



Хеуристика

Небојша Икодиновић

Математички факултет

nebojsa.ikodinovic@matf.bg.ac.rs

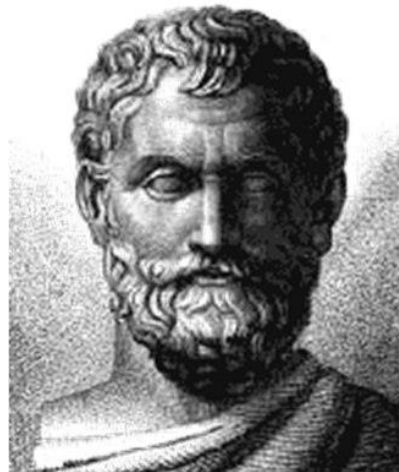


- Хеуристика – ars inveniendi (lat.)
(вештина откривања)
- Савремена хеуристика – art of problem solving
(eng./“savremeni lat.”)
(вештина решавања проблема)

Активно откривање вредно труда

Стварање појма		Решавање проблема
Појаве, представе, формирани појмови, ...	Мисаоне операције	Искуство, знање, вештине
Уочавање сличности (разлика) са познатим представама и појмовима	Аналогија	Уочавање сличности са познатим проблемима
Рашчлањавање целине на делове; уочавање особина појединих делова	Анализа	Шта је дато? Шта се тражи? Рашчлањавање онога што се тражи
Састављање делова и дубље сагледавања целине.	Синтеза	Конструкција онога што се тражи на основу анализе
Одбацивање неважних особина и аспеката	Апстракција	Уочавање суштински важних веза између датог и траженог
Стварање појма на основу апстрахованих особина	Генерализација	Формирање општег приступа решавању проблема

θεώρηιν, θεώρημα!

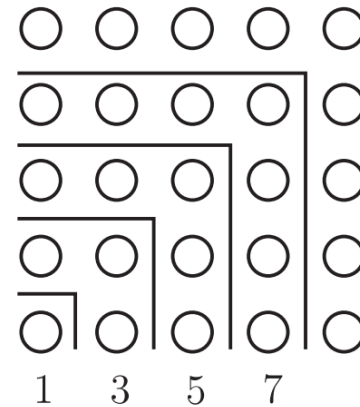


Θεώρηιν, Θεώρημα!

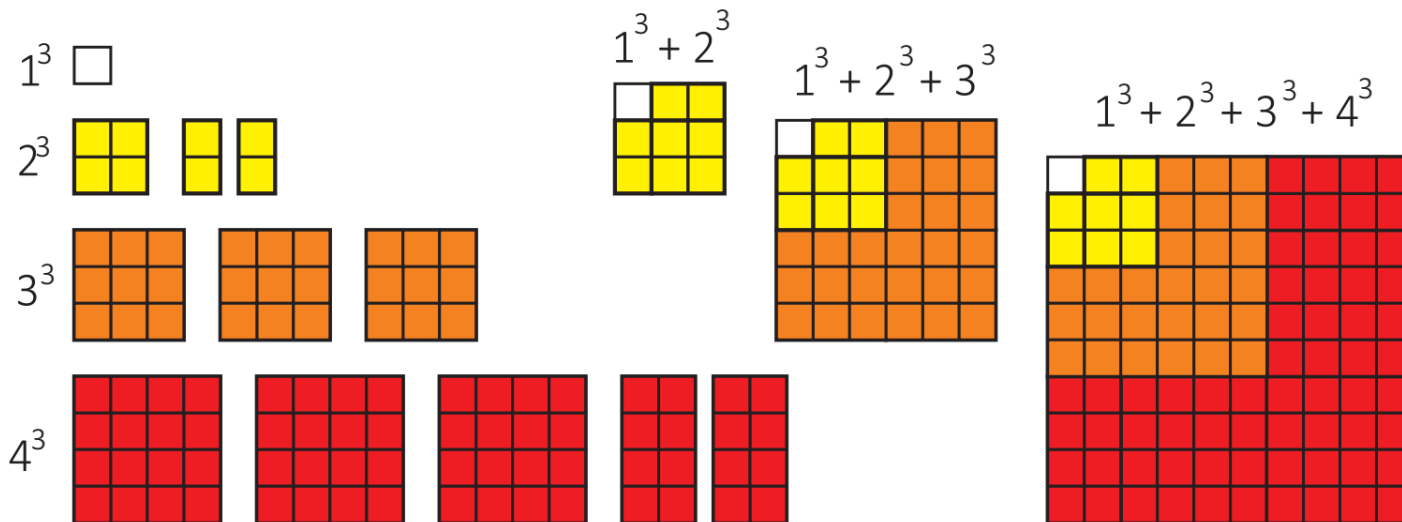
Задатак 1. Збир првих n непарних бројева је квадратни број:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Објаснити, сопственим речима, што прецизније зашто наведена једнакост важи за сваки природни број n .



Задатак 2. Чему је једнак збир првих n кубова: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = ?$



Ах (1871–1946), Пијаже (1896–1980), Виготски (1896–1934)

- Појмови су производ дугог и сложеног процеса развита мишљења које почиње опажајним и практичним мишљењем.
- Стварање појмова скоро увек продуктивно, а не репродуктивно, и да појам настаје у току сложене операције усмерене ка решавању неког задатка. Посебно, стварање научних појмова јесте процес усмерен ка јасном циљу, који се састоји из низа операција које служе као средства за решавање основног задатка.

Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма. Тај иницијални задатак представља камен-темељац на коме ће се изграђивати појам.

ПОЈАМ ПРАВОГ УГЛА

неформално

Нижи разреди основне школе:
Уочимо **прав угао** ...



формално

Виши разреди основне школе:
Дефинишимо **прав угао** ...



Прав угао је угао
једнак свом
упоредном углом.

Ах (1871 – 1946), Пијаже (1896 – 1980), Виготски (1896 – 1934) ...

Стварање појмова скоро увек продуктивно, а не репродуктивно. Појам настаје у току сложене операције усмерене ка решавању неког задатка.

Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма. Тај иницијални задатак представља камен-темељац на коме ће се изграђивати појам.

ПОЈАМ ПРАВОГ УГЛА

стручно знање

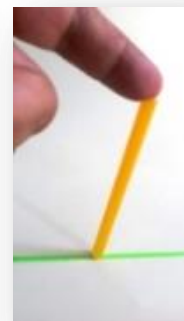
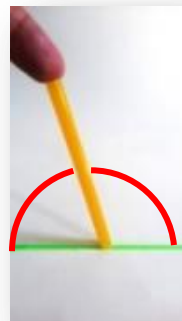
Прав угао је угао једнак свом упоредном углом.

Задатак. Упореди углове које штапић слева и здесна захвата са правом линијом. У ком случају штапић стабилно стоји када га не придржавамо?

Једнакост углова које штапић захвата слева и здесна са линијом узрокује стабилности штапића у односу на линију.

педагошке вештине

Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма.



ШКОЛСКО ГРАДИВО

формално и једноставно

Наставни садржаји не смеју бити редуковани само на формалне и једноставне концепте и поступке.

неформално и напредно

Наставни садржаји морају да прате дуготрајне процесе стварања и развоја фундаменталних појмова.

Градиво не треба само да прати развој ученика, већ и да му претходи и подстиче га. Што раније треба започети упознавање ученика са фундаменталним законима природе и друштва. Поред строгог и формалног увођења једноставних поступака, неопходно је програмима, на свим нивоима, предвидети и интуитивно и неформално упознавање са напредним концептима. У почетку, контекст треба да наликује околностима које су довеле до открића тих законитости.

ЗАКОНИ ПОЛУГЕ

формално и једноставно

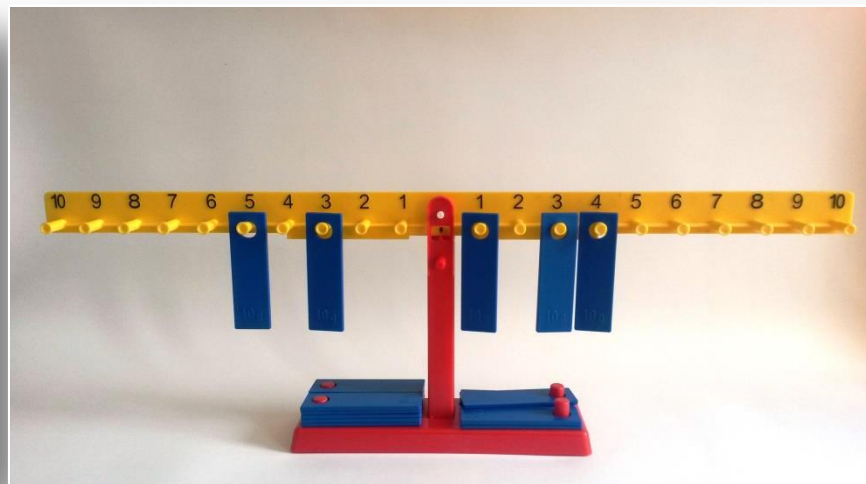
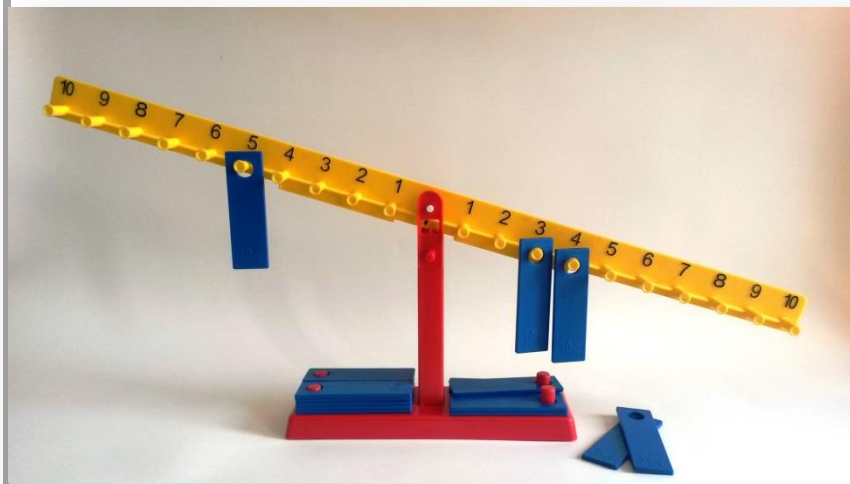
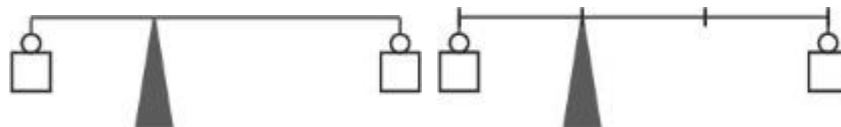
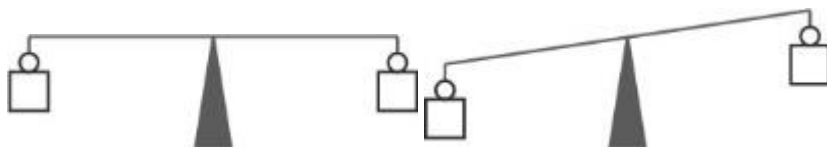
неформално и напредно

