praktično i jedina matematička teorema koja bi se mogla ubrojati u tzv. „opštu kulturu“.

<http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/449>

41

На овај начин је у праволиниском углу ZKM , који је једнак датој праволиниском углу E , конструисан паралелограм $KZAM$ једнак датој праволиниској слици $AB\Gamma$. А то је требало извести.

46.

На датој дужи конструисати квадрат.

Нека је дата дуж AB . Треба на дужи AB конструисати квадрат.

Повуче се под правим углом над AB кроз тачку A права $A\Gamma$ и пренесе се $A\Delta$ једнако AB ; затим се кроз тачку Δ повуче права ΔE паралелна AB , а кроз тачку B повуче права BE паралелна $A\Delta$. Тада је $A\Delta EB$ паралелограм. Пошто је AB једнако ΔE и $A\Delta$ једнако BE , то су све четири дужи BA , $A\Delta$, ΔE , EB једнаке међусобно и паралелограм $A\Delta EB$ је једнакостран. Тврдим да је он и правоугли. Пошто је наиме права $A\Delta$ трансверзала паралелних AB , ΔE , то су углови $BA\Delta$, $A\Delta E$ једнаки двама правим угловима. А како је угао $BA\Delta$ прав, то је и угао $A\Delta E$ прав. Пошто су код паралелограма наспрамне стране и углови једнаки међусобно, онда је прав и сваки од супротних углова ABE , $BE\Delta$. Дакле је $A\Delta EB$ и правоугли. А раније је доказано да је он једнакостран.

Према томе је то квадрат конструисан на дужи AB . А то је требало извести.

47.

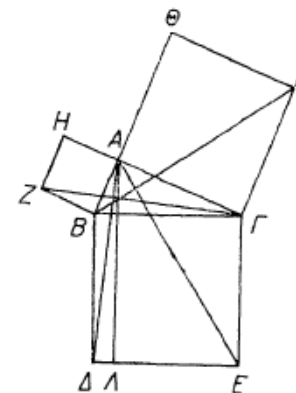
Код правоуглих троуглова је квадрат на страни спрам правога угла (на хипотенузи) једнак квадратима на странама које образују прав угао (на катетама).

Нека је $AB\Gamma$ правоугли троугао са правим углом $BA\Gamma$. Тврдим да је квадрат на $B\Gamma$ једнак квадратима на BA и на $A\Gamma$.

Нека се на $B\Gamma$ конструиса квадрат $B\Delta E\Gamma$, а на BA , $A\Gamma$ квадрати HB , $\Theta\Gamma$, кроз тачку A повуче права $A\Delta$ паралелна свакој од правих $B\Delta$, ΓE , а затим повуче праве $A\Delta$, $Z\Gamma$. Пошто је сваки од углова $BA\Gamma$, BAH прав, то праве $A\Gamma$,

42

AH повучене над правом BA , кроз исту њену тачку A , а са разних страна, чине суседне углове једнаке двама правим угловима, па су стога праве ΓA и AH у истој правој. Из истог разлога су и праве BA и $A\Theta$ у истој правој. Угао $\Delta B\Gamma$ једнак је углу ZBA , јер је сваки од њих прав. А кад се дода сваком од њих угао $AB\Gamma$, биће цео угао ΔBA једнак целом углу $ZB\Gamma$. Пошто је страна ΔB једнака страни $B\Gamma$, а ZB страни BA , то су две стране ΔB , BA једнаке странама ZB , $B\Gamma$, и то



одговарајућим, и угао ΔBA једнак углу $ZB\Gamma$, а тада је и основица $A\Delta$ једнака основици $Z\Gamma$, и троугао $AB\Delta$ једнак троуглу $ZB\Gamma$. А паралелограм BA је двапут већи од троугла $AB\Delta$, јер имају исту основицу BA и између истих су паралелних $B\Delta$, $A\Delta$. И квадрат HB је двапут већи од троугла $ZB\Gamma$, јер и они имају исту основицу ZB и између истих су паралела ZB , $H\Gamma$. (А двоструко од једнаког једнако је). Према томе је паралелограм BA једнак квадрату HB . На сли-

чан начин се, помоћу повучених правих $A\Delta$, BK , може доказати да је паралелограм ΓA једнак квадрату $\Theta\Gamma$. Према томе је цео квадрат $B\Delta E\Gamma$ једнак двама квадратима HB , $\Theta\Gamma$. А квадрат $B\Delta E\Gamma$ је конструисан на $B\Gamma$, а квадрати HB , $\Theta\Gamma$ на BA , $A\Gamma$. Према томе је квадрат на страни $B\Gamma$ једнак квадратима на странама BA , $A\Gamma$.

Дакле, код правоуглих троуглова је квадрат на страни спрам правога угла (на хипотенузи) једнак квадратима на странама које образују прав угао (на катетама). А то је требало доказати.

