

- 1.[20] Једна модна компанија решила је да лансира нову колекцију накита. У питању су ланчићи кружног облика на којима се на 6 подједнако размакнутих места налази драго камење (тако да образује темена правилног шестоугла). При томе од драгог камења на располагању имају сафире, дијаманте, рубине и смарагде, а за два ланчића се сматра да су исти ако се један од другог може добити ротацијом. Одредити колико уникатних комада накита компанија може да произведе.
2. Нека је G група реда 255.
- а)[10] Доказати да G има нормалне подгрупе реда 3 или реда 5.
- б)[10] Доказати да G има цикличну подгрупу реда 15 и нормалну подгрупу реда 17.
3. Посматрајмо скуп матрица $P = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.
- а)[10] Доказати да је P комутативни прстен са јединицом у односу на операције сабирања и множења матрица.
- б)[10] Доказати да је P изоморфан прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу на операције сабирања и множења реалних бројева.
- 4.[20] Одредити све елементе $a \in \mathbb{Z}_5$ такве да количнички прстен $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^3 + X + a \rangle$ буде поље. Колико елемената имају овако настала поља?
- 5.[20] Доказати да је број $\alpha = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити $\frac{1}{\alpha+2}$ у добијеној бази.

1. Посматрајмо групу $G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ у односу на операцију множења матрица.

а)[8] Показати да је са

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

дефинисано дејство групе G на скуп $\mathbb{R}^2$.

б)[12] Испитати да ли се елементи $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ налазе у орбити за $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ при овом дејству. Одредити

стабилизатор за $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ при овом дејству.

2. Нека је G група реда 105.

а)[8] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 5 или реда 7.

б)[5] Доказати да G има подгрупу индекса 5 или индекса 7.

в)[7] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 35. Да ли је она циклична?

3. Означимо са $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ пресликавање које целом броју додељује његов остатак при дељењу са 2 и посматрајмо прстен $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу на сабирање и множење реалних бројева.

а)[7] Доказати да је пресликавање $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{10}] \rightarrow \mathbb{Z}_2$ дефинисано са

$$\varphi(a + b\sqrt{10}) = f(a), \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

хомоморфизам прстена.

б)[13] Доказати да је подскуп $I = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 2 \mid a\}$ идеал прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Да ли је идеал I прост, односно максималан?

4.[20] Одредити НЗД($16 + 7i, 10 - 5i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

5.[20] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 8X^2 + 15 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$, наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$, као и број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

1. а)[8] Показати да је са

$$n \cdot (x, \pi) = (n +_{10} x, \rho^n \pi), \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_{10}, \pi \in \mathbb{D}_{12}$$

дефинисано једно дејство групе $\mathbb{Z}$ на скуп $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{D}_{12}$.

- б)[12] Испитати који се од елемената $(2, \rho^4)$ и $(8, \sigma)$ налазе у орбити за $(3, \rho^3)$ при овом дејству. Одредити стабилизатор за $(1, \sigma\rho)$ при овом дејству.

2. Нека је G група реда 595.

- а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 7 или реда 17.

- б)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 35 или реда 85. Да ли је нека од њих циклична?

3. Посматрајмо скуп

$$R = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \text{НЗД}(a, b) = 1 \text{ и } b \text{ непаран} \right\}.$$

- а)[10] Доказати да је R комутативни прстен са јединицом у односу на операције сабирања и множења рационалних бројева.

- б)[10] Испитати да ли је R домен, односно поље.

- 4.[20] Доказати да је количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle X^3 + 2X + 2 \rangle$ поље и одредити број његових елемената. Затим одредити мултипликативни инверз за $X^2 + 1 + \langle X^3 + 2X + 2 \rangle$ у том пољу.

- 5.[20] Доказати да је број $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити елемент $\frac{1}{\alpha+1}$ у добијеној бази.

1.[20] Сваки од учесника једног фестивала добија као идентификацију наруквицу у облику правилног осмоугла на чијем је сваком темену исписан један од бројева из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. При томе, ротацијом било које наруквице се не може добити комбинација бројева која се налази на некој другој наруквици. Одредити да ли фестивал може да прими 50.000 посетилаца, под условом да свако добије различиту наруквицу.

2. Нека је G група реда $2555 = 5 \cdot 7 \cdot 73$.

а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 5 или реда 7.

б)[10] Доказати да G има подгрупу реда 511. Да ли је она нормална и да ли је циклична?

3.а)[10] Посматрајмо комутативни потпрстен $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ прстена $M_2(\mathbb{R})$. Доказати да K није ни поље ни домен.

б)[10] Доказати да је пресликавање $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow K$ дефинисано са

$$\varphi(p) = \begin{bmatrix} p(1) & 0 \\ p(1) - p(-1) & p(-1) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}[X]$$

епиморфизам прстена $\mathbb{R}[X]$ на прстен K и одредити $\ker \varphi$.