$$L = D$$

$$L > D$$

$$L > D$$

$$L = 2D$$

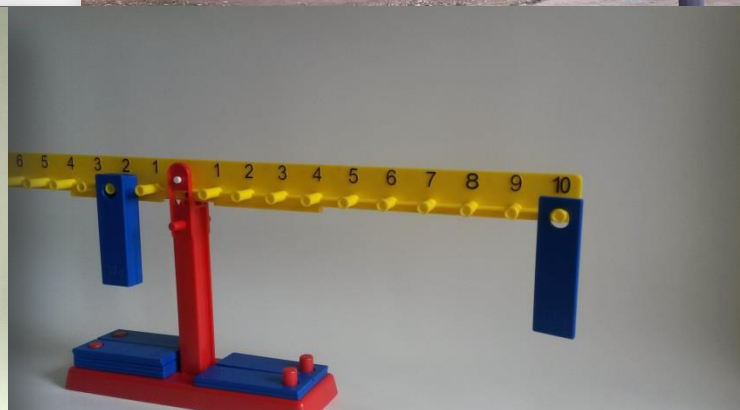
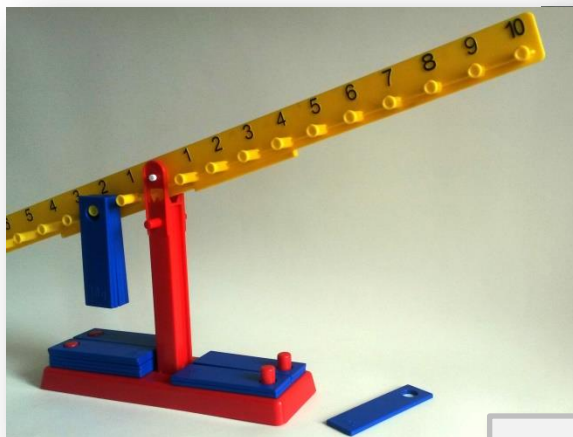


ЗАКОНИ ПОЛУГЕ

формално и једноставно

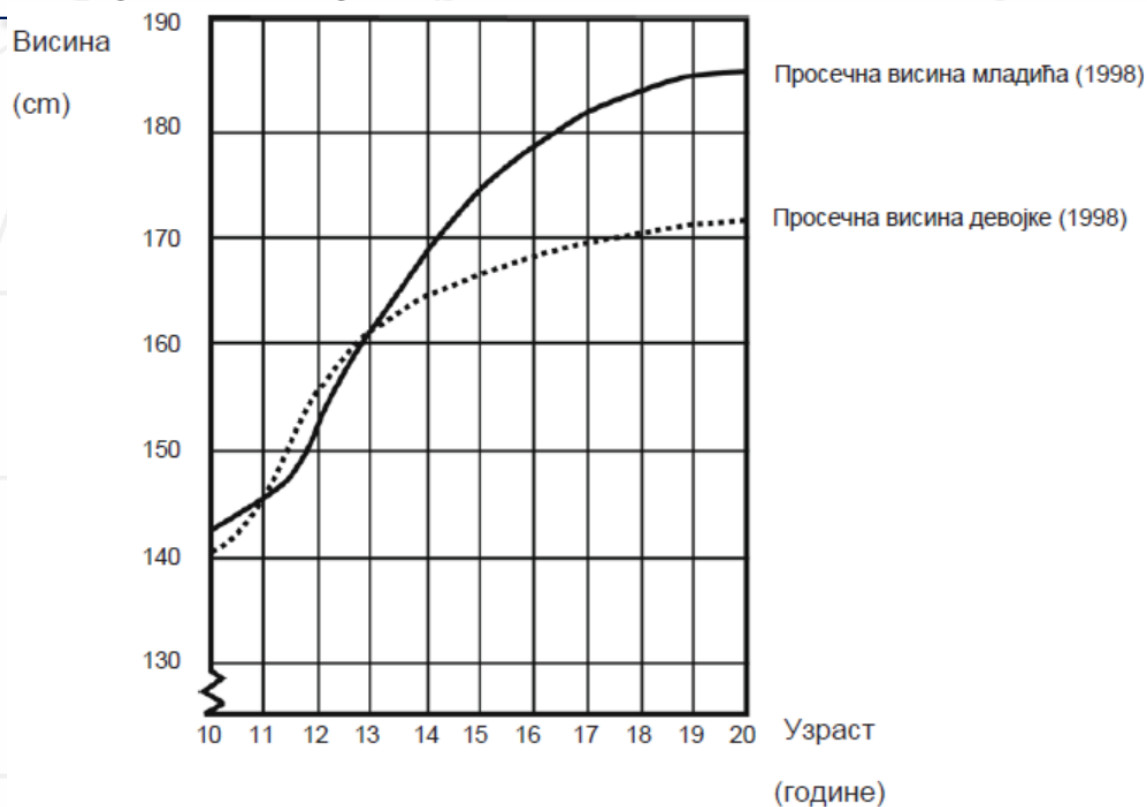
неформално и напредно

Архимедова клацкалица је
веома популарна у
парковима науке широм
света.



5 плочица на броју 2 = 1 плочица на броју 10

► Брзина промене



Питање 2: РАСТ

M150Q03- 01 02 11 12 13 99

Објасни како графикон показује да је у просеку раст девојака после 12 година успорен.

Проста каматна формула

► Задатак 47.

Уложена сума новца назива се **главница**, док се очекивана добит након одређеног времена назива **камата** или **интерес**. Колика ће камата (добит) бити зависи од договорене **каматне стопе** која се изражава у процентима и представља добит коју би донело инвестирање суме од 100 динара (евра или неке друге валуте која се користи) за годину дана и временског **периода** израженог у годинама.

улог	време	добит
100 дин ↓ G дин	1 год ↓ t год	p ↓ $K (?)$

$$\frac{K}{p} = \frac{t}{1} \cdot \frac{G}{100}$$

$$K = G \cdot \frac{p}{100} \cdot t = G \cdot p\% \cdot t$$

Штедња и број е

► *Сложена каматна формула:*

K је сума новца коју ће добити неко након t година ако је орачио суму G са годишњом каматном стопом $p\%$ при чему се након истека сваке године главница увећава за камату, па се даље рачуна са новом главницом.

► Ако је главница G уложена са каматном стопом $p\%$ која ће се обрачунавати m пута годишње, онда ће укупна сума K након t година бити

$$K = G(1 + p\%)^t$$

$$K = G \left(1 + \frac{p\%}{m} \right)^{mt}$$



Штедња и број е

- **Задатак 48.** Препоставимо да је неко уложио 1000€ са каматном стопом 9% и да жели да подигне новац након 2 године. Испитај колику суму новца ће подићи у зависности од тога колико пута годишње ће бити обрачунавана камата.

Штедња и број е

- Задатак 48. Препоставимо да је неко уложио 1000€ са каматном стопом 9% и да жели да подигне новац након 2 године. Испитај колику суму новца ће подићи у зависности од тога колико пута годишње ће бити обрачунавана камата.

Обачунавање камате	m	$K = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,09}{m}\right)^{2m}$
Годишње	1	1018,081
Полугодишње	2	1192,519
Тромесечно	4	1194,831
Месечно	12	1196,414
Недељно	52	1197,031
Дневно	365	1197,191
На сваких сат времена	8760	1197,216

Штедња и број е

$$K = G \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{p\%}} \right)^{\frac{m}{p\%}} \right)^{p\%t} = G \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{p\%t}$$

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
10	$1,1^{10} = 2,5937424601$
100	$1,01^{100} \approx 2,7048138294215260932671947108075$
1 000	$1,001^{1000} = 2,7169239322358924573830881219476$
10 000	$1,0001^{10000} \approx 2,7181459268252248640376646749131$
100 000	$1,00001^{100000} \approx 2,718268237174489668035064824426$
1 000 000	$1,000001^{1000000} \approx 2,7182804693193768838197997084544$

$$K = Ge^{p\%t}$$



Број е

Задатак 49.

Да је 1. године нове ере уложен 1€ са непрекидним обрачунавањем камате од 3%, колико би се новца могло подићи 2012. године?

Задатак 50.

При којој камати ће уложена сума од 1000 евра нарасти до 2500 евра за 10 година при непрекидном обрачунавању камате?

Задатак 51.

Особа А је уложила 1000€ са каматном стопом 9% која ће бити обрачунавана месечно, а особа Б је уложила 2000€ са каматном стопом 3% која ће такође бити обрачунавана месечно. Да ли ће икада особа А имати већу суму новца од особе Б?



Хеуристика

Проблемска ситуација

! Процес откривања

! Папус (290–350 н.е.) – Συναγωγή („Ризница анализе...“)

! Декарт (1596–1650) – Regulae ad directionem ingenii (Правила за вођење ума)

! Лајбниц (1646–1716) – необјављени фрагменти о умећу проналажења

! *Ништа није важније него видети изворе проналажења који*

! *су по мом мишљењу интересантнији од проналазака самих*

! Болцано (1781–1848) – Wissenschaftslehre (Настава науке)

! Поја (Поља, 1887–1985) – How to solve it

! Т. Тао (1975–) Solving Mathematical Problems, A Personal Perspective

! <https://artofproblemsolving.com/>



Откриће

Савремена хеуристика

Проблем

! Процес решавања!



Решење

Упоређивање/аналогија

- **Упоређивање** или аналогија је мисаони процес који се састоји у утврђивању сличности међу предметима; разликовање или дискриминација јесте процес налажења разлика међу предметима и појавама.

[грч. *аналогиа* – склад, правилност, однос, сродност]

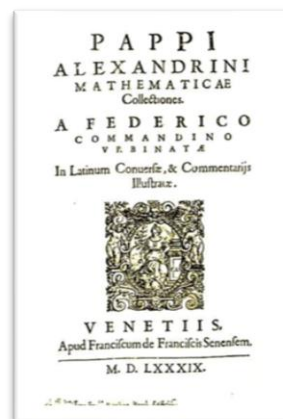
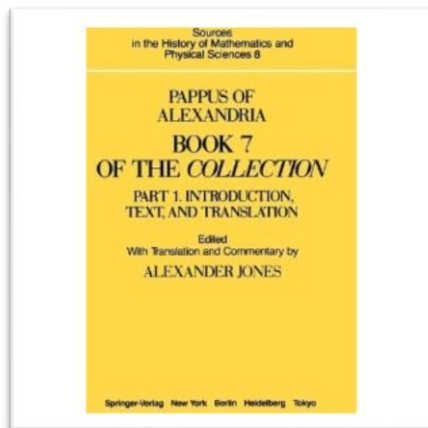
- **Људска меморија ради по принципу препознавања шаблона.**
- Позитивна аналогија = сличности
- Негативна аналогија = разлике

Анализа и синтеза

- **Анализа** је рашчлањавање појава и предмета на једноставније делове.
- **Синтеза** је повезивање рашчлањених делова.
- Најчешће се примељују комбиновано, дајући јединствену **аналитичко-синтетичку методу**.

