

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ област, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$

Def $W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k \right\} \rightarrow$ простор Соболева

$\hookrightarrow$ де изводе интерпретирамо
у смислу густотифицира

нпр. $W^{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', f'' \in L^3(\mathbb{R}) \right\}$

• $W^{k,p}$ је банахов, ња норму се може узети: $\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$

Def $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k \right\}$

нпр. $H^1((0,1)) = \left\{ f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2(0,1), f' \in L^2(0,1) \right\}$

• H^k је Хилбертов простор, ња скаларни производ се може узети: $\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2}$

④ Нека је $1 \leq p < \infty$ и нека је $X_p([a,b]) = \left\{ f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in AC[a,b] \text{ и } f' \in L^p[a,b] \right\}$
 $\uparrow$
 класичан извод
 Докажи да је $X_p = W^{1,p}([a,b])$.

Користимо обично следећи резултат: Нека је $f \in L^1(a,b)$. Важи да $f' \in L^1(a,b) \Leftrightarrow f \in AC[a,b]$

(*)

$\hookrightarrow$ извод у $D'(a,b)$

И примети важи да се класичан извод f' поклапа са
изводом f' у смислу густотифицира

Напомена: $AC(a,b) = AC[a,b]$, $L^p(a,b) = L^p[a,b]$

$X_p \subset W^{1,p}$ $f \in X_p \Rightarrow f \in AC[a,b] \Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow f \in L^2([a,b])$, и

$\Rightarrow f \in L^1([a,b])$
 $\stackrel{2=1}{\Rightarrow}$

$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} f' \in L^1([a,b])$ и

$f' = f' \rightarrow$ у D'
 $\downarrow$
 класичан

$f \in X_p \Rightarrow f' \in L^p([a,b]) \Rightarrow f' \in L^p([a,b])$
 $\downarrow$
 класичан
 $\downarrow$
 у D'

... 1, p

$\downarrow$
 непрерывно

$q=p: f \in L^p([a,b]) \rightarrow f \in W^{1,p}$

$W^{1,p} \subseteq X_p: f \in W^{1,p}[a,b] \Rightarrow f \in L^p(a,b) \text{ и } f' \in L^p(a,b)$

$f \in L^p(a,b) \stackrel{?}{\Rightarrow} f \in L^1(a,b)$

$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f| dx = \int_a^b |f| \cdot 1 dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b 1^q dx \right)^{1/q} = \|f\|_{L^p} \cdot (b-a)^{1-1/p} < \infty \Rightarrow f \in L^1(a,b)$

Херсф. $f \in L^p(a,b)$
 $g \in L^q(a,b) \Rightarrow \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 $1 < p, q < +\infty$

$f, f' \in L^p(a,b) \Rightarrow f, f' \in L^1(a,b) \stackrel{*)}{\Rightarrow} f \in AC[a,b] \Rightarrow \exists f' \text{ непрерывно и } f' \in L^p(a,b)$
 $\Rightarrow f \in X_p$

⑤ $u: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$. Определить наибольшее $k \in \mathbb{N}_0$ таж.

а) $u \in C^k(-1,1)$

б) $u \in H^k(-1,1)$

а) $u'(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x| \in C(-1,1) \Rightarrow u \in C^1(-1,1)$

$u'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h) - u(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sgn}(h) \cdot \frac{h^2}{2}}{h} = 0$

$\Rightarrow [k=1]$

$|x|$ не диф. $\Rightarrow |x| \notin C^1(-1,1) \Rightarrow u \notin C^2(-1,1)$

б) $f \in C(a,b) \Rightarrow f \in L^2(a,b)$

$u'(x) = |x| \Rightarrow u' \in L^2(-1,1)$
 $u''(x) = \text{sgn } x$
 $\text{sgn } x \in L^2(-1,1)$

$\|\text{sgn } x\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^1 |\text{sgn } x|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} \Rightarrow u'' \in L^2(-1,1)$

$u''(x) = \operatorname{sgn} x$
 $u'''(x) = 2\delta \notin L^2(-1,1)$

$\Rightarrow \boxed{K=2}$

6) Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $u \in W^{1,p}(0,1)$. Докажем $|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p}$
 на отрезке $[0,1]$