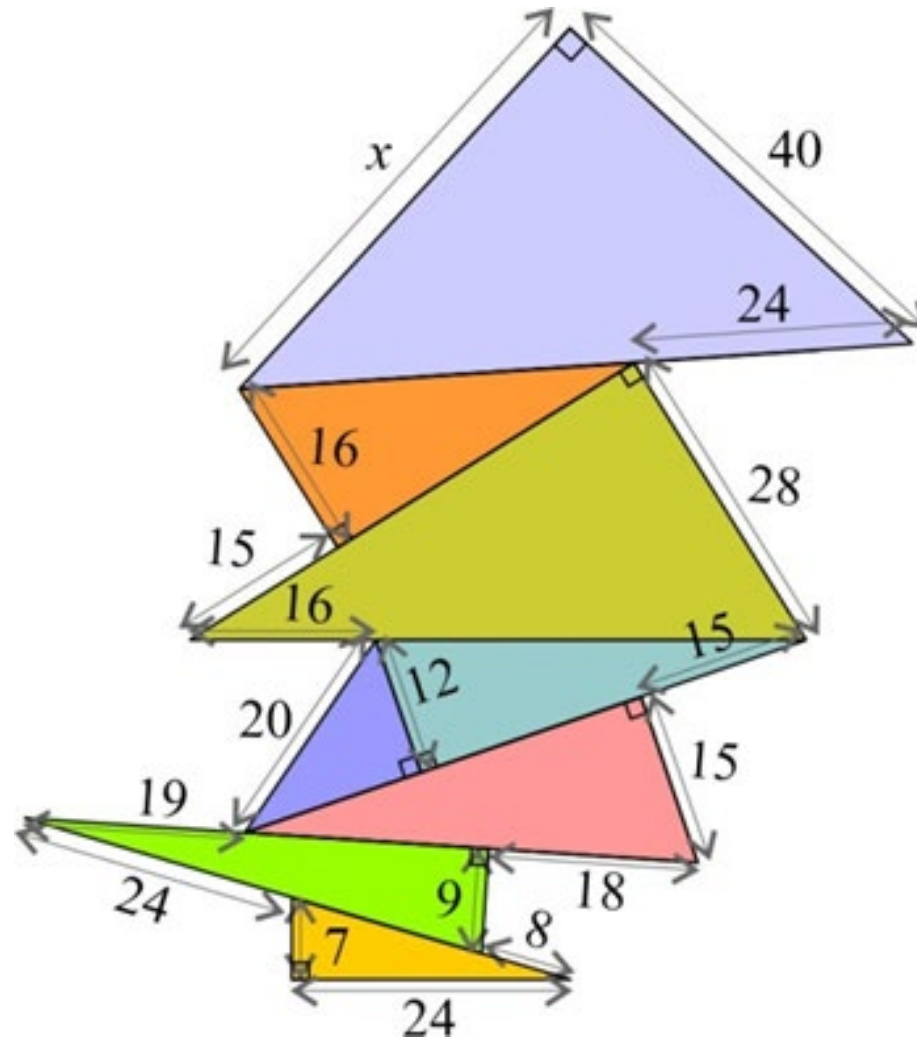
48.

Ако је код троугла квадрат на једној страни једнак квадратима на осталим двама странама, онда је угао који образују ове две стране прав.

Dekart: Rasprava o metodi

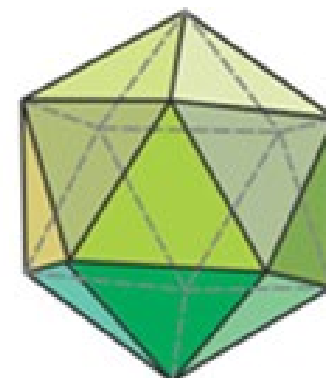
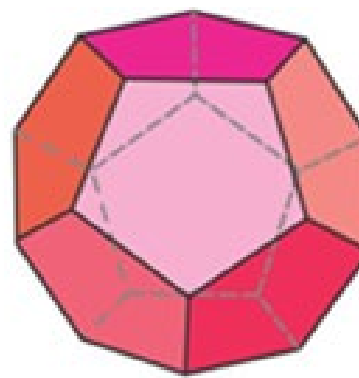
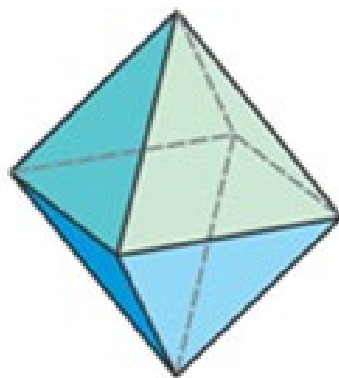
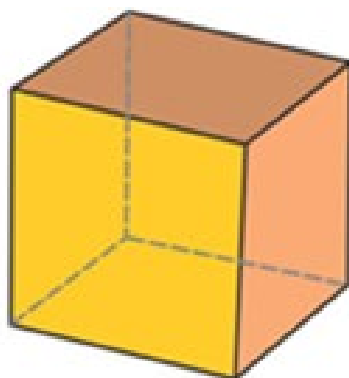
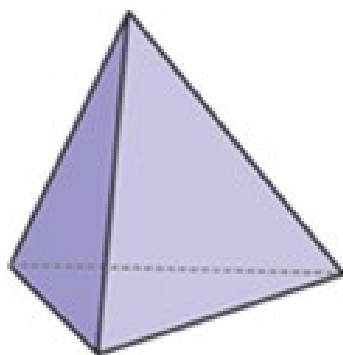
- *Kad sam se dao na matematičke studije, pročitao sam većinu stvari koje su objavili matematičari... Ali ... nisu mi došli pod ruku pisci koji bi me u potpunosti zadovoljili. ... Bio sam naklonjen da verujem ... sami pisci su se bojali da ova istinska matematika, sa svoje izvanredne lakoće i prostote, ne izgubi svoju vrednost vulgarizovanjem, pa su više voleli, da bi nas zadivili, da nam umesto nje pokazuju izvesne besplodne istine, sa vrlo tananim dokazima kao rezultat svoje veštine, a ne da nas nauče svojoj veštini, pa da iščezne naše divljenje.*

„Besplodni“ zadaci



Najlepše teoreme

- **Ojlerova formula za poliedar (2. mesto na listi najboljših teorema):**
Ako je V broj temena, E broj ivica i F broj strana **bilo kog** poliedra, onda je $V - E + F = 2$.
- **Teorema o pravilnim poledrima (4. mesto na listi najboljših teorema):**
Postoji tačno pet pravilnih poliedara.