Вештина решавања задатака

- **Папус** (грчки математичар, живео око 300. год.)
Седма књига његовог чувеног дела *Collectiones* садржи “Ризницу анализе” (у слободном преводу “вештине решавања задатака”, или “хеуристике”).



- **Папусова** “Ризница анализе” почиње дефиницијама анализе и синтезе:

Вештина решавања задатака

- *Анализа* узима оно што се тражи као да је већ нађено и полази од тога преко узастопних полседица до нечега што се узима као почетак синтезе; јер у анализи узимамо да је оно што се тражи већ учињено и питамо се чија је то последица, и опет шта је узрок последњег, и тако даље све док идући оваквим корацима не стигнемо до нећег што је већ познати или што припада класи првих начела. Овакву методу називамо анализом као решавање уназад.
- *Синетза* је обнут процес, у њој узимамо као учињено то што је у анализи било последње достигнуто и сређујући у њиховом природном поретку као последице оно што су пре биле претпоставке и спајајући их редом једну за другом коначно долазимо до конструкције онога што је било тражено; и то зовемо синтезом.

Задатак. Доказати неједнакост (AG)

Пођимо од очигледне
неједнакости ...

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Анализа и синтеза

Неједнакост јесте очигледна, али
има и других које су очигледне па
не полазимо од њих ...

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

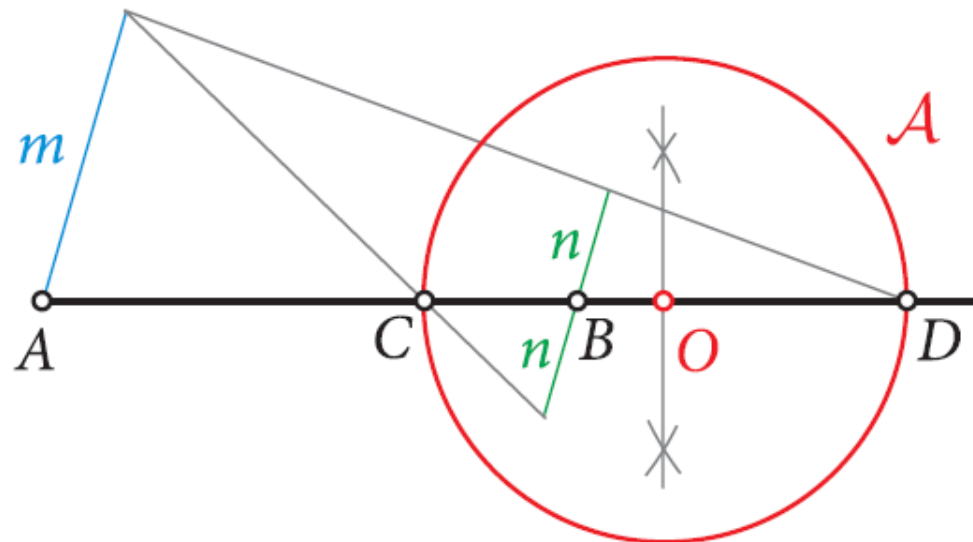
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Анализа и синтеза

- АНАЛИЗА (Како да докажем?)
 - СИНТЕЗА (Ево доказа!)
-
- Аналитичка и синтетичка геометрија

Аполонијева кружница

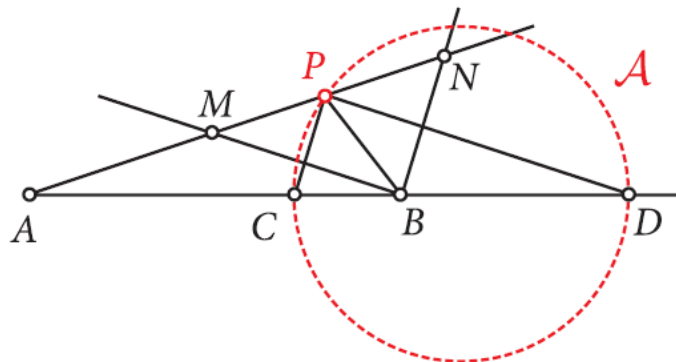
Нека су A и B две дате тачке и m и n дате неподударне дужи. Докажи да скуп свих тачака P таквих да је $PA : PB = m : n$ представља кружницу.



Аполонијева кружница

Нека су C и D тачке праве AB такве да је $AC : BC = AD : BD = m : n$. C и D су и једине тачке праве AB које задовољавају постављени услов.

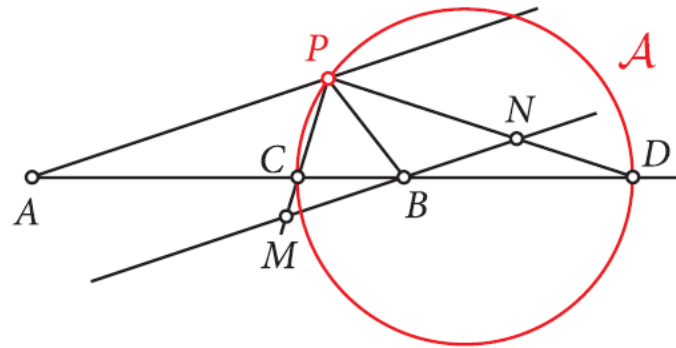
Нека је P произвољна тачка која није колинеарна са A и B таква да је $AP : BP = m : n$. Доказаћемо да је угао CPD прав (а тиме и да P припада кружници над пречником CD).



Конструишимо кроз B праве BM и BN такве да је $BM \parallel PD$ и $BN \parallel PC$, при чему M и N припадају правој AP (види слику изнад). Тада је $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{PN} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{PM} = \frac{m}{n} = \frac{AP}{BP}$, па је $PN \cong PM \cong BP$, одакле следи да је $\angle MBN$ прав. Због подударности углова са паралелним крацима, следи да је и $\angle CPD$ такође прав, што је и требало доказати.

Аполонијева кружница

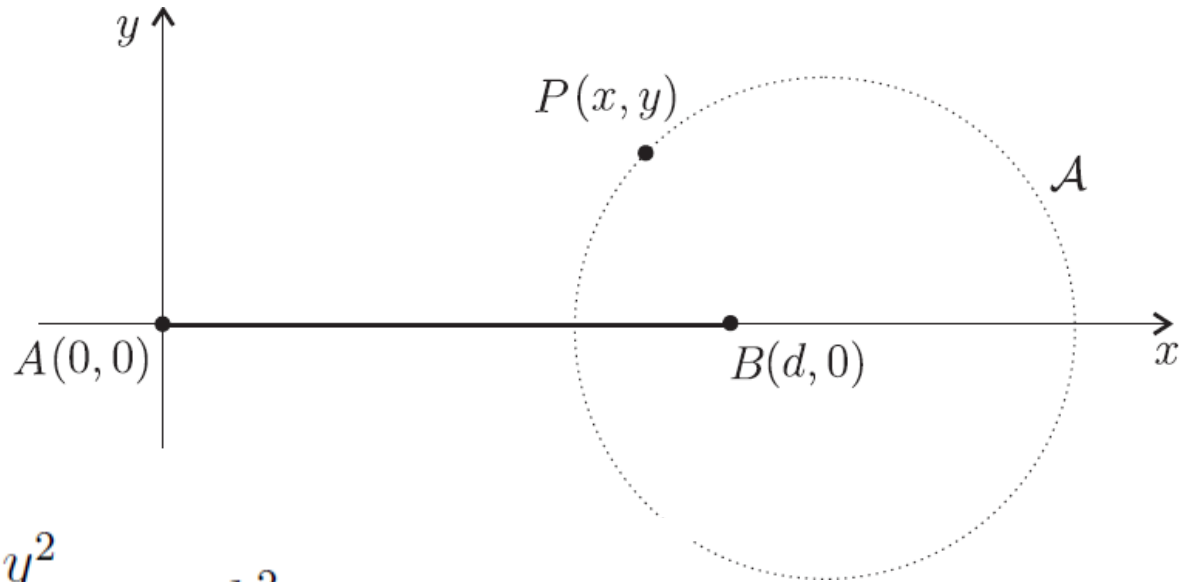
Докажимо и обрнуто, да свака тачка P кружнице над пречником CD задовољава једнакост $AP : BP = m : n$. Нека је P произвољна тачка кружнице над пречником CD . Конструиримо кроз B праву паралелну са AP и означимо са M и N пресеке ове праве са дужима PC и PD (види слику испод).



Тада је $\frac{AP}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{NB}$, одакле следи да је $MB \cong NB$, то јест да је B средиште хипотенузе MN правоуглог троугла MPN . Дакле, $BM \cong BN \cong PB$, па из претходних једнакости добијамо да је $AP : BP = m : n$.

Аполонијева кружница

- II начин



$$\frac{PA}{PB} = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x - d)^2 + y^2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \frac{dk^2}{k^2 - 1} x + \frac{d^2 k^2}{k^2 - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{dk^2}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \frac{d^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Апстракција и генерализација

- Основни процеси при формирању појмова јесу **апстракција** и **генерализација**.
- Апстракција је издвајање одређених карактеристика групе предмета, а занемаривање других својстава предмета која се одбацују као небитна.

[abstrahere = извлачити, одвајати; trahere = вући]

- Генерализација или уопштавање састоји се у повезивању апстракцијом издвојених карактеристика у једну целину, а уз знање да се те одвојене одлике могу наћи и у другим случајевима и да ћемо увек кад буду те карактеристике заједно дате, имати посла са истом врстом предмета или појава.