$u, u' \in L^p(0,1)$

из того что известно нас. $u \in AC[0,1]$ и $u' \in L^1(0,1) \xrightarrow{T}$ хотим использовать формулу

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t) dt$$

для $y \geq x$ $|u(y) - u(x)| = \left| u(0) + \int_0^y u'(t) dt - \left(u(0) + \int_0^x u'(t) dt \right) \right| = \left| \int_x^y u'(t) dt \right| \leq \int_x^y |u'(t)| dt$

1° $p=1$ $|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y \underbrace{|u'(t)|}_{\geq 0} dt \leq \int_0^1 |u'(t)| dt \quad \checkmark$

2° $p > 1 \rightarrow$ Хендер

$|u(y) - u(x)| \leq \int_x^y |u'(t)| \cdot 1 dt \leq \left(\int_x^y \underbrace{|u'(t)|^p}_{u' \in L^p} dt \right)^{1/p} \cdot \left(\int_x^y 1^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |u'(t)|^p dt \right)^{1/p} \cdot (y-x)^{1-\frac{1}{p}}$
 $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{p}$

7) $\Omega = (0,1)^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x}$. Утверждается, что f принадлежит $W^{0,2}(\Omega)$, $W^{1,1}(\Omega)$, $W^{1,2}(\Omega)$.
 $f \in L^2$ $f, f'_x, f'_y \in L^1$ $f, f'_x, f'_y \in L^2$

$f \in L^2?$ $\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} x dx dy \right)^{1/2} =$
 $= \left(\int_0^1 dy \int_0^1 x dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < +\infty \Rightarrow f \in L^2(\Omega) \Rightarrow f \in W^{0,2}(\Omega)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (уверен, что $D^1(\Omega)$ не имеет)

$$f_y^1 \in L^1(\Omega), f_y^1 \in L^2(\Omega)$$

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x,y)| dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{x} dx = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < +\infty \Rightarrow f \in L^1(\Omega)$$

$$\|f_x^1\|_{L^1} = \int_{\Omega} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1 = 1 < +\infty \Rightarrow f_x^1 \in L^1(\Omega) \Rightarrow f \in W^{1,1}(\Omega)$$

$$\|f_x^1\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} |f_x^1(x,y)|^2 dx dy = \int_{\Omega} \frac{1}{4x} dx dy = +\infty \Rightarrow f_x^1 \notin L^2(\Omega) \Rightarrow f \notin W^{1,2}(\Omega)$$

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

8) Дана p $1 \leq p < +\infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ и $u(x) = |x|^\alpha, x \in \mathbb{R}$ определить для каких значений α и p $u \in W^{1,p}(-1,1)$.

$$u \in W^{1,p}(-1,1) \Leftrightarrow u \in L^p(-1,1) \text{ и } u' \in L^p(-1,1)$$

$$u \in D^1(-1,1) \Leftrightarrow \int_0^1 |x|^\alpha dx < +\infty \Leftrightarrow -\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$$

$$u \in L^p(-1,1) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (|x|^\alpha)^p dx < +\infty \Leftrightarrow \int_0^1 |x|^{\alpha p} dx < +\infty \Leftrightarrow -p\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{p}. \quad \left(-\frac{1}{p} > -1\right)$$

За $\alpha > -1$ имеем $u' \in D^1(-1,1)$

$$\begin{aligned} \alpha > 0: \quad u(x) &= |x|^\alpha \\ \varphi &\in D(-1,1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= -\langle u, \varphi' \rangle = - \int_{-1}^1 |x|^\alpha \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 (-x)^\alpha \varphi'(x) dx - \int_0^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^1 x^\alpha \varphi'(-x) dx - \int_0^1 x^\alpha \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^1 x^\alpha (\varphi'(x) + \varphi'(-x)) dx = - x^\alpha (\varphi(x) - \varphi(-x)) \Big|_0^1 + \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx = \\ &= \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx = \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(-x) dx = \\ &= \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) dx - \int_{-1}^0 \alpha (-x)^{\alpha-1} \varphi(x) dx = \end{aligned}$$