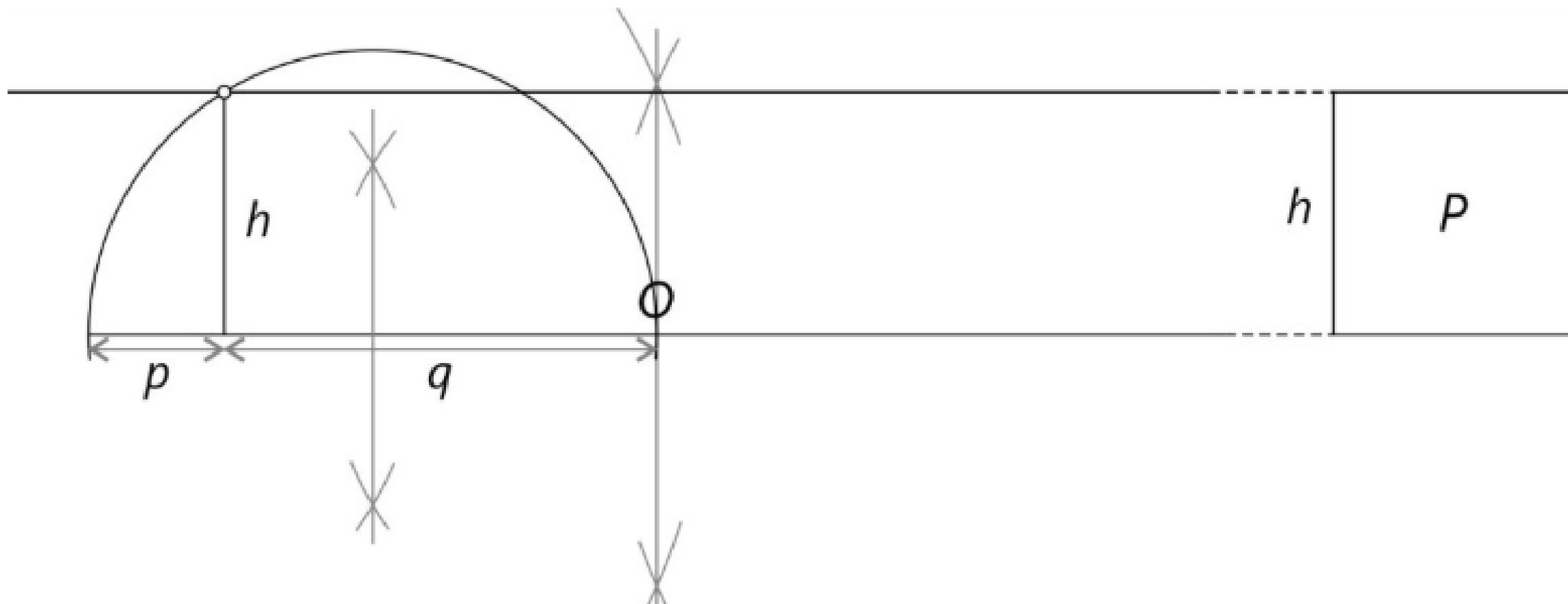
Zakon minimalnog napora

Obratni zadatak. Lenjirom i šestarom konstruisati pravougaonik čiji je obim jednak datoj duži, a površina jednaka površini datog kvadrata.



„Da li vam je jasno rešenje zadatka?“

Obratni zadatak. Lenjirom i šestarom konstruisati pravougaonik čiji je obim jednak datoj duži, a površina jednaka površini datog kvadrata.

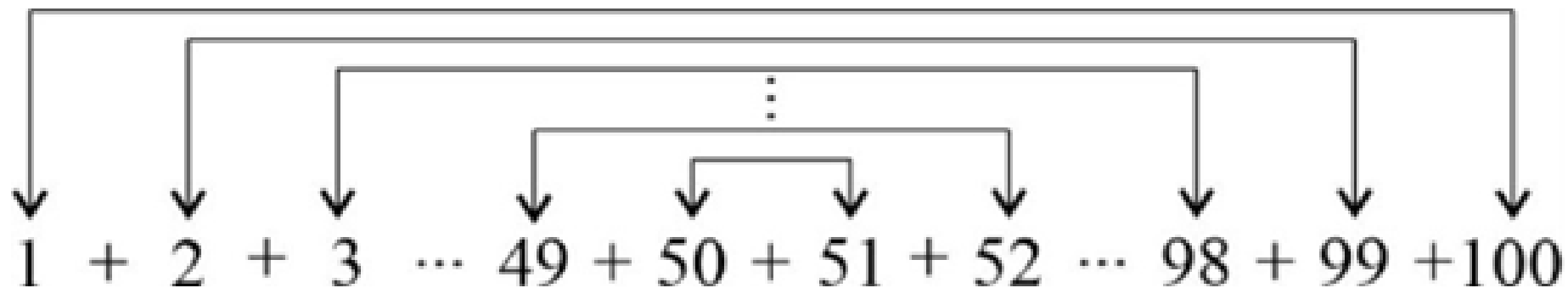


Ciljevi obrazovanja

„osposobiti ljude da lenjirom i šestarom da konstruišu pravougaonik čiji je obim jednak datoj duži, a površina jednaka površini datog kvadrata“

Zakon minimalnog napora

Zadatak. Naći zbir prvih 100 brojeva.



Masovno obrazovanje

- Brown, M., Brown, P and Bibby, T. (2008), *'I would rather die': reasons given by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics.* Research in Mathematics Education, 10:1, 3-18.
- I wish I knew these 3 things before studying mathematics at university, by PolyMaths:
 1. What Is Mathematics?
 2. How To Do Mathematics?
 3. Not Knowing Is Ok!

Društvenog-političkog kontekst

- Vilhelm Fon Humbolt, Teorija obrazovanja čoveka (1793): Šta se zahteva od jedne nacije, od jednog doba, od čitavog ljudskog roda, ukoliko treba da mu se ukaže poštovanje i divljenje? Zahteva se da u njima gospodare obrazovanje, mudrost i vrlina, moćni i rasprostranjeni koliko god je moguće, da je njihova unutrašnja vrednost u toj meri uvećana da bi pojam čovečnosti ... dobio velik i vredan sadržaj.
- Teodor V. Adorno, Teorija poluobrazovanja (1997): Ono što je nastalo od obrazovanja i sada se sedimentira kao neka vrsta negativnog objektivnog duha jeste socijalizovano poluobrazovanje, sveprisutnost otuđenog duha.
- Konrad P. Lisman, Obrazovanje, poluobrazovanje, neobrazovanje (2006): Neobrazovanje“ znači da je ideja o obrazovanju u svakom pogledu prestala da ispunjava normativnu ili regulativnu funkciju. Jednostavno je nestala.