[generalisatio – уопштавање]

Уопштење Питагорине теореме

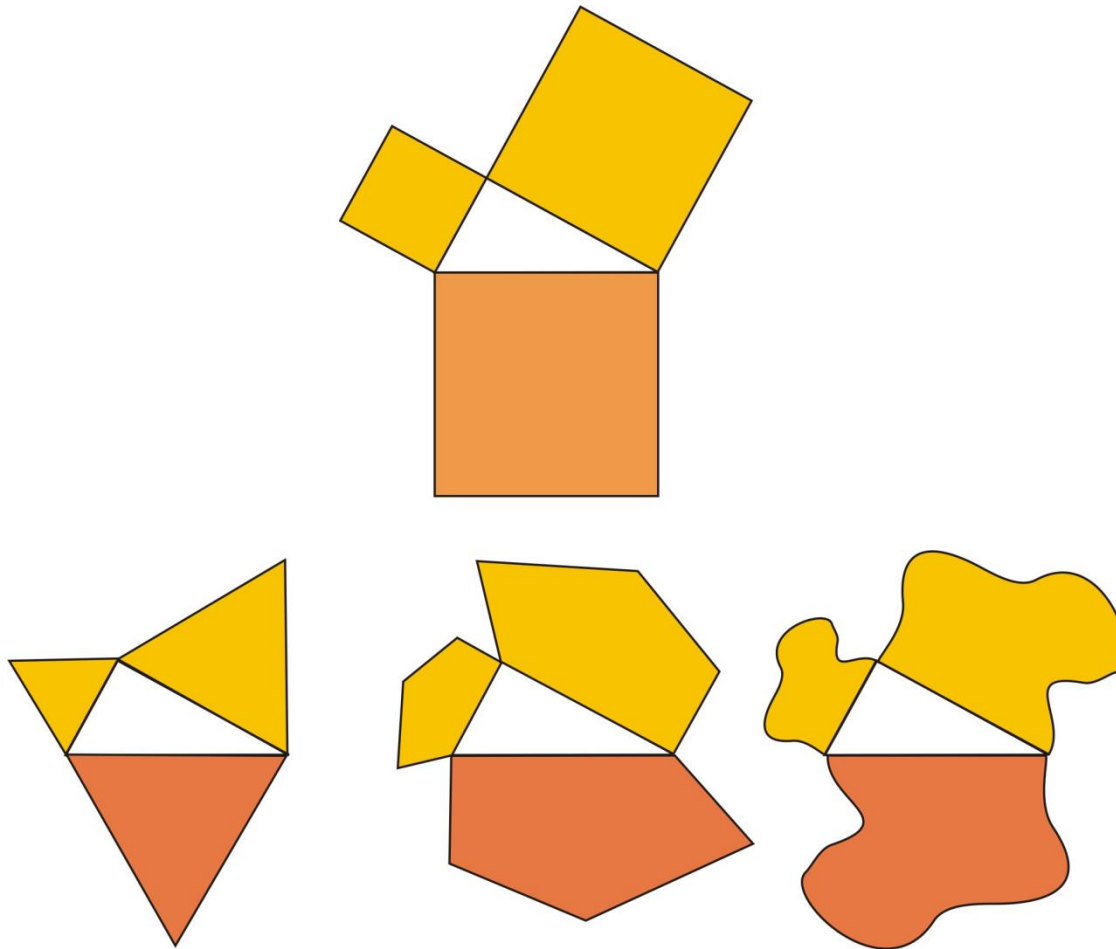
Задатак 1. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су једнакостранични троуглови.

Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Задатак 2. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су правилни шестоуглови. Испитај да ли је збир површина шестоуглова над катетама једнак површини шестоугла над хипотенузом.

Задатак 3. Странице правоуглог троугла су основице једнакокрако-правоуглих троуглова конструисаних са спољашње стране. Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Генерализација



Уопштење задатка

- **Задатак.** Дати су права и правилан октаедар. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.
- **Општији задатак.** Дати су права и централно симетрично тело. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог тела.

Предглед кључних компетенција

- Решавање проблема

Ученик је у стању да препозна, разуме и реши проблемске ситуације у којима решење није видљиво на први поглед, користећи знања и вештине стечене из различитих предмета. Решавање проблема подразумева и спремност ученика да се ангажује и конструктивно и промишљено допринесе решавању проблема са којима се суочава заједница којој припада.

Математички задаци – Зашто? Какви?

- Математички задаци – саставни део учења математике
- По неким, решавање математичких задатака заузима значајније место у образовању појединца него поједини математички садржаји.
- Математика се најбоље учи решавањем задатака.

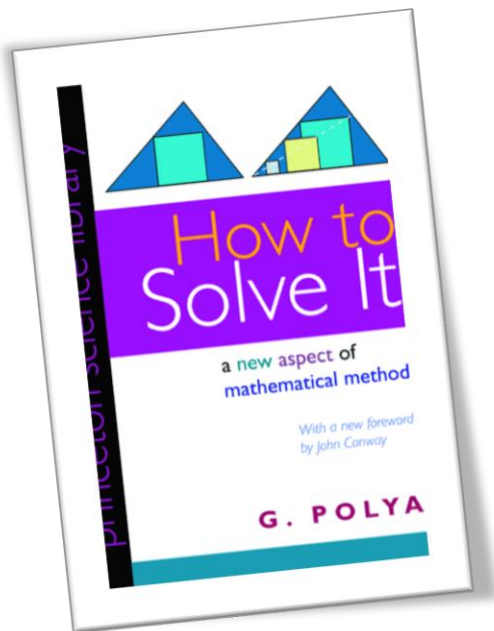
Математички задаци – Зашто? Какви?

- Нове тенденције у обазовању намећу потпуно другачији тип школских задатака.
 - Концепт испред поступка.
 - Разумевање испред репродукције.
 - Знање испред оцене.

Kako rešavati zadatak?

http://enastava.matf.bg.ac.rs/~ikodinovic/MNMR/MNMR_23_24/TEMA3_Resavanje_problema_primeri.pdf

George Polya
HOW TO SOLVE IT
A new aspect of
mathematical method
Princeton University Press
1945



1887– 1985

Превод:
George Polya
KAKO ĆU RIJEŠITI
MATEMATIČKI ZADATAK

Školska knjiga, Zagreb
1966

Из предговора

... при решавању сваког проблема има нешто сазнајно. И при најскормнијем задатку, ако он буди интересовање, ако покреће довитљивост, и ако га ученик решава сопственим снагама, доживеће напетост и тријумф проналазача. Такви доживљаји у периоду који је приступачан утисцима могу створити склоност ка умном раду и утиснути доживотни печат на дух и карактер.

Ту је велика прилика за наставника математике.

Из предговора

Ако наставник с ученицима само механички “теше” увежбане поступке, смањује њихово интересовање и кочи њихов интелектуални развој. Но ако он у својим ученицима буди радозналост дајући им задатке који су примерени њиховом знању и ако им помаже стимулативним питањима, развијаће у њима склоност за самосталним мишљењем и показивати им путеве до њега.

Из предговора

... ученик, чак и ако је природно надарен за математику, мора најпре мора да открије своје способности и склоности. Он не може знати да ли воли ћевапчиће ако их никада није окусио. Нека ученик дође до закључка да математички проблем може пружити исто толико задовољства као и укрштеница, или да интензивни умни рад може бити једнако угодан као напета партија тениса. Окуси ли једном радост у математици, неће је лако заборавити...

Из предговора

Проучавамо ли методе решавања задатака, запазићемо два лица математике. Математика јесте строга систематска дедуктивна наука, али је математика у настајању експериментална индуктивна наука.

Како решавати задатак?

Прво

Треба да **разумеш** задатак.

Друго

Потражи везу између задатог и непознатог! Ако се не може наћи непосредна веза, мораћеш можда разматрати помоћне задатке. Најзад треба да добијеш **план** решавања.

Треће

Изврши свој план!

Четврто

Провери добијено решење!

Прво ... да **разумеш** ...

- Шта је непознато? Шта је дато? Какве су везе између датог и непознатог?
- Да ли је могуће задовољити услове задатка? Да ли су услови довољни за одређивање непознатог? Или нису довољни? Можда је задатак *преодређен*? Или контрадикторан?
- Нацртај слику! Уведи погодне ознаке!
- Анализирај дате услове!

Друго ... **направи план...**

- Да ли си се већ срео/ла са неким сличним и сродним задатком?
- Можеш ли задатак другачије формулисати?
- Ако не можеш одмах да решиш постављени задатак, покушај најпре да смислиш неки једноставнији: општији задатак, специјалнији задатак, аналогни задатак.
- Шта се све може извући из задатих података? Покушај да одредиш који би други подаци били погодни за одређивање непознате!
- Да ли си узео/ла све дате податке заједно?

Треће ... изврши план ...

- Контролиши сваки корак решавања!
Можеш ли јасно објаснити зашто је сваки корак исправан? Можеш ли доказати да је исправан.

Четврто ... **провери**...

- Објасни читав поступак решавања!
- Можеш ли резултат добити другачије?
- Можеш ли метод применити при решавању неког другог задатка?
- Постави питања!

Проблемска настава

1. Уочавање проблема (формулација)
2. Разјашњавање проблема (анализа проблема)
3. Постављане хипотеза и процењивање њихових последица
4. Верификација хипотеза
5. Анализа резултата, извођење закључака, генерализације
6. Примена

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

- **Проблемска ситуација** представља језгро основног дидактичког модела овог века тзв. пројектног учења. За овај модел користе се и називи: учење на бази проблема, истраживачко учење, аутентично учење, учење откривањем итд.

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

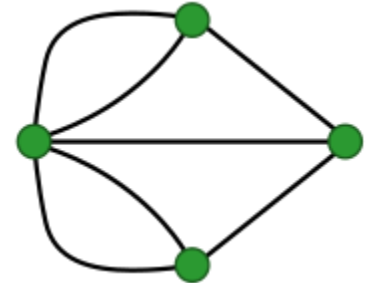
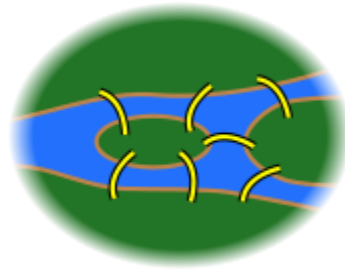
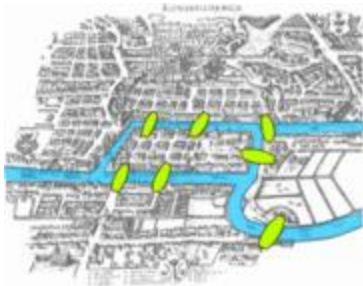
Проблемска ситуација може бити базирана на:

- реалном/реалистичном проблему
- видео-снимку
- (новинском) чланку
- презентацији
- експерименту ...

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

- Ојлеров проблем

Седам мостова Кенигсберга



ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

Чувена преписка Ферма – Паскал

- **Недовршена игра***

Блез и Пјер су уложили једнаке суме у игру бацања фер новчића. Блез добија поен ако падне грб, Пјер добија поен ако падне грб. Укупан улог узима онај који има више поена после пет бацања. Међутим, игра је из неког разлога прекинута после три бацања (при резултату 2 : 1) и играчи су морали међусобно да поделе укупан улог. У којој размери играчи треба да поделе укупан улог?

* Кит Девлин, аутор књига Математички ген, Миленијумски проблеми, Недовршена игра ...

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА

Чувена преписка Ферма – Паскал

- Недовршена игра

... Методе које су развили Паскал и Ферма применили су и даље разрађивали Бернули, Муавр итд.

A. Hald, A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, New York, 1990

ЦЕНТАР ОПИСАНЕ КРУЖНИЦЕ

стручно знање

Симетрале страница троугла секу се у једној тачки, која је једнако удаљена од темена троугла.

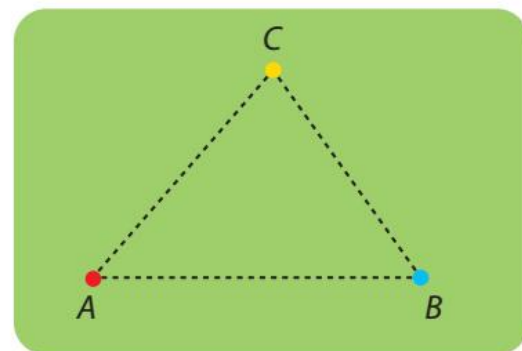
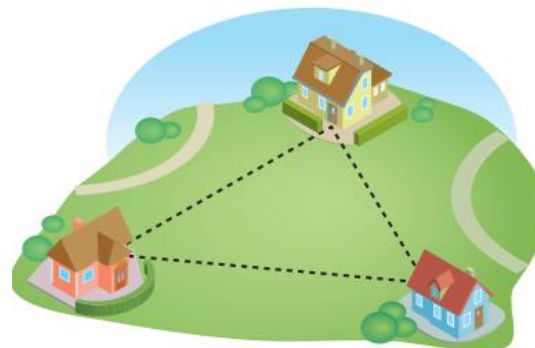
Задатак.