4.[20] Одредити НЗД($11 + 3i, 1 + 8i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

5.[20] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 14X^2 + 33$ над $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$, наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$, као и број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

1.a)[8] Показати да је са

$$a \cdot z = e^{ia} z, \quad a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$$

дефинисано дејство адитивне групе $(\mathbb{R}, +)$ на скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$.

б)[12] Одредити орбиту и стабилизатор за $1+i \in \mathbb{C}$, као и фиксни скуп за $\pi \in \mathbb{R}$ при овом дејству.

2. Нека је G група реда 616.

а)[10] Доказати да G није проста.

б)[10] Доказати да G има подгрупу реда 77. Да ли је она циклична?

3. Посматрајмо скуп свих матрица $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

а)[8] Доказати да је M комутативни прстен са јединицом у односу на операције сабирања и множења матрица.

б)[12] Показати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ идеал прстена M . Да ли је тај идеал прост, односно максималан?

4.[20] Одредити НЗД($14 - 2i, 10 + 9i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

5.[20] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - X^2 - 30 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$, наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$, као и број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

1.а)[8] Показати да је са

$$(n, \pi) \cdot \tau = \rho^{-n} \tau \pi^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_{10}, \pi, \tau \in \mathbb{D}_{10}$$

дефинисано једно дејство групе $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{D}_{10}$ на скуп $\mathbb{D}_{10}$.

б)[12] Одредити стабилизатор за $\rho\sigma$ и фиксни скуп за $(6, \sigma\rho^3)$ при том дејству.

2. Нека је G група реда 2009.

а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 287. Да ли је она циклична?

б)[10] Доказати да је G Абелова група.

3. Нека је $(R, +, \cdot)$ комутативни прстен са јединицом. На скупу R дефинишемо бинарне операције $\oplus$ и $\odot$ са:

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \odot b = a \cdot b + a + b, \quad a, b \in R.$$

а)[14] Доказати да је $(R, \oplus, \odot)$ комутативни прстен са јединицом.

б)[6] Ако је $(R, +, \cdot)$ поље, доказати да је онда и $(R, \oplus, \odot)$ поље.

4.[20] Одредити све елементе $a \in \mathbb{Z}_3$ такве да количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle 2X^3 + aX^2 + X + 2 \rangle$ буде поље. Колико елемената имају овако настала поља?

5.[20] Доказати да је елемент $\alpha = \sqrt{5 + 3\sqrt{3}}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Наћи степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити $\frac{1}{\alpha-3}$ у добијеној бази.

1.[20] У држави Х. на таблици сваког возила стоји регистрацијски број који се састоји од произвољних 6 цифара из скупа $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. При томе се за два регистрацијска броја сматра да су исти ако се један од другог може добити неком ротацијом цифара (у десну страну). Одредити колико је возила могуће регистровати у држави Х. под условом да свако има различит регистрацијски број.

2. Нека је G група реда 546.

а)[10] Показати да G има нормалну подгрупу реда 7 или реда 13.

б)[10] Показати да G има нормалну подгрупу реда 91. Да ли је она циклична?

3. Посматрајмо комутативни потпрстен $K = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ 3n & m \end{bmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ прстена $M_2(\mathbb{Z})$.

а)[6] Доказати да је $I = \left\{ \begin{bmatrix} 3a & b \\ 3b & 3a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ идеал прстена K .

б)[7] Нека је f пресликавање које целом броју додељује његов остатак при дељењу са 3. Показати да је пресликавање $\varphi : K \rightarrow \mathbb{Z}_3$, дефинисано са

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} m & n \\ 3n & m \end{bmatrix} \right) = f(m), \quad \begin{bmatrix} m & n \\ 3n & m \end{bmatrix} \in K$$

епиморфизам прстена.

в)[7] Испитати да ли је идеал I прост/максималан.

4.[20] Одредити НЗД($21 + 2i, 15 - 4i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

5.[20] Нека је K коренско поље полинома $f(X) = X^4 - 4X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$, наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$, као и број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

1. Нека је G подгрупа од S_8 генерисана пермутацијама $[3, 8, 4][2, 6]$ и $[5, 7]$ и $X = \{1, 2, \dots, 8\}$.
- а)[8] Доказати да је са $\pi \cdot (x, y) = (\pi(x), \pi(y))$ дефинисано дејство групе G на скуп $X \times X$.
- б)[12] Одредити орбите и стабилизаторе за елементе $(1, 3)$ и $(2, 5)$ при овом дејству.
2. Нека је G група реда $9045 = 3^3 \cdot 5 \cdot 67$.
- а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 5 или реда 67.
- б)[10] Доказати да G има подгрупу реда 335. Да ли је она циклична?
3. Означимо са $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ пресликавање које целом броју додељује његов остатак при дељењу са 6 и посматрајмо прстен $\mathbb{Z}[\sqrt{30}] = \{a + b\sqrt{30} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу на сабирање и множење реалних бројева.
- а)[8] Доказати да је пресликавање $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{30}] \rightarrow \mathbb{Z}_6$ дефинисано са

$$\varphi(a + b\sqrt{30}) = f(a), \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

хомоморфизам прстена.