„Neka ne ulazi ko ne poznaje geometriju“

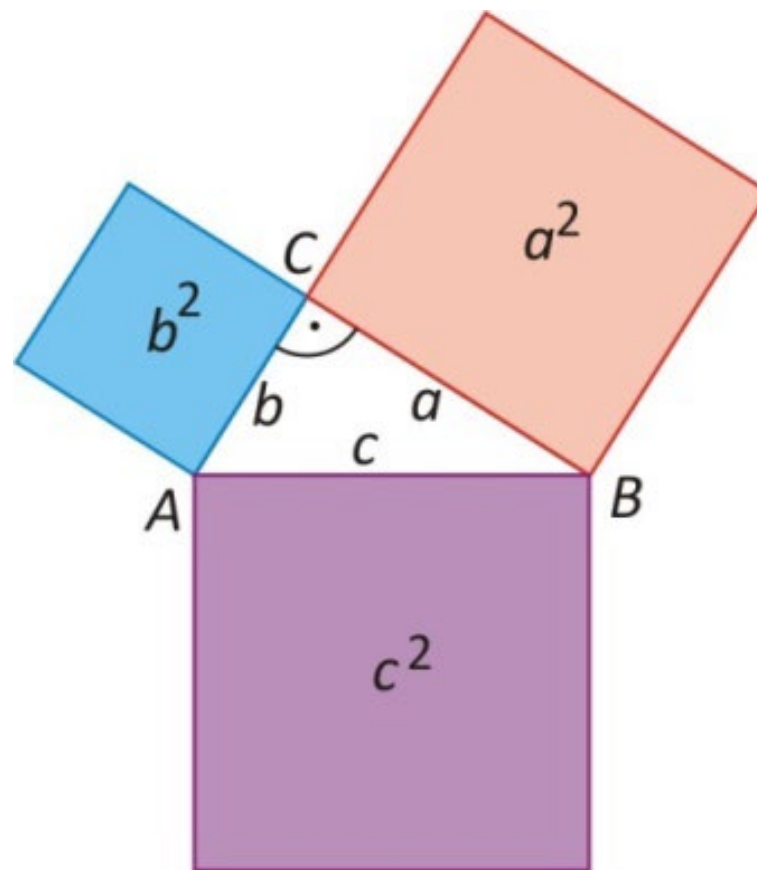
- ... od funkcionalnog znanja zavisi bruto nacionalni dohodak zemlje. Posebno se skreće pažnja da Evropa zaostaje za azijskim zemljama, a da današnja deca postaju ekonomski produktivna za 20 godina, što dalje implicira da je Evropa u problemu. [UNICEF conference, 2012]
- učenje novog matematičkog znanja može dramatično promeniti obrasce moždanih aktivnosti. Štaviše, promene koje se događaju rezultat su, čini se, sadržaja i metoda obuke.
- Delazer, M., F. Domahs, L. Bartha, C. Brennis, A. Lochy and T. Trieb et al. (2003), “Learning Complex Arithmetic – An fMRI Study”, *Brain Res Cogn Brain Res*, Vol. 18, No. 1, pp. 76-88.
- Delazer, M., F. Domahs, L. Bartha, C. Brennis, A. Lochy and T. Trieb et al. (2004), “The Acquisition of Arithmetic Knowledge – An fMRI Study”, *Cortex*, Vol. 40, No. 1, pp. 166-167.

Skemp:

To understand mathematics is to know both what to do and why.

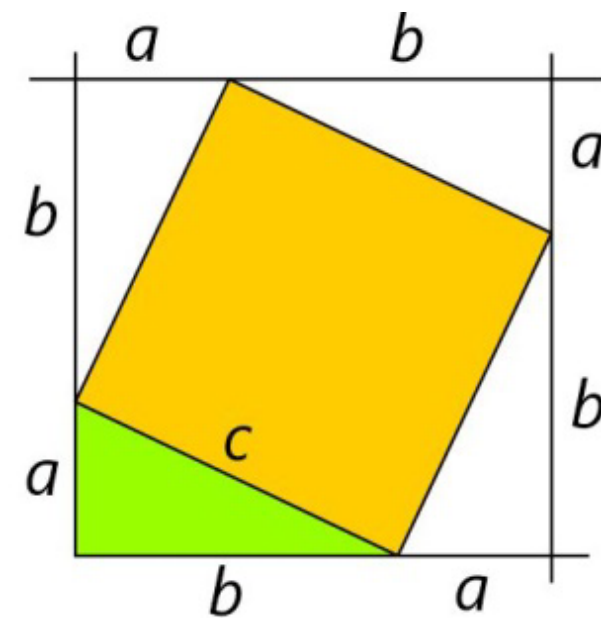
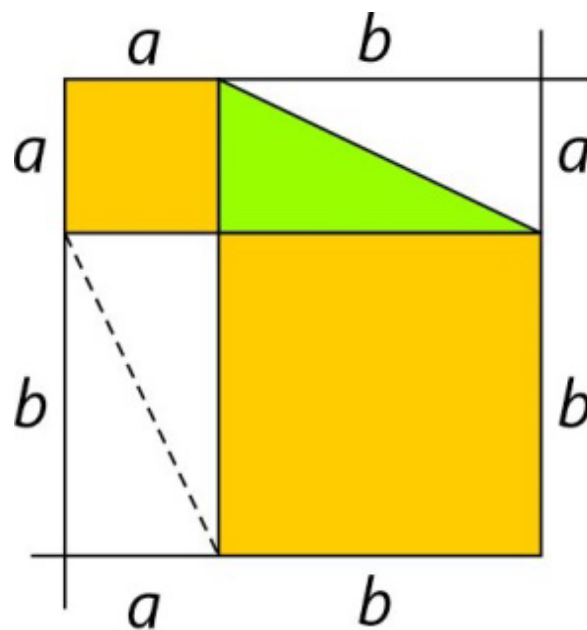
Pitagorina teorema

- Mnemotehnička sredstva
- Izostanak dokaza
- Formula i lista posledica
- „Logičke greške“



