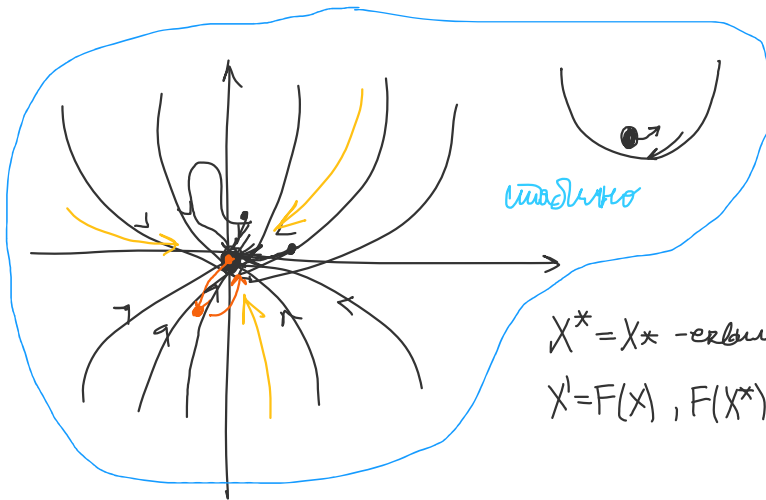
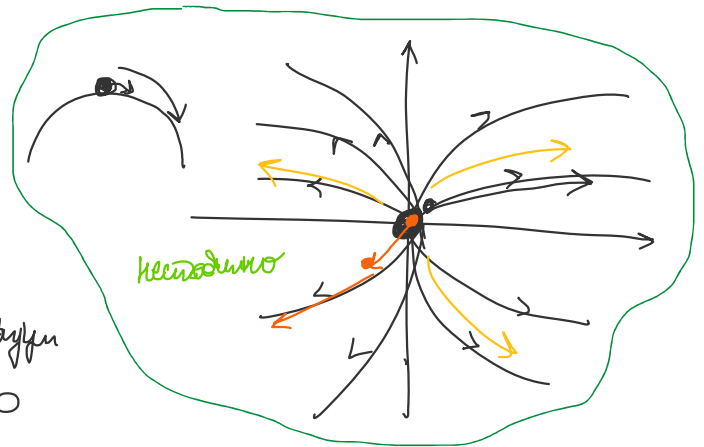




стабилно

$$X^* = X^* \text{ - еквилибријум}$$

$$X' = F(X), F(X^*) = 0$$



нестабилно

Def Еквилибријум X^* је:

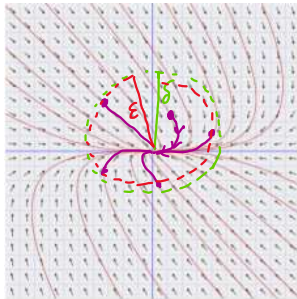
- 1) стабилан, ако $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X(t) \text{ решење}, X(t_0) = X_0) \|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \epsilon, \forall t \geq T$
- 2) нестабилан, ако није стабилан
- 3) асимптотички стабилан, ако је стабилан и $(\exists \delta > 0) \|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$.

1. Скицати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

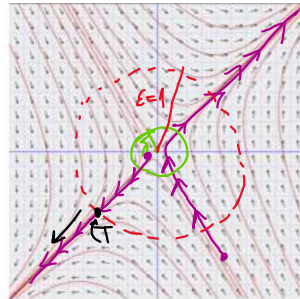
a) $x'_1 = -x_1 + 2x_2$
 $x'_2 = -3x_2$

б) $x'_1 = -x_1 + 3x_2$
 $x'_2 = 5x_1 - 3x_2$

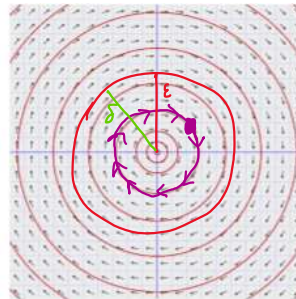
в) $x'_1 = x_2$
 $x'_2 = -x_1$



стабилан чвор



седло



центар

2) ϵ -глас

$$\delta = \epsilon$$

$$X_0 \in B(0,0;\delta) \Rightarrow X(t) \in B(0,0;\epsilon), \forall t \geq t_0 \checkmark$$

стабилан, да ли је асимптотички? $\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*$
 (AC)