Три породице Акић, Бакић и Цакић живе у суседству и желе да ископају бунар тако да он буде једнако удаљен од свачије куће. Измерили су растојања између сваке две куће и на основу тога у некој размери нацртали одговарајућу скицу. Где на скици треба да означе положај бунара који желе да ископају?

<https://www.geogebra.org/>

педагошке вештине

Неопходно је пред ученике поставити задатак који се не може решити другачије него стварањем појма.



Тежиште

Задатак.

- Изрезати од картона произвољан полигон и одредити његов центар равнотеже.

ТЕЖИШТЕ

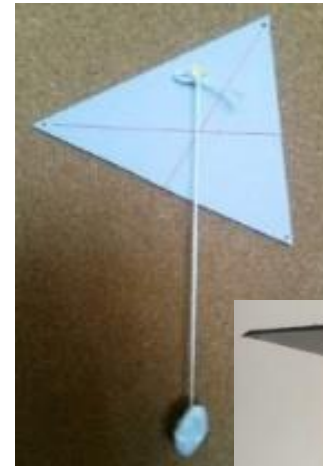
теорија

пракса

Истраживачки задатак

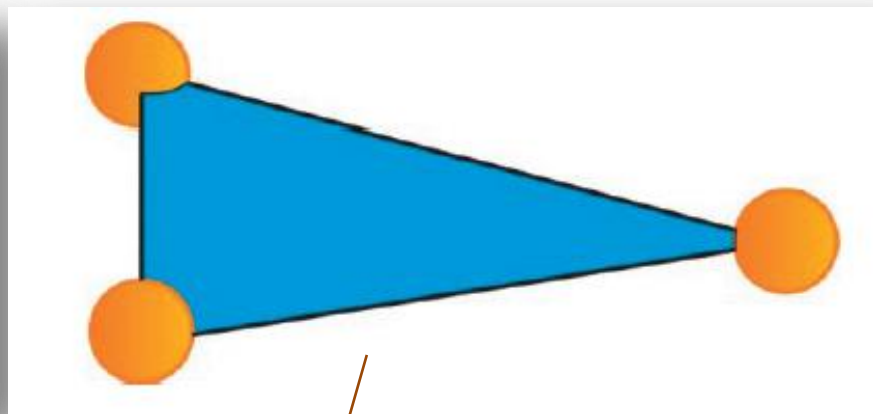
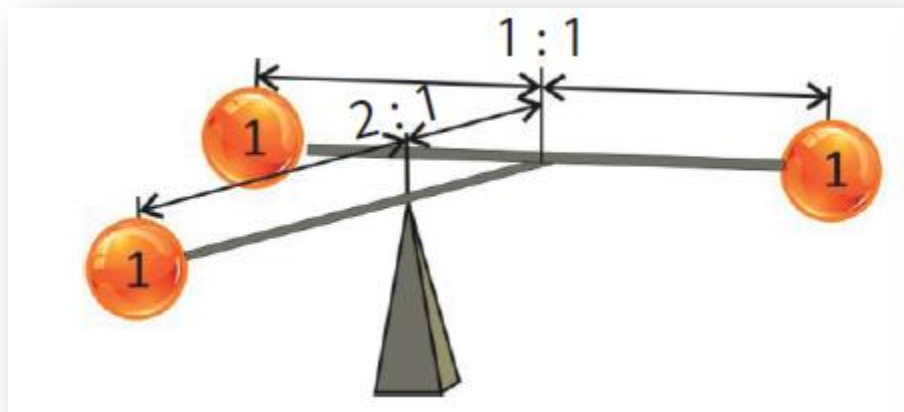
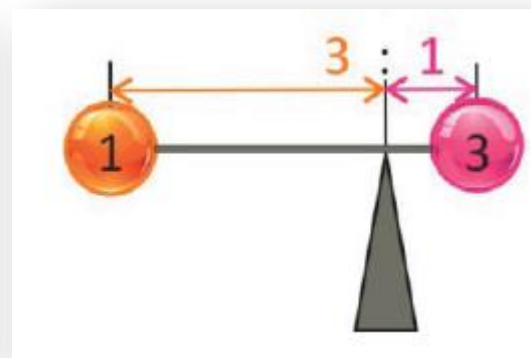
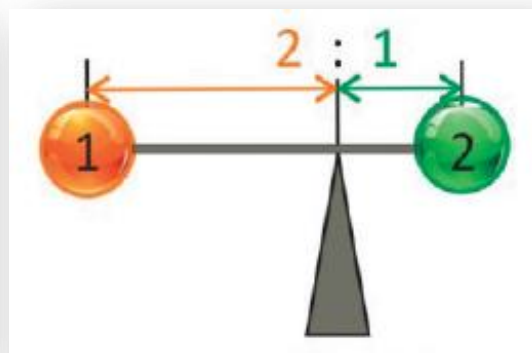
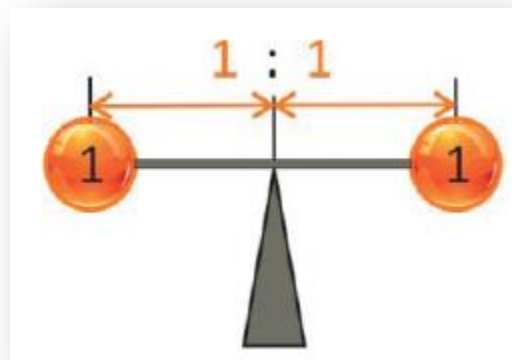
Одреди центар равнотеже троугаоног картона.

➤ експеримент



Када чујем онда заборавим,
када видим онда запамтим,
када урадим онда разумем.

Тежиште троугла (мисони токови)



Где је центар равнотеже троугаоне плоче у чијим су теменима постављене кугле од по 1kg?

ТЕЖИШТЕ

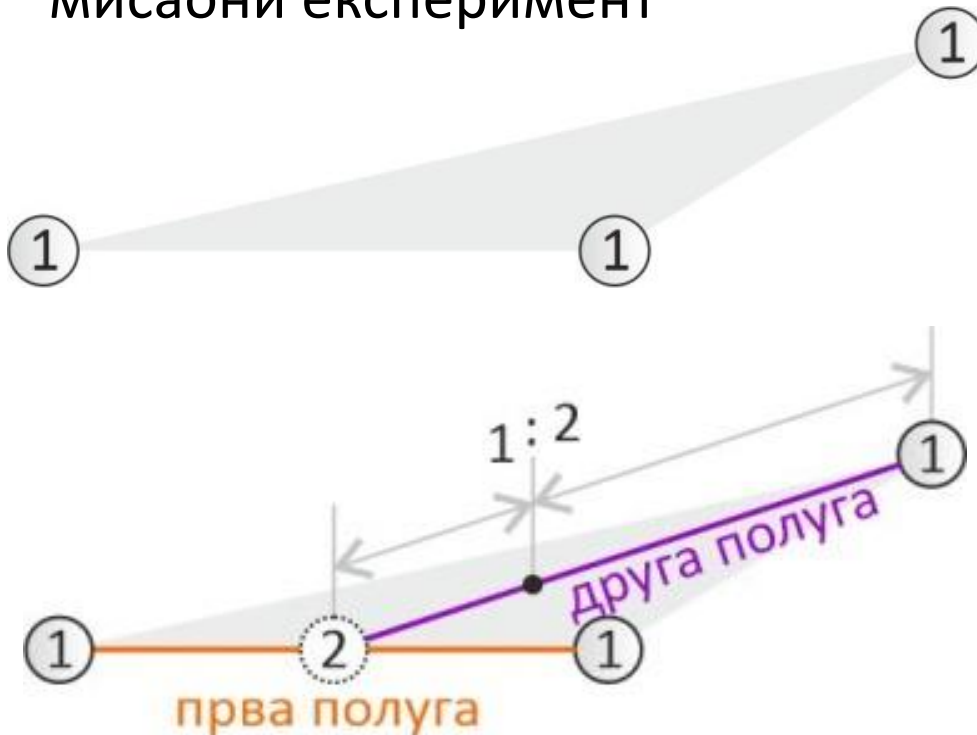
теорија

пракса

Истраживачки задатак

Одреди центар равнотеже троугаоног картона.

➤ мисаони експеримент



Тежиште

Задатак

- Нацртати произвољан (можда неконвексан) полигон и лењиром и шестаром конструисати тежиште.

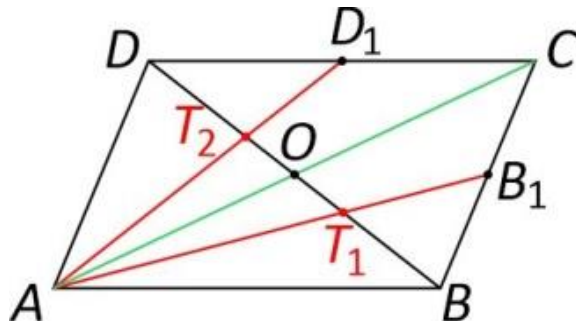
ЗАДАЦИ

рутина

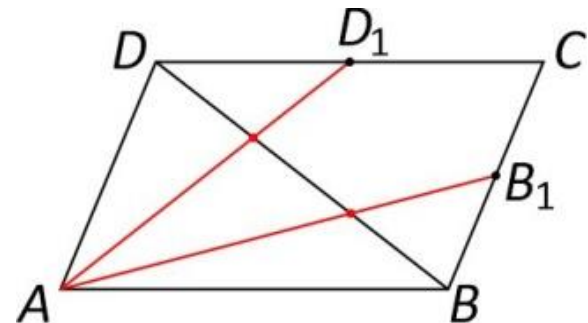
креативност

Прелаз са шаблонских на проблемске задатке не сме бити нагли. Ниво захтева се мора постепено повећавати.

- Задатак.** 1) Нацртај паралелограм $ABCD$ и пресек дијагонала означи словом O .
2) Одреди средишта B_1 и D_1 редом страница CB и CD .
3) Одреди тежишта T_1 и T_2 редом троуглова ABC и ACD .
4) Упореди дужи BT_1 , T_1T_2 и T_2D .



- Задатак.** Из темена A паралелограма $ABCD$ конструисане дужи AB_1 и AD_1 , где су B_1 и D_1 редом средишта страница CB и CD . Докажи да тачке пресека ове две дужи са дијагоном BD деле ову дијагоналу на три једнака дела.