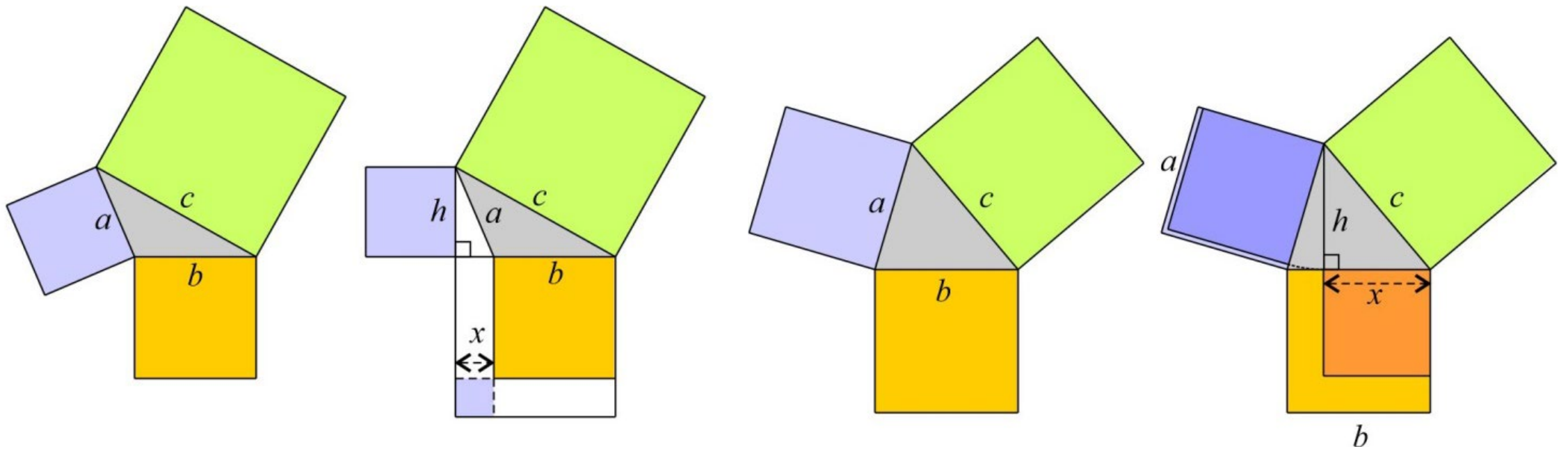
Pitagorina teorema

- Mnemotehnička sredstva
- Izostanak dokaza
- Formula i lista posledica
- „Logičke greške“

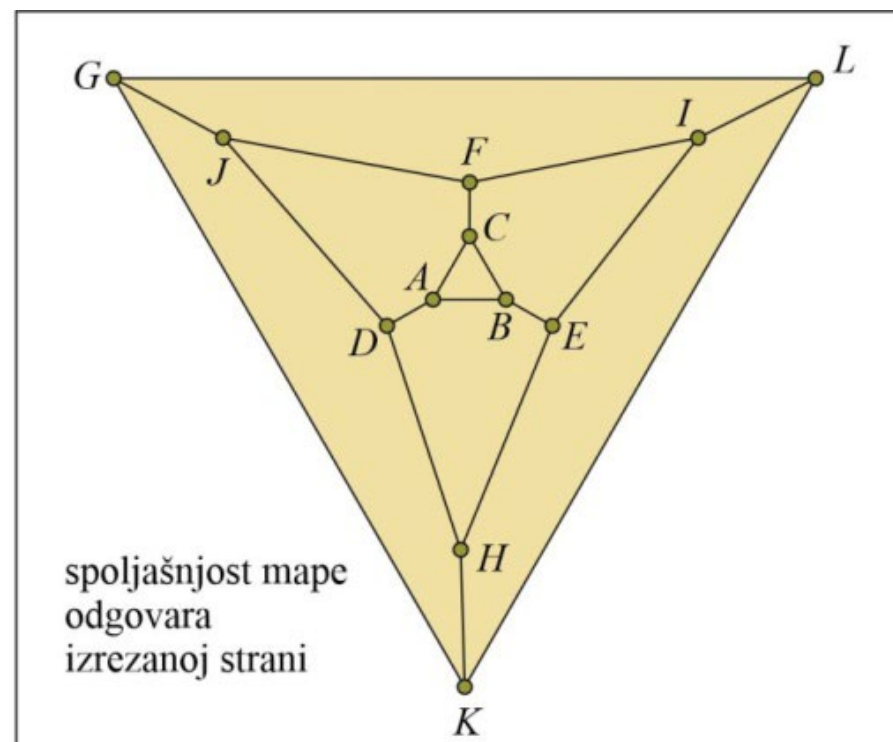
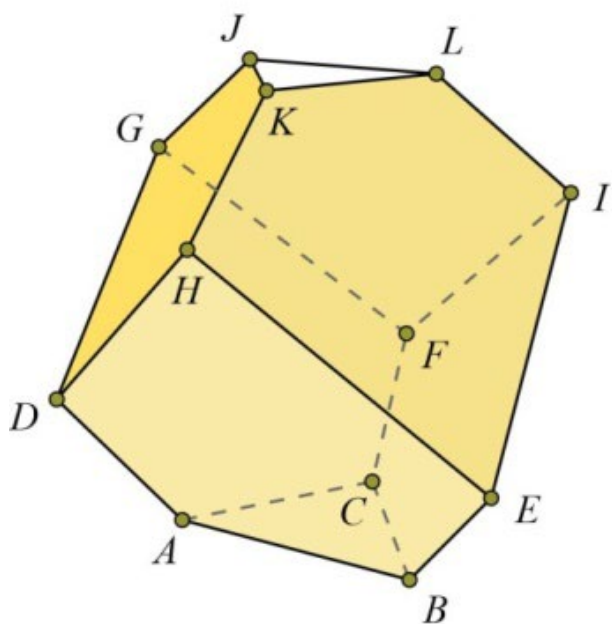


Obratna Pitagorina teorema

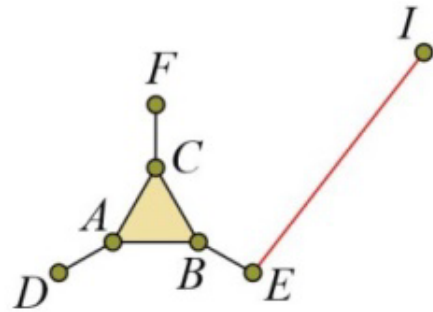
Zadatak. Ako su dužine stranica nekog trougla 3, 4 i 5, da li je taj trougao pravougli?