- б)[12] Доказати да је подскуп $I = \{a + b\sqrt{30} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 6 \mid a\}$ идеал прстена $\mathbb{Z}[\sqrt{30}]$. Да ли је тај идеал прост, односно максималан?
- 4.[20] Одредити НЗД($15 + 6i, 11 - 8i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.
- 5.[20] Доказати да је елемент $\alpha = \sqrt{7 + \sqrt{3}}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Наћи степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити $\frac{1}{\alpha-3}$ у добијеној бази.

- 1.[20] Одредити на колико начина се могу обојити темена правилног осмоугла са 5 боја ако су два бојења иста када се једног од другог може добити ротацијом осмоугла.
2. Нека је G група реда 495.
 - а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 5 или реда 11.
 - б)[10] Доказати да G има подгрупу реда 55. Да ли она мора бити циклична?
3. Посматрајмо скуп матрица $R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 2y & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.
 - а)[10] Доказати да је R комутативни прстен са јединицом у односу са операције сабирања и множења матрица.
 - б)[10] Доказати да је R изоморфан прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ у односу на операције сабирања и множења реалних бројева.
- 4.[20] Показати да је количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle X^3 + 2X^2 + X + 1 \rangle$ поље и одредити број његових елемената. Затим одредити мултипликативни инверз за $X^2 + 2 + \langle X^3 + 2X^2 + X + 1 \rangle$ у том пољу.
- 5.[20] Доказати да је елемент $\alpha = \sqrt{6 - 3\sqrt{2}}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Наћи степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити $\frac{1}{\alpha+2}$ у добијеној бази.

1.а)[10] Показати да је са

$$a \cdot (u_1, u_2, u_3) = (u_1, au_1 + u_2, a^2u_1 + 2au_2 + u_3), \quad a \in \mathbb{Z}, (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

дефинисано једно дејство групе $(\mathbb{Z}, +)$ на скуп $\mathbb{R}^3$.

б)[10] Одредити орбите за $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 3)$ при овом дејству.

2. Нека је G група реда 2552.

а)[10] Доказати да G има нормалну подгрупу реда 11 или реда 29.

б)[10] Доказати да G има подгрупу реда $11 \cdot 29$. Да ли она мора бити циклична?

3. Посматрајмо скуп

$$S = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \text{НЗД}(a, b) = 1, 5 \nmid b \right\}.$$

а)[10] Доказати да је S комутативни прстен са јединицом у односу на операције сабирања и множења рационалних бројева.

б)[10] Испитати да ли је S домен, односно поље.

4.[20] Одредити НЗД($11 - 14i, 19 + 7i$) у прстену Гаусових целих $\mathbb{Z}[i]$.

5.[20] Нека је K коренско поље полинома $X^4 + 2X^2 - 15 \in \mathbb{Q}[X]$ над пољем $\mathbb{Q}$. Одредити степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$, наћи једну базу за K над $\mathbb{Q}$, као и број $\alpha \in \mathbb{C}$ такав да је $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

- 1.[20] Испитати на колико начина се могу обојити темена правилног седмоугла са 6 боја, ако су два бојења иста када се једно од другог може добити ротацијом седмоугла.
2. Нека је G група реда $20449 = 11^2 \cdot 13^2$.
 - а)[15] Доказати да је G комутативна група.
 - б)[5] Колико има, до на изоморфизам, различитих могућности за G ?
- 3.а)[8] Показати да је скуп матрица $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ један комутативан прстен са јединицом у односу на уобичајене операције сабирања и множења матрица.
- б)[5] Испитати да ли је $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -3b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ један потпрстен од R .
- в)[7] Испитати да ли је R домен/поље.
- 4.[20] Одредити све елементе $a \in \mathbb{Z}_3$ такве да количнички прстен $\mathbb{Z}_3[X]/\langle X^3 + 2aX^2 + X + a \rangle$ буде поље. Колико елемената имају овако настала поља?
- 5.[20] Доказати да је елемент $\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}$ алгебарски над пољем $\mathbb{Q}$. Наћи степен раширења и једну базу за поље $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ над $\mathbb{Q}$, а затим изразити $\frac{1}{\alpha+1}$ у добијеној бази.