Запремина

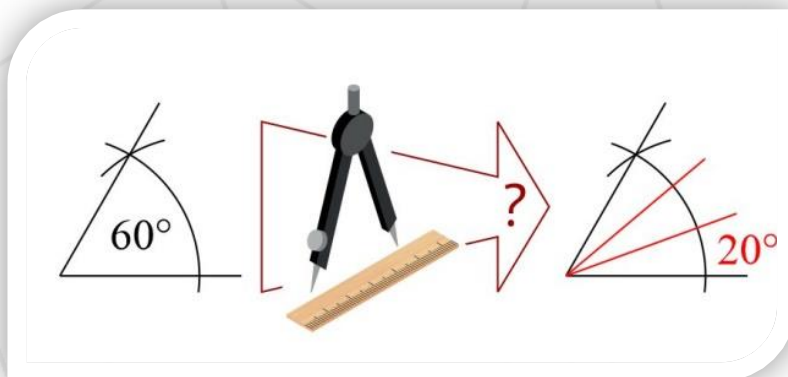
- Израчунај запремину лимуна.



Проблем трисекције угла

- Проблем [≈ 430 пре н.е.]

(Може ли се) лењиром и шестаром произвољан угао поделити на три једнака дела.(?)



- Пјер Венцел (1814-1848)

Теорема [1837]

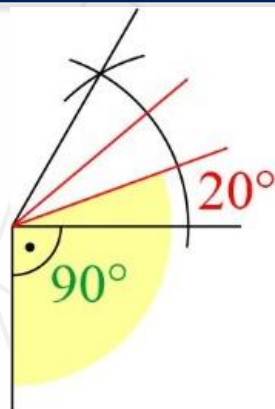
Лењиром и шестаром **није могуће конструисати** угао од 20° .

Квадратура круга
[≈ 430 пре н.е.]



С правом се верује да је утрошено више интелектуалног напора да се реши проблем квадратуре круга него да се човек пошаље на Месец.

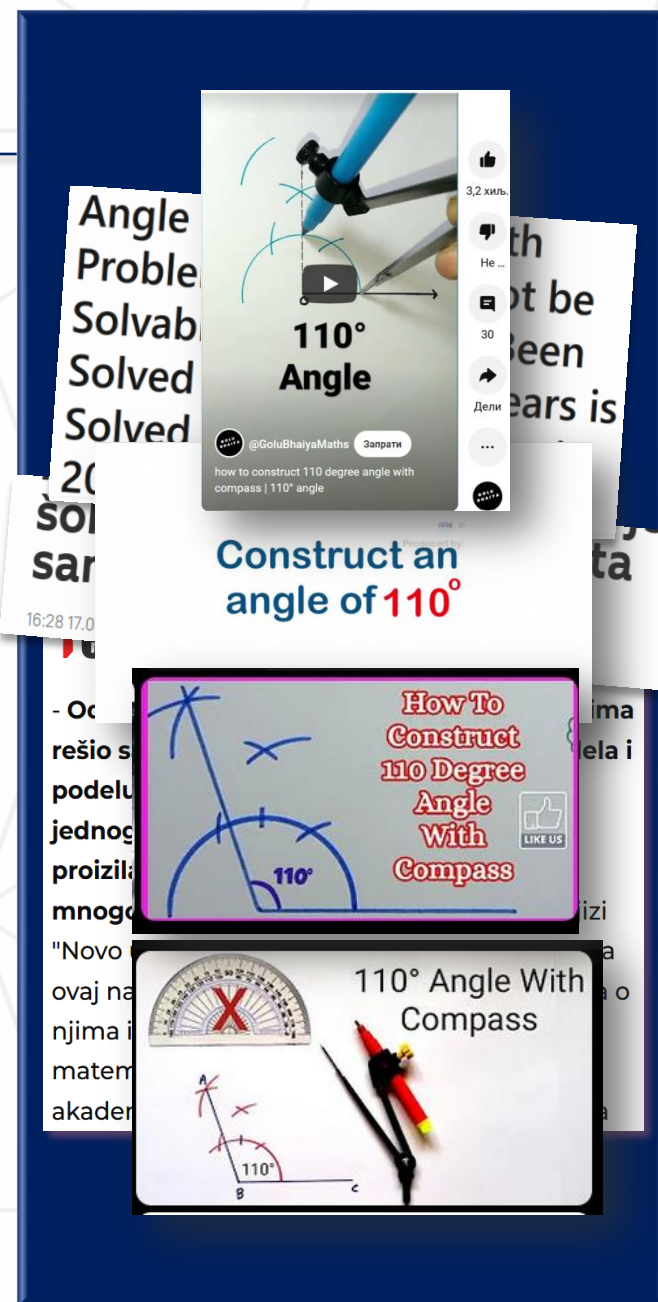
Конструкција угла од 110° !?



Задатак 0. Погледај видео прилог са YouTube-а:

[how to construct 110 degree angle.mp4](#)

- а) Колико има прегледа?
- б) Издвоји неколико карактеристичних коментара.
- в) Има ли основа да се посумња у ову конструкцију? Зашто?



Да ли је конструкција коректна?

Задатак 1. Конструирати угао подударан углу из видеоа. Измерите овај угао. Уколико мерење покаже да величина угла одступа од 110, шта би могли бити разлози одступања?

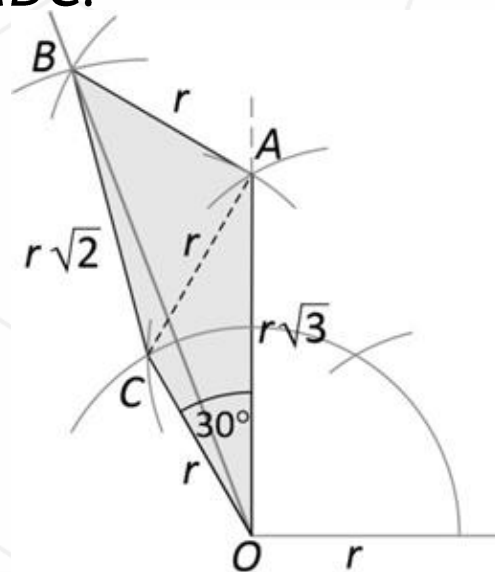
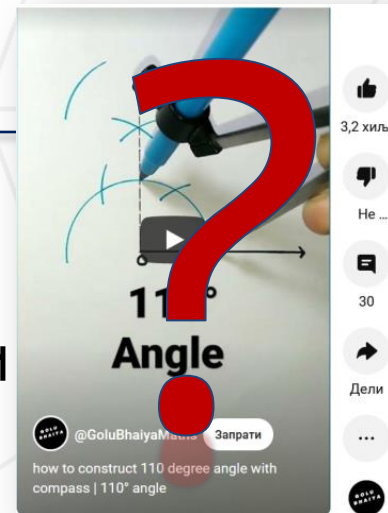
Задатак 2. Уочи четвороугао $OABC$ добијен приказаном конструкцијом.

а) Одреди углове и странице четвороугла $OABC$.

б) Одреди (приближно) величину угла које дијагонала OB заклапа са страницама четвороугла $OABC$.

$$\cos \sphericalangle AOB = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0.93228578094$$

$$\sphericalangle AOB \approx 21.2060231144^\circ$$



Да ли је конструкција коректна?

$$\cos \sphericalangle AOB = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \approx 0.93228578094$$

$$\sphericalangle AOB \approx 21.2060231144^\circ$$

$$\sphericalangle AOB \neq 20^\circ? \quad \cos \sphericalangle AOB \neq \cos 20^\circ?$$

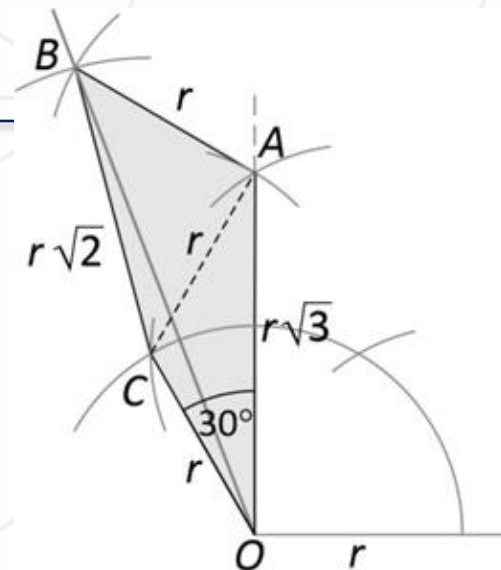
Задатак 3.

а) Доказати идентитет $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

б) Доказати да је $\cos 20^\circ$ решење једначине

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0.$$

в) Доказати да број $\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{4+\sqrt{3}}}$ није решење једначине $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.



На трагу општег резултата

Опште питање.

Може ли се лењиром и шестаром
конструисати угао од 110° ?

Једноставније, може ли се
лењиром и шестаром
конструисати угао од 20° ?

Скица одговора.

Детаљан одговор: еУчионица

„Прекомерна
количина детаља
доводи само до још
већег несхватања.“

Едмунд Лич

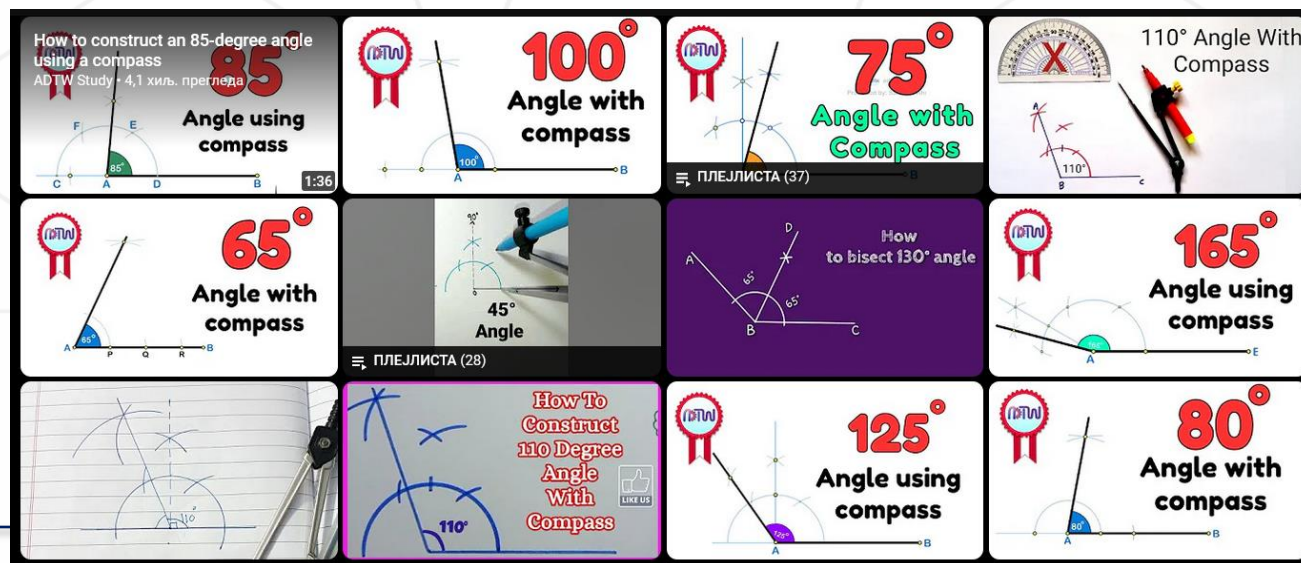
Збирка задатака

Задатак. Објаснити зашто није могуће лењиром и шестаром конструисати правиан деветоугао.