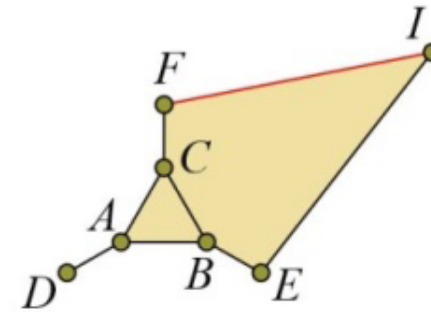
Ojlerova formula: $T-I+S=2$



Ojlerova formula: $T-I+S=2$



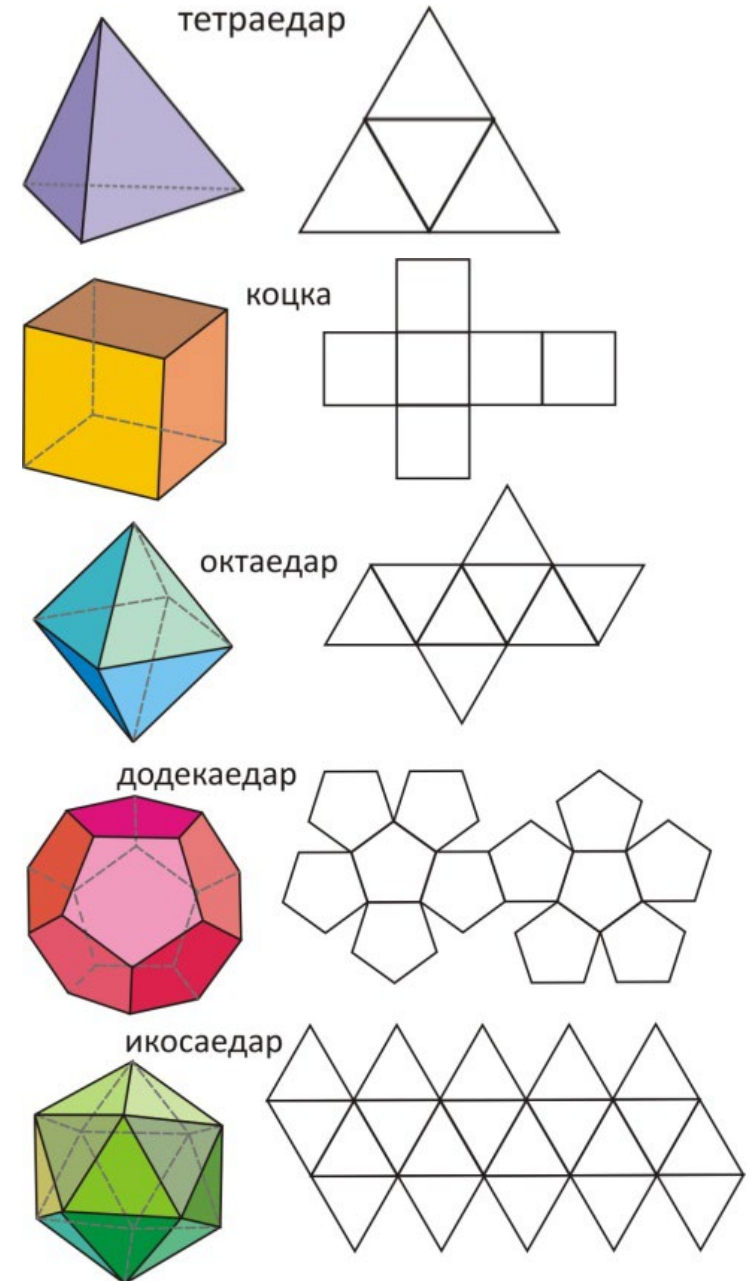
Docrtavamo novu tačku i spajamo je linijom sa nekom prethodno nacrtanom tačkom.



Crtamo liniju koja spaja dve prethodno nacrtane tačke.

