

Теорема 103. (Лиувилева теорема - јача верзија.) Нека је векторско поље F аутономно, ϕ^t решење система (68) и $V(t) := \text{Vol}(\phi^t(D))$, за неки мерљив (компактан) скуп D . Тада је

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int \dots \int_{\phi^t(D)} \text{div } F dy_1 \dots dy_n, \rightarrow \text{промена запреме}$$

где је $\text{div } F = \nabla \cdot F$ дивергенција векторског поља F .

$$F \rightsquigarrow \phi^t \rightsquigarrow \text{Vol}(\phi^t(D))$$

$$\begin{aligned} \text{div } F > 0 &\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} > 0 \Rightarrow \text{запремина се повећава} \\ (=, <) & \quad (=, <) \quad \quad \quad (\text{ула, излаз}) \end{aligned}$$

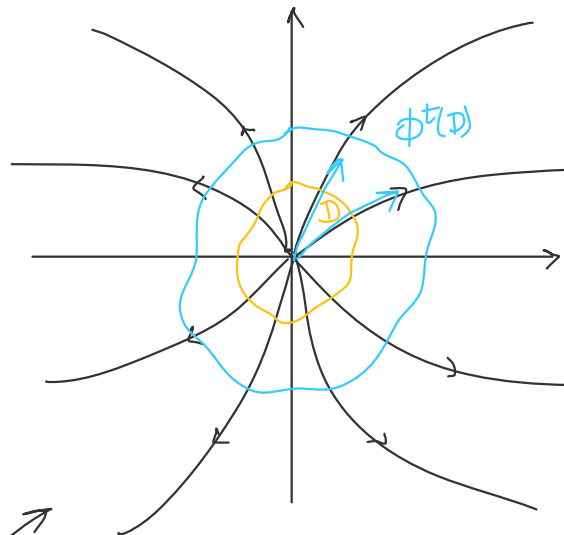
$$F = (F_1, \dots, F_n)$$

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \nabla \cdot F$$

$$\text{линеј } X' = AX, \quad F(X) = AX, \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$$

$$\text{div } F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n a_{jj} = \text{tr}(A)$$

$\rightsquigarrow$ промена запреме зависи од $\text{tr}(A)$



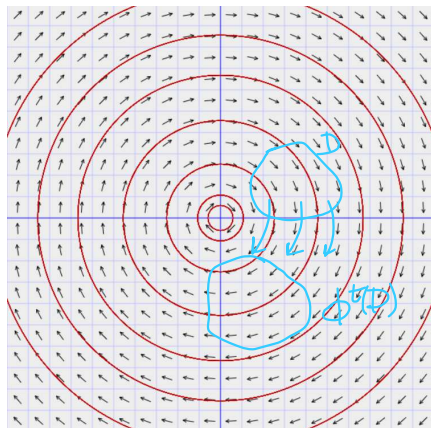
пр. 1) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ (нести центар)

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow X' = AX \text{ повећава запремину}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

центрирал

$$\text{tr}(A) = 0$$



$$\phi^t(D) \cong D \rightarrow \text{ула садр}$$

$\uparrow$
исометрија, ротација

$$3) \quad x_1' = e^{x_1+x_2}$$

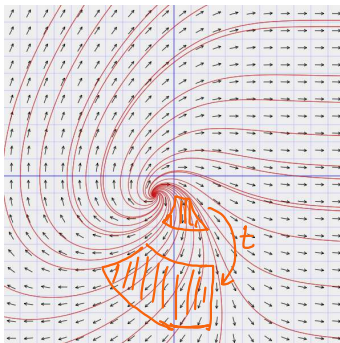
$$x_2' = x_2 - x_1$$

$$F(x_1, x_2) = (e^{x_1+x_2}, x_2 - x_1)$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x_1}(e^{x_1+x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - x_1)$$

$$= e^{x_1+1} > 0$$

→ *robitaiba sap*



$$4) \quad x' = x^2 + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{x'}{x^2+1} = 1 \quad / \int$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

$$(F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 1) = 2x$$

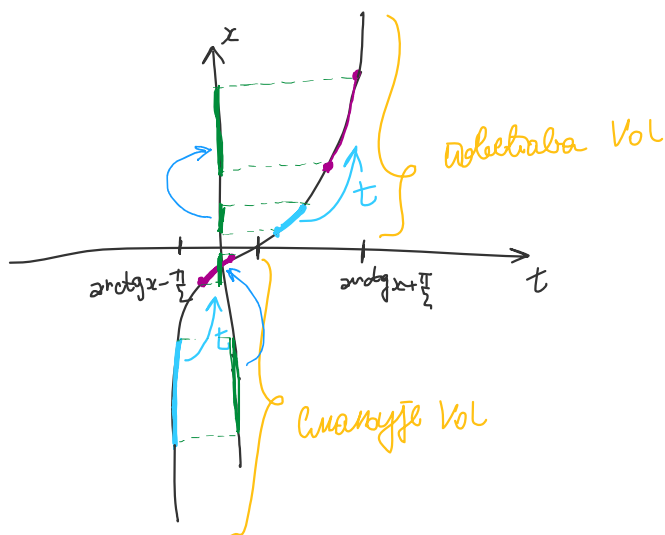
$$\arctan x = t + c$$

$$x = \tan(t + c)$$

$$t=0 \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 = \tan(0 + c) \Rightarrow c = \arctan x_0$$

$$\phi^t(x) = \tan(t + \arctan x)$$

$\operatorname{Vol} \text{ y } \mathbb{R}^1 \Leftrightarrow$ *gryna upazkuzije*
gena luka na x-osei



$\operatorname{div} F = 2x \geq 0$, *ba x > 0, robitaiba*
 ≤ 0 , *ba x < 0, smabyje*