Задатак. Може ли се лењиром и шестаром конструисати страница коцке чија је:

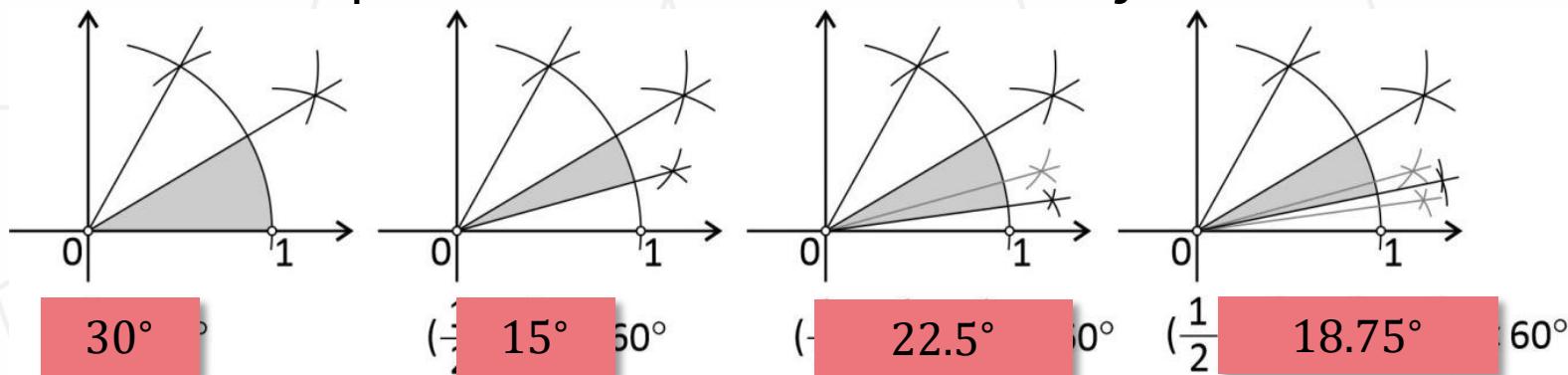
- а) површина једнака 2 јединична квадрата;
- б) запремина једнака 2 јединичне коцке?

Задатак. Испитати коректност следећих конструкција:



Збирка задатака

Задатак. а) Опиши конструкције приказане на наредним сликама и одреди величине освенчених углова.



б) Претходним поступком даље се добијају углови:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot 60^\circ, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) \cdot 60^\circ, \text{ итд.}$$

Шта примећујеш?

в) Ако је ε било који позитиван број, може ли се лењиром и шестаром конструисати угао чија се величина за мање од ε разликује од угла од 20° ?

Збирка задатака

Задатак. Чињеница да се лењиром и шестаром не може извршити трисекција произвољног угла инспирише потрагу за новим „справама“ и „триковима“ којима би се овај конструктивни задатак могао решити.

На ТикТок-у се може погледати тзв. [оригами трисекција угла](#). Да ли је приказаним поступком, угао заиста подељен на три једнака дела? Детаљно образложи одговор?



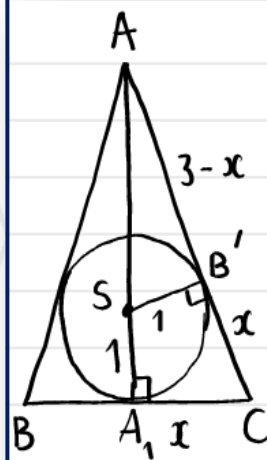
Збирка задатака

Задатак. а) Професор је ученицима задао задатак: Доказати да се лењиром и шестром не може конструисати једнакокраки троугао чији је крак 3 и полупречник уписане кружнице 1.

б) Професор није био задовољан решењем. Зашто?

Упутство

Студент је задатак под а) решио на следећи начин:



$$\underbrace{\sqrt{(3-x)^2 + 1}}_{AS \text{ } (\triangle ASB')} + 1 = \underbrace{\sqrt{3^2 - x^2}}_{AA_1 \text{ } (\triangle ACA_1)}$$

$$\sqrt{9 - 6x + x^2 + 1} = \sqrt{9 - x^2} - 1$$

$$\sqrt{10 - 6x + x^2} = \sqrt{9 - x^2} - 1$$

$$10 - 6x + x^2 = 9 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2} + 1$$

$$10 - 6x + x^2 = 10 - x^2 - 2\sqrt{9 - x^2}$$

$$2\sqrt{9 - x^2} = 6x - 2x^2$$

$$\sqrt{9 - x^2} = 3x - x^2; \sqrt{9 - x^2} = x(3 - x)$$

$$9 - x^2 = x^2(3 - x)^2; (3 + x)(3 - x) = x^2(3 - x)$$

$$3 + x = 3x^2 - x^3; \underline{x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$

1. Доказати да за сваки природан број n важи

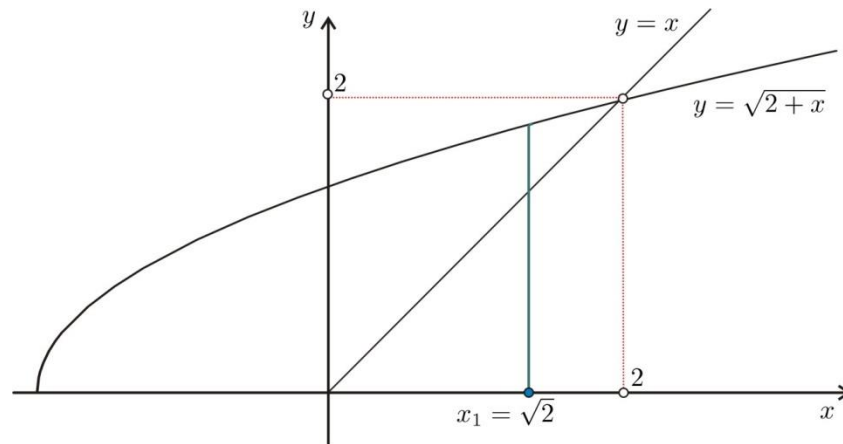
$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < 2.$$

2. Наћи, ако постоји, бар један број a такав да за сваки природан број n важи

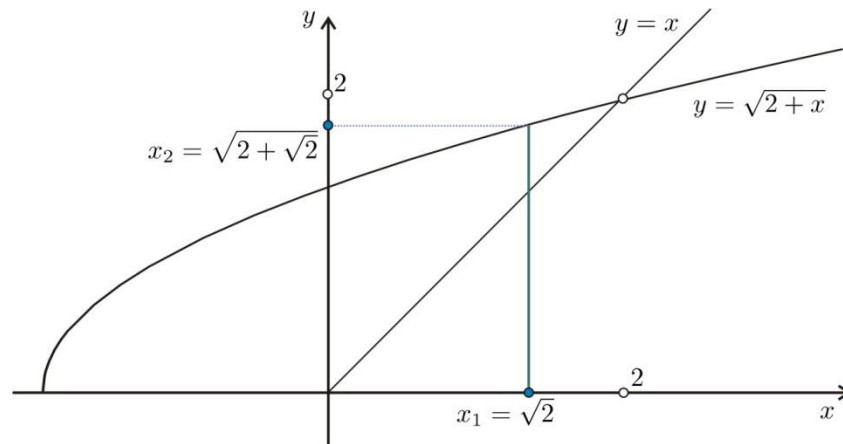
$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < a.$$



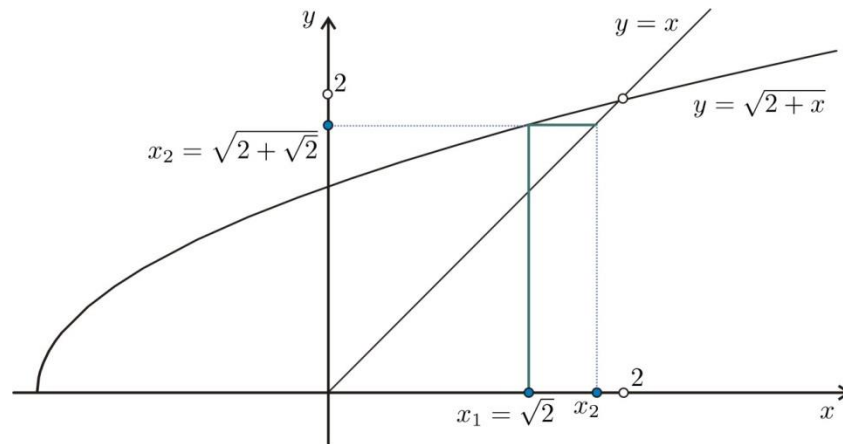
$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



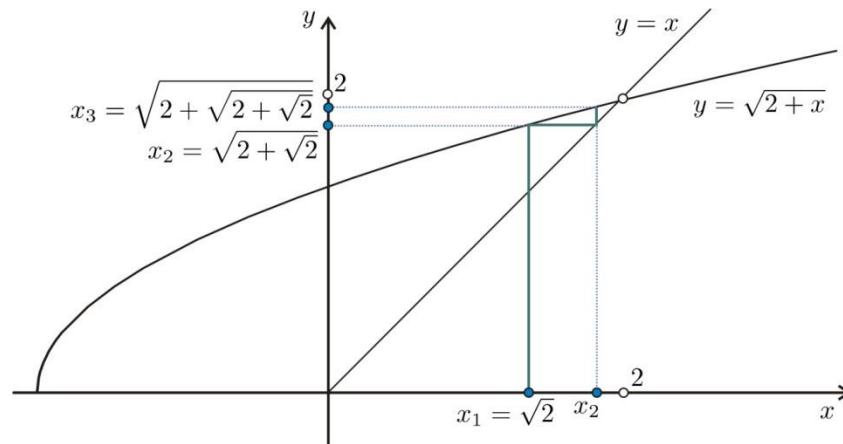
$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$