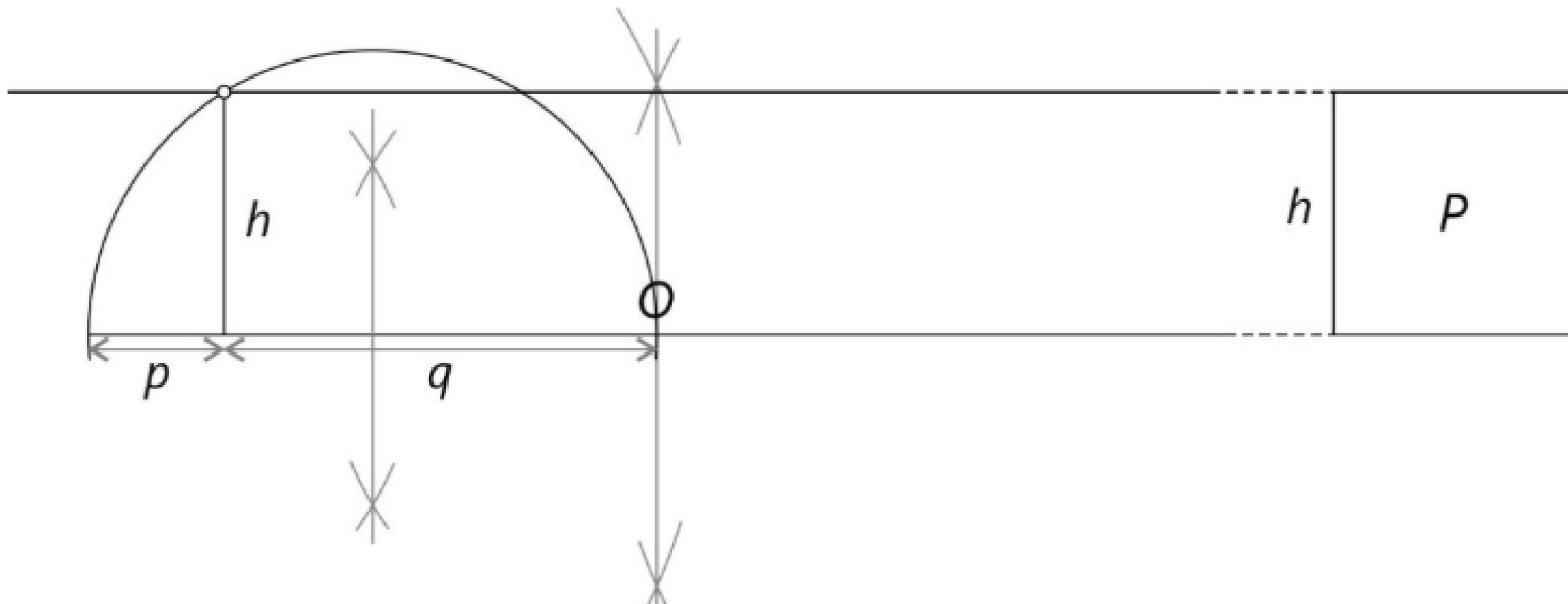
Platonova tela

- Pretpostavimo da pravilni poliedar ima n ivica na svakoj strani i u svakom temenu se susreće m strana. Jasno, brojevi m i n moraju biti veći od 2.
- $T - I + S = 2$
- $mT = 2I$
- $nS = 2I$
- ...

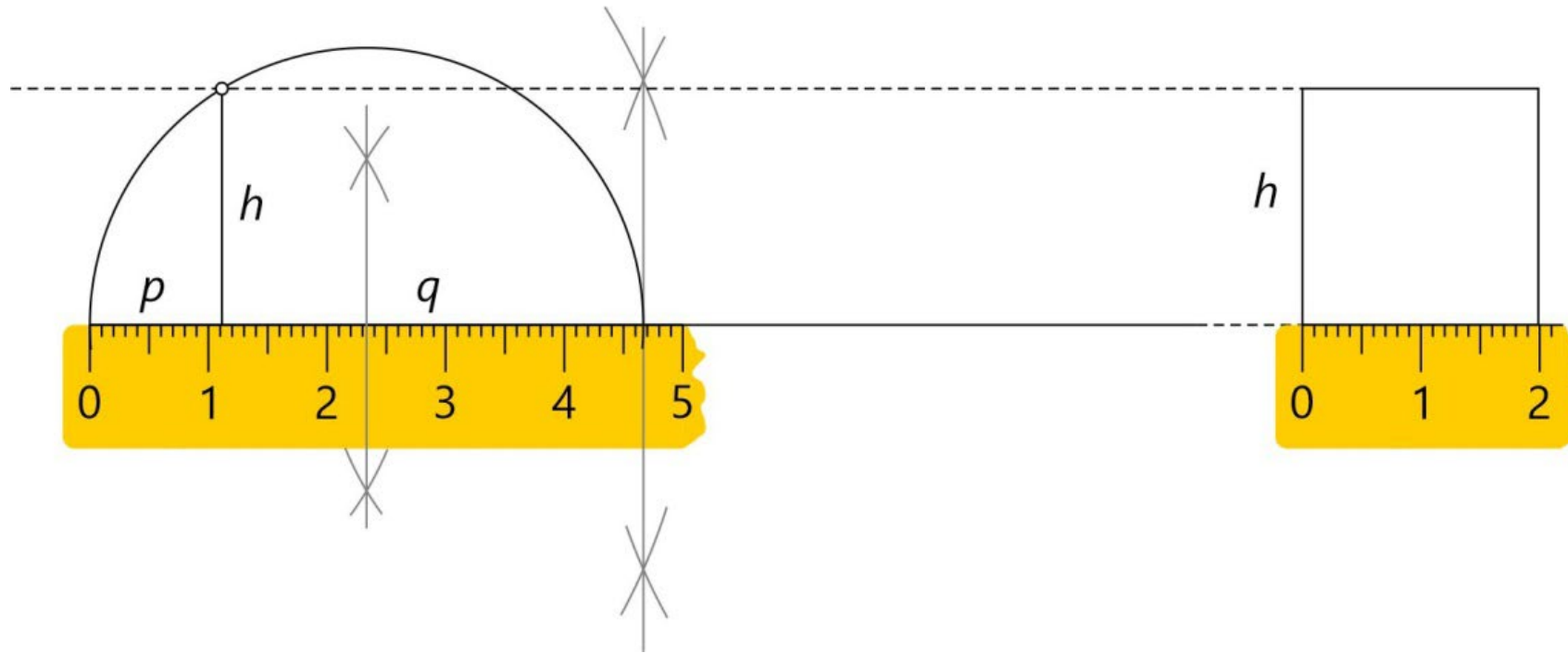


„Da li vam je jasno rešenje zadatka?“

Obratni zadatak. Lenjirom i šestarom konstruisati pravougaonik čiji je obim jednak datoj duži, a površina jednaka površini datog kvadrata.