б) нестабилан $\Leftrightarrow \neg$ стабилан

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists X(t) \text{ решење}, X(t_0) = X_0) \|X_0 - X^*\| < \delta \wedge \|X(t) - X^*\| \geq \epsilon, \text{ за неко } t \geq T$$

b) неустойчив $\Leftrightarrow \neg$ устойчив

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x(t) \text{ решение, } x(t_0) = x_0) \|x_0 - x^*\| < \delta \wedge \|x(t) - x^*\| \geq \varepsilon, \text{ за некое } t \geq T$

$$\varepsilon = 1 \quad \|x(t_0)\| < \delta \text{ (некая малость)}$$

неустойчив

$$\exists T > 0, \forall t \geq T, \|x(t)\| \geq 1$$

б) $\delta = \varepsilon$

$$\|x(t)\| = \|x_0\|, \forall t$$

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \checkmark$$

$\Rightarrow$ устойчив

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_0\| < \delta \checkmark$$

га ли је AC? нук!

ме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \|(0,0)\| = 0$$

$$\Rightarrow \|x_0\| = 0 \Rightarrow x_0 = (0,0) \checkmark$$

знаете: доказати и обратное (принимать решение)

□ (Правда T наймала, нештог ете бр.)

$$x' = F(x), A = dF(x^*)$$

1) Убока ете бр λ од A има $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow x^*$ асимптотски етадан

2) Ако $\exists \lambda$ ете бр од A таг $\operatorname{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow x^*$ неустойчив

$$x' = F(x) \rightsquigarrow x' = Ax, A = dF(x^*)$$

$$F = (F_1, \dots, F_n)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$dF(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

A је матрица линеаризације, а $x' = Ax$ је линеаризована система у тачки x^*

$$F(x) \approx F(x^*) + \underbrace{dF(x^*)}_A \cdot (x - x^*) + \dots$$

$$x' = F(x) \rightsquigarrow x' \approx A(x - x^*), \text{ где стави } y = x - x^* \Rightarrow y' = Ay \text{ линеаризација}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Лапунова о сопственим вредностима.

$$x' = Ax = F(x)$$

$$X' = AX = F(X)$$

$$F(X) = A \cdot X \Rightarrow dF(X) = A \Rightarrow dF(X^*) = A$$

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3, \operatorname{Re}(\lambda_1) = -1 < 0, \operatorname{Re}(\lambda_2) = -3 < 0 \Rightarrow X^* \text{ је AC}$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6, \operatorname{Re}(\lambda_1) = 2 > 0, \operatorname{Re}(\lambda_2) = -6 < 0 \Rightarrow X^* \text{ је нестабилан}$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{1/2} = \pm i, \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) = 0 \Rightarrow \text{на } T \text{ не можемо сабифицирати}$$

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{x_1} - e^{-3x_3} \\ x_2' &= 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) \\ x_3' &= \ln(1 - 3x_1 + x_3), \end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0, 0)$.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(\underbrace{e^{x_1} - e^{-3x_3}}_{F_1}, \underbrace{4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2)}_{F_2}, \underbrace{\ln(1 - 3x_1 + x_3)}_{F_3} \right)$$

$$F = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F_3 = 0$$

$$\begin{aligned} e^{x_1} - e^{-3x_3} &= 0 \rightsquigarrow e^{x_1} = e^{-3x_3} \rightsquigarrow x_1 = -3x_3 \\ 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) &= 0 \\ \ln(1 - 3x_1 + x_3) &= 0 \rightsquigarrow 1 - 3x_1 + x_3 = 1 \rightsquigarrow x_3 = 3x_1 = 3 \cdot (-3x_3) = -9x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \\ &\quad x_1 = 0 \\ 4 \cdot 0 - 3\sin(0 + x_2) &= 0 \rightarrow \sin(x_2) = 0 \rightsquigarrow x_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$X^* \in \{(0, k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$X^* = (0, 0, 0)$$

$$A = dF(X^*)$$

$$dF(X) = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3} \\ -3\cos(x_1 + x_2) & -3\cos(x_1 + x_2) & 4 \\ -3 & 0 & \frac{1}{1 - 3x_1 + x_3} \end{bmatrix}$$

$$A = dF(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -3, \lambda_{2/3} = 1 \pm 3i$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_1) &= -3 < 0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_{2/3}) &= 1 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X^* \text{ је нестабилан}$$

□ Јека је X^* еквилибријум система $X' = F(X)$ у некој околини $U \ni X^*$ постоји ф-ја $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ так

$$1) V \in C^1(U)$$

$$2) V(x^*) = 0 \text{ и } V(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{x^*\} \text{ (локально определена)}$$

