

**1. задатак [20 поена]** Који од следећих исказа су тачни? Детаљно образложити избор одговора.

а) Постоји константа  $C$  таква да је  $\log x < C\sqrt{x}$  за све  $x \geq 1$ .

б) Постоји константа  $C$  таква да је  $\sum_{k=1}^n k^2 \leq Cn^2$  за све природне бројеве  $n \geq 1$ .

в) Постоји константа  $C$  таква да је  $|\sin x - x| \leq C|x^3|$  за све реалне  $x$ .

**2. задатак [20 поена]** Наћи, ако постоји, бар један реалан број  $a$  такав да је сваки природан

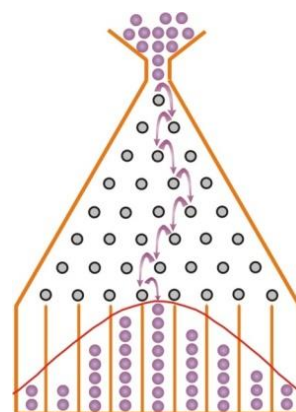
број  $n$  тачна неједнакост  $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < a$ . Детаљно образложити решење.

**3. задатак [20 поена]** На слици је приказана варијанта Галтонове табле. Са врха табле испуштају се куглице које треба да прођу кроз правилну троугаону мрежу клинова и стигну до преграда на дну табле. Путјујући кроз мрежу клинова, куглица се на сваком нивоу судара са по једним клином и скреће лево или десно са једнаком вероватноћом.

1) Таблу чине клинови распоређени у  $k$  хоризонталних редова и самим тим  $k+1$  преграда у које куглице могу да упадну. Одредити вероватноћу да куглица упадне у  $i$ -ту кутију,  $1 \leq i \leq k+1$ .

2) Што више има хоризонталних редова клинова и пуштених куглица, у преградама ће се гомилати куглице тако да формирају познату криву. О којој кривој је реч? Објаснити описану појаву?

3) Која позната математичка тврђења илуструје Галтонова табла?



**4. задатак [20 поена]** Доказати да постоји тачно пет правилних полиедара (Платонових тела).

**5. задатак [20 поена]** Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

**Задатак.** Одредити скуп свих вредности реалног параметра  $a$  за које једначина

$$2^{|x|} - 2^{-|x|} = a \cdot 2^x$$

има максималан број решења.

**Решење ученика Н.Н.**

1° Ако је  $x \geq 0$ , онда

$$2^x - 2^{-x} = a \cdot 2^x \quad / : 2^x$$

$$2^x(1-a) = 1$$

$$2x = \log_2 \frac{1}{1-a}$$

$$2x = -\log_2(1-a)$$

$$x = -\frac{1}{2} \log_2(1-a) < 0 \quad \downarrow \quad x \geq 0 \quad \text{нема решења}$$

Решење је  $\boxed{a > -1}$ .

2° Ако је  $x < 0$ , онда

$$2^{-x} - 2^x = a \cdot 2^x$$

$$2^{-x} = (1+a)2^x$$

$$-2x = \log_2(1+a)$$

$$x = -\frac{1}{2} \log_2(1+a) \quad \text{има решења ако је} \quad \begin{matrix} a+1 > 0 \\ a > -1 \end{matrix}$$