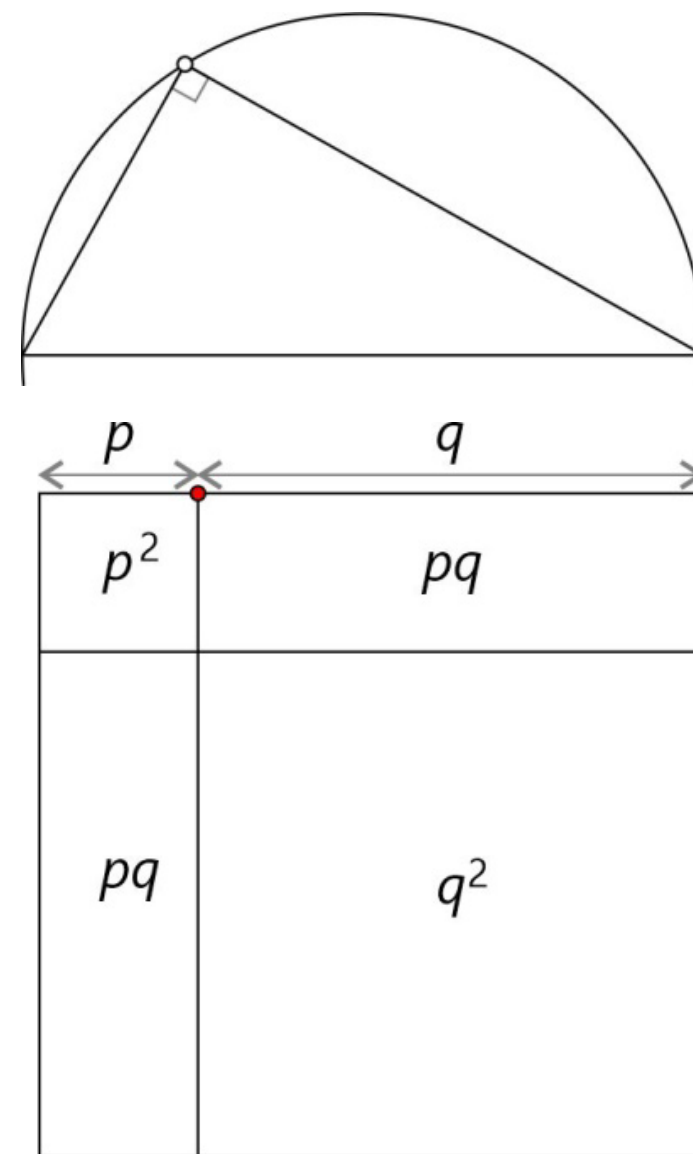


„Obrazložjenje“



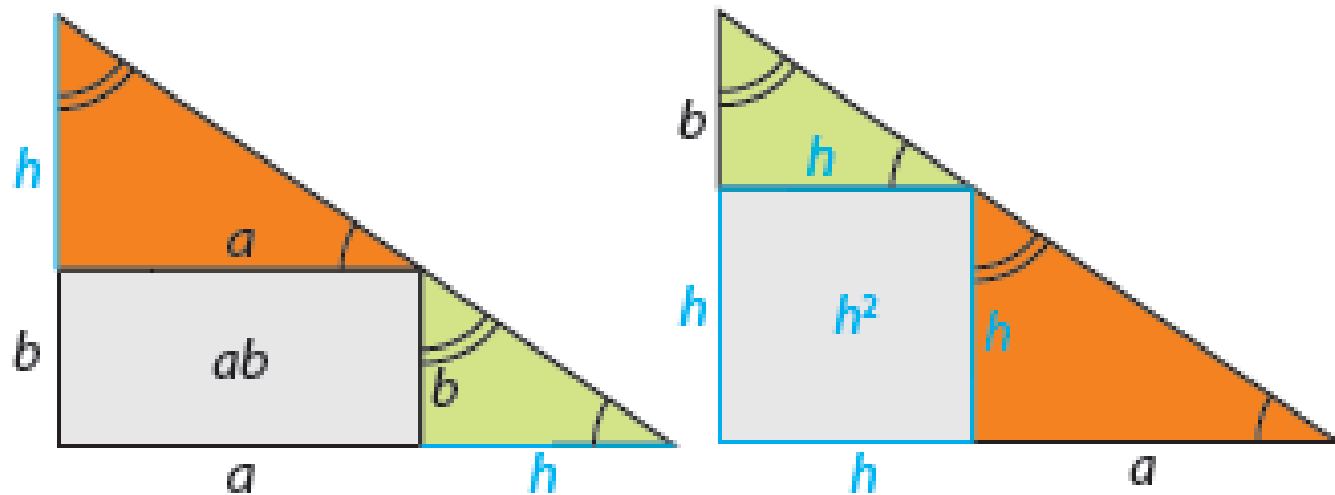
Obrazloženje

- **Prva matematička teorema:** Ugao nad prečnikom je prav. Ovu teoremu nazivamo prvom prema navodima iz poznate knjige
- **Pitagorina teorema:** Zbir površina kvadrata nad katetama jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom.
- **Euklidova teorema II, 4:** Ako neku duž slučajno podelimo, kvadrat nad celom duži jednak je kvadratima nad segmentima i dvostrukoj površini pravougaonika. Teorema je nazvana prema svom mestu u Elementima: četvrta teorema u drugoj knjizi Elementata.



Još jedan dokaz bez reči

- $h^2 = ab$



Radna vs Autoritativna atmosfera

- <https://www.geogebra.org/m/tcfv8z7d>

Gle, teorema. Među svim pravougaonicima obima O najveću površinu ima kvadrat.

- Posledica 1. Proizvod dva broja, čiji je zbir konstantan, najveći je kada su ti brojevi jednaki.
- Posledica 2. Ako je $x+y=a$, proizvod xy je najveći ako je $x=y=a/2$, i tada je $xy=a^2/4$.
- Posledica 3. Ako je $x+y=a$, onda je $xy \leq a^2/4$.
- Posledica 4. Za bilo koje pozitivne brojeve x i y važi nejednakost $xy \leq ((x+y)/2)^2$.

Zadaci

1. Jedna „lepa“ elementarna teorema

- Istorijat, formulacija, dokaz, značaj, primena

2. Jedan Dokaz bez reči

- izvor, objašnjenje

3. Frojdentalova zagonetka

- Sum and Product Puzzle
- Impossible Puzzle

istorijat, rešenje, značaj...

NAPOMENA: istovetni radovi neće biti pregledani



	23	24	25	26	27	28
	30	31	1	2	3	4
април	6	7	8	9	10	11
	13	14	15	16	17	18
	20	21	22	23	24	25
	27	28	29	30	1	2
мај	4	5	6	7	8	9
	11	12	13	14	15	16
	18	19	20	21	22	23
	25	26	27	28	29	30
	1	2	3	4	5	6
јун	8	9	10	11	12	13
	15	16	17	18	19	20