3) Вали жрџа од енерџиџа сисџема:

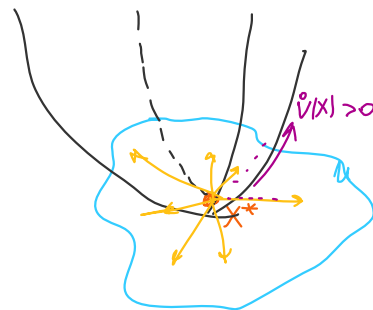
$$- \dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U \setminus \{x^*\} \Rightarrow x^* \text{ стабилан}$$

$$- \dot{V}(x) < 0, \forall x \in U \setminus \{x^*\} \Rightarrow x^* \text{ АС}$$

$$- \dot{V}(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{x^*\} \Rightarrow x^* \text{ нестабилан}$$

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = \nabla V(x) \circ F(x) \rightarrow \text{избор } V \text{ дуж иницијалне}$$

V-функција Лапунџа



$$\text{Често: } V(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \\ a_1, \dots, a_n > 0$$

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$x'_1 = (x_3 + 1)(2x_2 - x_1)$$

$$x'_2 = -(x_3 + 1)(x_1 + x_2)$$

$$x'_3 = -x_3^3$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\begin{cases} (x_3+1)(2x_2-x_1)=0 \\ -(x_3+1)(x_1+x_2)=0 \\ -x_3^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2-x_1=0 \\ -x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2=0$$

$$\frac{-x_3^3=0}{\downarrow} \Rightarrow x_3=0$$

$$x^* = (0, 0, 0)$$

Замети: неможемо са џв.бр не одређуемо одговор

$$V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2, \quad a, b, c > 0$$

$$1) V \in C^1(\mathbb{R}^3) \quad \checkmark$$

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3)$$

$$2) V(0, 0, 0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x \neq x^*$$

$$3) \dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), F(x) \rangle = 2ax_1(x_3+1)(2x_2-x_1) + 2bx_2(x_3+1)(-x_1-x_2) + 2cx_3(-x_3^3) =$$

$$= (x_3+1) \left(\underbrace{4ax_1x_2}_{>0} - \underbrace{2ax_1^2}_{\leq 0} - \underbrace{2bx_1x_2}_{\leq 0} - \underbrace{2bx_2^2}_{\leq 0} \right) - 2cx_3^4$$

жељемо максимизирати од (0,0,0) $U = \{ \|x\| < \frac{1}{2} \}$
и тај је $x_3+1 > 0$

жељемо да је доо = 0
 $4a = 2b$

$$\text{нпр } a=1, b=2, c=1:$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = (x_3+1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \leq 0 \quad \text{за } x \in U \setminus \{x^*\}$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \leq 0 \quad \text{на } X \in U \setminus \{X^*\}$$

$$X \neq X^* : \dot{V} < 0 \Rightarrow X^* \text{ је AC}$$

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система

1) $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0, 0)$ система:

2) а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

3) Показати да је у сва три случаја матрица $dF(0)$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

гласови: 1) погледајте 1в

3) гласови и $dF(0) = A$ у сва три случаја погледајте 2в

а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \leftarrow F(X)$

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2, \quad a, b > 0$$

$$\nabla V = (2ax_1, 2bx_2)$$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$

2) $V(X^*) = 0, V(X) > 0, X \neq X^*$

3) $\dot{V}(X) = 2ax_1(-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + 2bx_2(x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) = \dots = \underbrace{-2ax_1^4}_{\leq 0} - \underbrace{2bx_2^4}_{\leq 0} - \underbrace{2(a+b)x_1^2x_2^2}_{\leq 0} + \underbrace{x_1x_2(2b-2a)}_{?}$
 $2b = 2a$
 кад $a = b = 1$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2 < 0, \forall X \neq X^* \Rightarrow X^* \text{ је AC}$$

б) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\dot{V}(X) = \dots = 2(x_1^2 + x_2^2)^2 > 0, \forall X \neq X^* \Rightarrow X^* \text{ је нестабилан}$$

в) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$\dot{V}(X) = \dots = 0 \Rightarrow X^* \text{ је неопређено}$$

гласови: $x_1' = x_2 - x_1x_2^2$
 $x_2' = -x_1^3$

а) $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ се не може користити као функција Лагранжа

б) $V(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^2 \leftarrow$ функција у овом облику