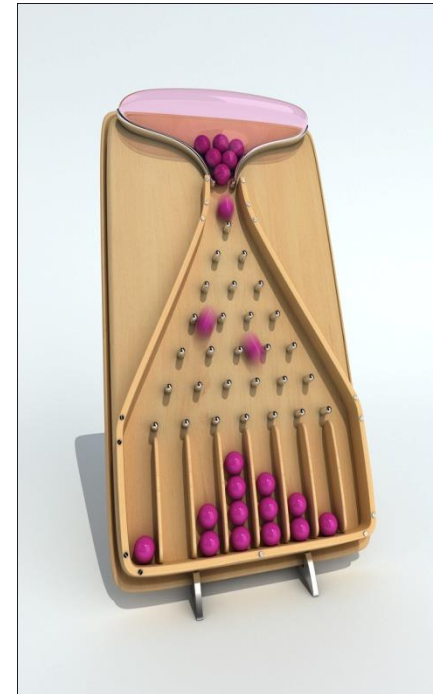
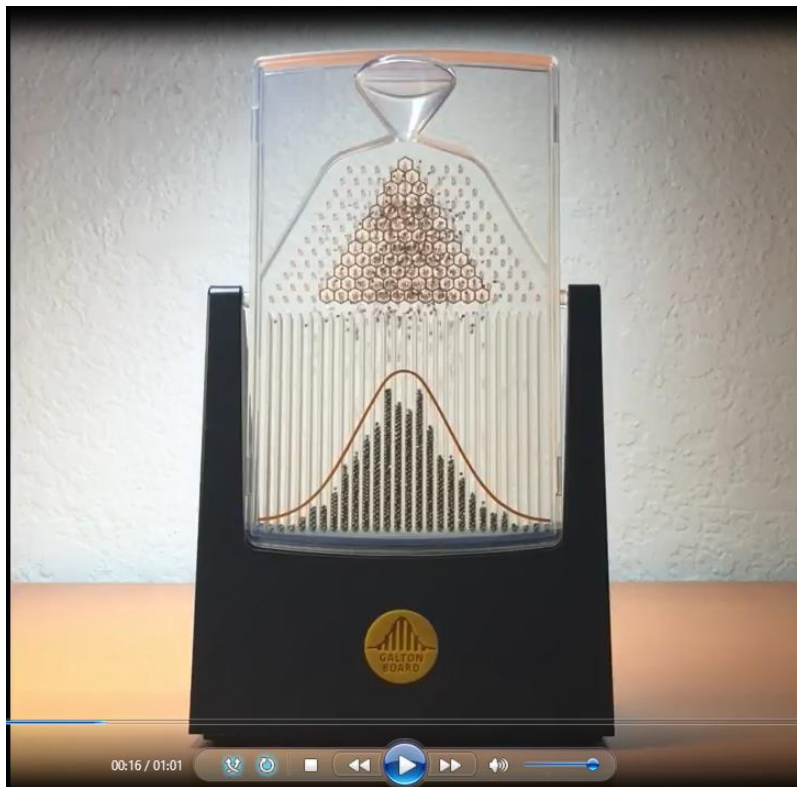


$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$

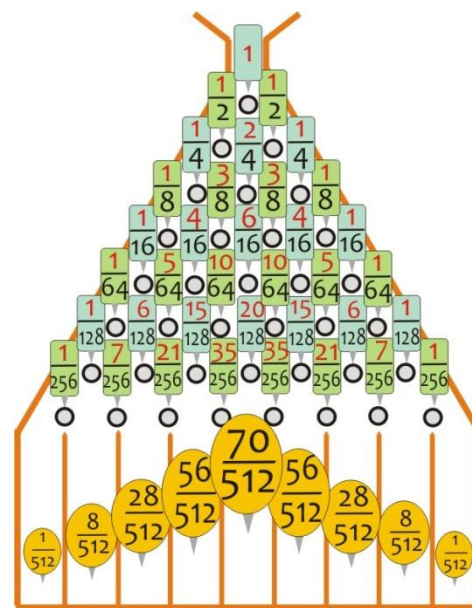
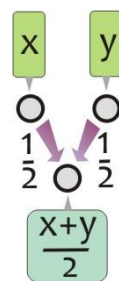
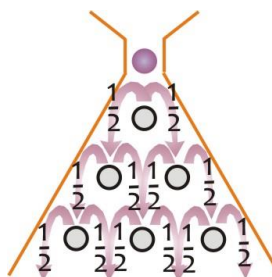
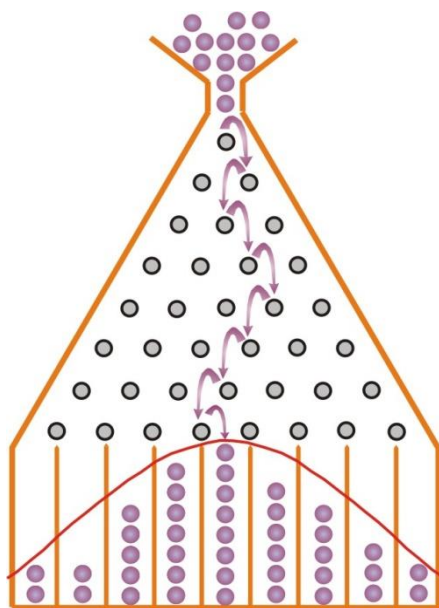


Галтонова табла

- ▶ [Galton Board.mp4](#)



Галтонова табла



Методички задаци 1 – 5

► Одобрена тема

- Методички задатак 1 -- стручни чланак
- Методички задатак 2 -- школска радионица
- Методички задатак 3 -- популарно предавање
- Методички задатак 4 -- дидактичко средство
- Методички задатак 5 -- хеуристичка збирка задатака



Методички задатак 1 -- стручни чланак

Написати стручно-прегледни чланак на задату тему.

Пример (Галтонова табла)

<https://www.galtonboard.com/articles>

(нпр. [The quincunx: history and mathematics](#))

Пример (правилан икосаедар)

https://en.wikipedia.org/wiki/Regular_icosahedron



Методички задатак 2 -- школска радионица

► Саставити припрему (сценарио) за школску радионицу, у следећем облику:

- Циљ радионице:
- Трајање радионице:
- Учесници:
- Материјал, прилози ...
- Структура радионице
 - Уводни део
 - Главни део
 - Завршни део

Пример (Галтонова даска)

[Galton u nastavi1.pdf](#)

[Galton u nastavi2.pdf](#)

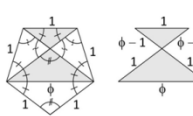
Шта? **Методичка вежба 1**



Један произвођач шећера жели дизајном кутије да привуче купце. Кутија у облику икосаедра била би веома необично модерно паковање. Одредите (приближно) ивицу кутије у облику икосаедра у коју може да стане 0,5 килограма шећера. Направите једну кутију и проверите резултат.

Помоћ

Коме? **Мат. Учионица: примери и задаци**



Задатак Златни правоугаоник јесте правоугаоник код кога је однос дужи и краће странице једнак златном броју $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618\ 033\ 988\ 7$. Пронађите три златна правоугаоника која образују темена правилног икосаедра. Какав је међусобни однос међу равнима тих златних правоугаоника?



$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$
$$\phi^2 - \phi = 1$$
$$\left(\phi - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\approx 0,618\ 033\ 988\ 7 \dots$$

Методички задатак 3 -- популарно предавање

- Припремити презентацију, са скицом пратећег предавања.

Примери

<https://www.youtube.com/watch?v=ZQEIzjCsl9o>

<https://www.youtube.com/watch?v=fHsa9DqmId8>

Коме? Методичка вежба 2

- ☐ Свестраност ренесансе
 - ☐ Дизајн спортских реквизита
 - ☐ Географске карте – права слика света
 - ☐ Нови типови просторних структура у архитектури
 - ☐ Доналд Коксетер – човек који је спасао геометрију
- 1) Позвани сте да одржите једно стручно, математичко предавање на једном од следећих скупова. Која тема највише одговара вашим општим интересовањима?
 - 2) На скупу који сте одабрали, слушаоцима треба редом приказати:
 - ☐ Диреров загонетни полиедар
 - ☐ Засечени икосаедар
 - ☐ Димаксион (Фулерова) мапа света
 - ☐ Тенсегрити икосаедар
 - ☐ Велики икосаедар
 - 3) Припремите три врсте предавања: школско, популарно и стручно

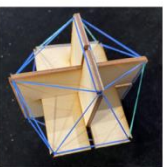
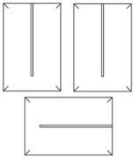
Методички задатак 4 -- дидактичко средство

- ▶ Осмислити и припремити наставно средство у вези са предложеном темом.

Примери (Галтонова дакса)

- ▶ <https://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html>
- ▶ <https://physlab.org/class-demo/galton-board/>
- ▶ <https://www.geogebra.org/search/galton>

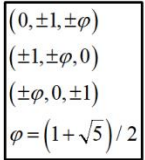
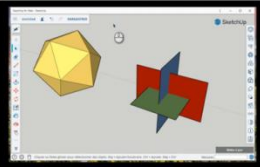
Како? Методичка вежба 3



Реални модел: Направите модел икосаедра од три златна правоугаоника.

Виртуелни модел: Израдите 3Д анимацију икосаедра користећи неки геометријски софтвер.

Апстрактни модел: Наћи координате темена икосаедра, који је на погодан начин постављен у координатни систем.



$$\begin{aligned} &(0, \pm 1, \pm \varphi) \\ &(\pm 1, \pm \varphi, 0) \\ &(\pm \varphi, 0, \pm 1) \\ &\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \end{aligned}$$

Методички задатак 5 -- хеуристичка збирка задатака

- ▶ Осмислити и припремити наставно средство у вези са предложеном темом.

Пример (Галтонова даска)

- ▶ [Galton_zadaci.pdf](#)
- ▶ <https://research.ibm.com/haifa/ponderthis/challenges/December2021.html>

Како? М Гд Учионица: примери и задаци



Рачун са ротацијама подстиче:

- ☐ просторно резоновање;
- ☐ нов поглед на алгебарске концепте.

Задатак Колико ротационих симетрија има икосаедар?

Решење

Задатак Рачун са ротационим симетрија је заснован на два операцијама:

- надовезивање (слагање) ротација;
- опозив (поништење, undo-) ротација.

а) Израчунајте: $\mathcal{R}_{ABC, 120^\circ} \mathcal{R}_{A, 72^\circ}$,
 $\mathcal{R}_{A, 72^\circ} \mathcal{R}_{ABC, 120^\circ}$, $\mathcal{R}_{ABC, 120^\circ}^{-1}$,
 $\mathcal{R}_{ABC, 120^\circ} \mathcal{R}_{A, 72^\circ} \mathcal{R}_{ABC, 120^\circ}^{-1}$

б) Решите једначине: $\mathcal{X} \mathcal{R}_{A, 72^\circ} = \mathcal{R}_{AC, 180^\circ}$,
 $\mathcal{X} \mathcal{R}_{AC, 180^\circ} \mathcal{X}^{-1} = \mathcal{R}_{BC, 180^\circ}$.

Решење

Како? М Гд Учионица: примери и задаци



Click to add text

Задатак Напишите програм који генерише листу свих матрица ротационих симетрија.

Задатак Посматрајте било који скуп ротација истог реда.

а) Показати да су сваке две ротације изабраног реда међусобно конјуговане.

б) Све ротационе симетрије се могу представити надовезивањем ротација изабраног реда.

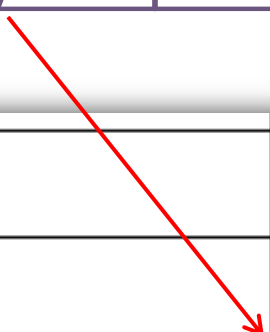
Задатак Група ротационих симетрија икосаедра је проста.

Идеја

Методички задаци 1 – 5

Предлог и опис теме

<https://www.overleaf.com/read/bkbqrkbhgpb#20a732>



2.	24.10.2024.	Предавање 2	уводног задатка опис методичких задатака
3.	31.10.2024.	Предавање 3	предаја: 1) писани одговор на уводни задатак; 2) предлог теме за методичке задатке
4.	7.11.2024.	Презентација уводног задатка	расподела тема за методичке задатке; консултације у вези са методичким задацима