$x^\alpha|_{x=0} = 0$
 $(\varphi(x) - \varphi(-x))|_{x=1} = 0$
 okay $\int$ конб
 при $\alpha-1 > -1$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \alpha |x|^{\alpha-1} \varphi(x) dx + \int_{-1}^0 \alpha |x|^{\alpha-1} \varphi(x) \operatorname{sgn} x dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \boxed{\alpha |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn}(x)} \varphi(x) dx \quad \Rightarrow \quad u' = \alpha |x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn}(x)
 \end{aligned}$$

$$u' \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 (|x|^{\alpha-1})^p dx < +\infty \Leftrightarrow -p(\alpha-1) < 1 \Leftrightarrow \alpha-1 > -\frac{1}{p} \Leftrightarrow \alpha > 1 - \frac{1}{p}$$

$$\alpha = 0: u(x) = 1, u'(x) = 0 \Rightarrow p \geq 1 \text{ упрощается}$$

$-1 < \alpha < 0$: посмотрим также как и у функции $\alpha > 0$, можно предположить, что упрощается

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \text{ также конв?} \\
 &\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = +\infty, \text{ где } -(\alpha-1) = 1-\alpha \in (1,2)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \alpha x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx = \int_0^1 \alpha \cdot x^{\alpha} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 \varphi \in C^\infty(-1,1) \Rightarrow \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} &= \frac{\varphi(0) + x\varphi'(0) + o(x) - (\varphi(0) - x\varphi'(0) + o(x))}{x} = \frac{2x\varphi'(0) + o(x)}{x} = \\
 &= 2\varphi'(0) + o(1) \rightarrow 2\varphi'(0), x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\text{где } x \rightarrow 0: \alpha x^{\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(-x)) \sim 2\alpha\varphi'(0) \cdot x^{\alpha} \Rightarrow \text{конвертируется}$$

$$\Rightarrow \text{и все равно } u' = \alpha |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$u' \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 |x|^{(\alpha-1)p} dx < +\infty \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} &\alpha > 1 - \frac{1}{p} \\ &-1 < \alpha < 0 \end{aligned} \right\} 1 - \frac{1}{p} < \alpha < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{p} \Leftrightarrow p < 1 \quad \nabla$$

$$\text{Вывод: } \alpha = 0 \vee \alpha > 1 - \frac{1}{p}.$$

$$\textcircled{9} \text{ Если же } u \in W^{1,1}(0,1) \text{ то } \int_0^1 u(x) dx = 0. \text{ Докажем } \|u\|_1 \leq \|u'\|_1.$$

$$u, u' \in L^1(0,1) \Rightarrow u \in AC(0,1) \Rightarrow \text{всему } t \wedge \int_x^t u'(s) ds = u(t) - u(x)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \int_0^1 |u(t)| dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 \int_0^t u'(s) ds dx \right| dt \leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t |u'(s)| ds dx dt \leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |u'(s)| ds dx dt = \\ &= \underbrace{\int_0^1 dx}_{1} \cdot \underbrace{\int_0^1 dt}_{1} \cdot \int_0^1 |u'(s)| ds = \|u'\|_1. \end{aligned}$$

Katun najbliziej $k \in \mathbb{N}_0$ $\overline{w}_f$

2) $y \in C^k(-2, 2)$
5) $y \in H^k(-2, 2)$

ошибка решения: $y(t) = c_2 e^t - c_1 + \begin{cases} -e^t, & t \leq 0 \\ -(t+i), & t > 0 \end{cases}$, $y'(t) = c_2 e^t + \begin{cases} -e^t, & t \leq 0 \\ -1, & t > 0 \end{cases}$

$$c_2 = 1, c_1 = -1$$

$$y(t) = \begin{cases} -1, & t \leq 0 \\ e^{t-2}, & t > 0 \end{cases} \quad y'(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{t-1}, & t > 0 \end{cases} \quad y''(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^t, & t > 0 \end{cases} \quad y'''(t) = \delta^+ \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^t, & t > 0 \end{cases}$$

2) $K=1$ 6) $K=2$