6. Испитати стабилност положаја равнотеже $X^* = (0, 0)$ динамичког система

$$\begin{aligned}x_1' &= -\sin x_2 \\x_2' &= x_1.\end{aligned}$$

$A = dF(0,0) \rightarrow$ не даје одговор

$$V = ? , F(x_1, x_2) = (-\sin x_2, x_1)$$

уопште: да буде стабилан (или не асимптотички)

$$\text{хотимо } \dot{V}(X) = 0 = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = \underbrace{V_1}_{(V_1, V_2)} \underbrace{(-\sin x_2)}_{x_1} + \underbrace{V_2}_{\sin x_2} \cdot x_1 = 0$$

$$\text{хотимо! } \nabla V(X) = (x_1, \sin x_2) \rightsquigarrow V = ?$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \cos x_2 + C \rightsquigarrow \text{однозначно дефинирана}$$

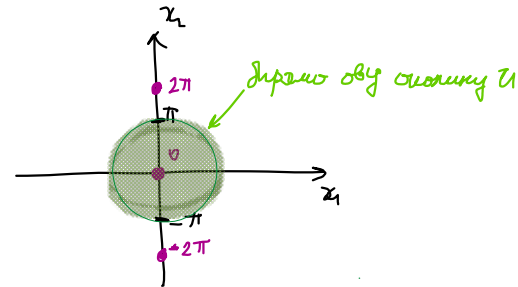
$$V(0,0) = 0 \longrightarrow C = 1$$

$$V(X) > 0, X \neq (0,0)$$

$$V(X) = \underbrace{\frac{x_1^2}{2}}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos x_2}_{\geq 0} > 0, X \in U \setminus \{(0,0)\}$$

$$\text{када су } \frac{x_1^2}{2} = 1 - \cos x_2 = 0 \text{! } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Дирамо нпр } U = B((0,0); \pi)$$

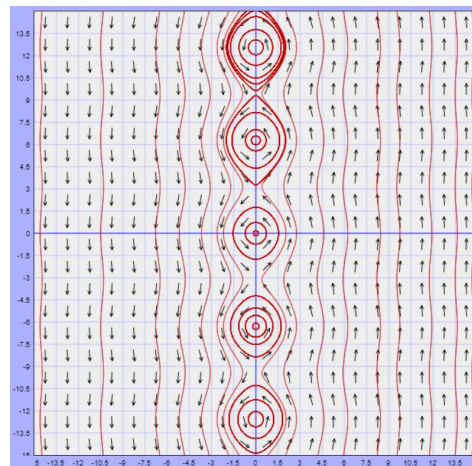
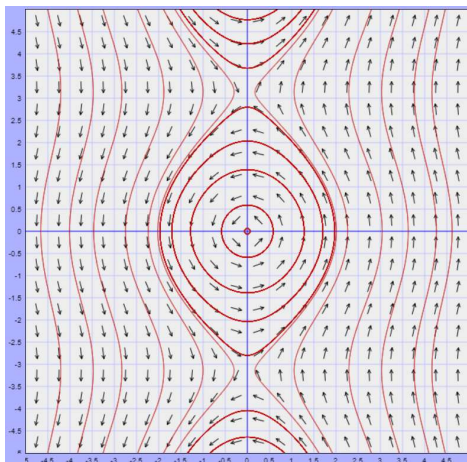


$$1) V \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$2) V(0,0) = 0, V(X) > 0, X \in U \setminus \{(0,0)\}$$

$$3) \dot{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = 0 \leq 0$$

$\left. \begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \end{array} \right\} \Rightarrow X^* = (0,0) \text{ стабилан еквипотенцијал}$



дотати: (Лотка-Вольтерра систем)

$$x' = Ax - Bxy$$

$$y' = Cxy - Dy$$

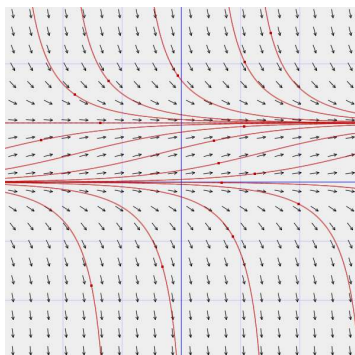
$$A, B, C, D > 0$$

Наћи еквифазне и испитати их стабилност.

Хити: за један еквифазан посматрајте $V(x, y) = f(x) + g(y)$.

Посматрајте и једначину $x' = x(1-x)$

чије интегралне криве изгледају овако



и чије фазни портрет изгледа овако



Еквифаз $x=0$ је нестабилан, а $x=1$ је стабилан асимптотски.
Покажице ово методом сопствених вредности.