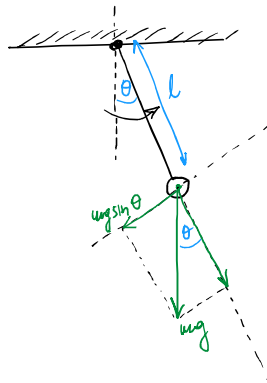
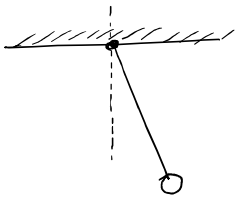


Математичко крајње

θ - угао одвицања
 l - дужина нити
 m - маса куглице

Преглед II Нјутонов закон

$$m \cdot a = -mg \sin \theta$$

$\uparrow$
 $l \cdot \ddot{\theta}$, где је $\ddot{\theta}$ угаоно убрзање

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Ова јј. је нелинеарна, па апроксимирамо!

Приближавамо га је угао θ „мал“ и да важи $\sin \theta \approx \theta$. Тада је јј.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$\uparrow$
линеарна!

$$\Rightarrow \theta(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$

$$\uparrow$$

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Почетни услови: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\theta_0 = c_1$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 \sqrt{\frac{g}{l}} \left(-\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)\right) + c_2 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$

$$0 = \dot{\theta}(0) = c_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right), \quad \dot{\theta}(t) = -\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \theta_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$

првог осцилација: $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t = 2k\pi$

$$k=1: \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

максимална брзина: $\sin(\dots) = 1 \Rightarrow |\dot{\theta}_{\max}| = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \theta_0$

амплитуда: $\cos(\dots) = 1 \Rightarrow |\theta_{\max}| = \theta_0$

Јошати: $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \theta_1$. Колики је првог? Колика је амплитуда осцилација?

Колика је брзина при проласку кроз равнотежни положај?

Осцилације енергије

О неупријетним и упријетним осцилацијама опште облика у следећем изводу.

~~~~~

О непригушеним и пригушеним осцилацијама обухвата излагање у белешкама испод.  
(белешке комент Јована Самарџића и Јане Ђукићковић са предавања професорке Милице 2011/2012 године)

14.

## Непригушене осцилације

деф. Фреквенција је број осцилација у јединици времена.

деф. Понерај / елонгација је растојање од равнотежног положаја.

деф. Амплитуда је максималан понерај.

Нека је тело масе  $m$  фиксирано опругом за непокретан зид и креће се хоризонтално.

Како  $x=0$  означено равнотежно положај (тада на њега не делују спољне силе)

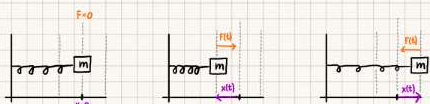
деф.  $k$  - коеф. еластичности  
 $c$  - коеф. трења / коеф. отпора средине

→ Сила којом опруга делује на тело (која га враћа у  $x=0$ ) је **реституциона сила**.

Она је пропорционална промени понераја,  $T_j$  -  $k \cdot x(t)$

→ Ако постоји **трење** / **сила отпора** / **сила пригушења**, пропорционална је брзини:  $-c \cdot \dot{x}(t)$

→ На тело делује и **спољна сила**  $F(t)$  у смеру кретања.



По II Нутновом закону:  $m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + F(t)$

Добијамо:  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$  - Једн. II реда са конст. коеф.

деф. **Непригушене осцилације** настају када нема трења / отпора средине,  $T_j$  -  $c=0$ .

→ Ако уз то нема ни дејства спољне силе, добијамо:  $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$

Карак. ј-на ове дј је:  $\lambda^2 m + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$

Дакле:  $x(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$

$\Rightarrow \frac{x(t)}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) = \sin(\theta + \sqrt{\frac{k}{m}} t) = \sin(\theta + \omega_0 t)$

$\Rightarrow x(t) = A \sin(\theta + \sqrt{\frac{k}{m}} t)$  - заиста је осцилаторно кретање.

→ Размотримо случај када на тело делује и нека **спољна сила**  $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\omega t)$

(Зашто овај **облик**? Зато што су спољне силе најчешће осцилаторног карактера.)  
При томе:  $F_0$  је амплитуда, а  $\omega$  је фреквенција.

(осцилације кад постоји спољна сила ћемо касније назвати **принудним**)

Имамо нехомогену једн. II реда.

$1^o$   $\omega \neq \omega_0$ :  $x_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow x(t) = A \sin(\theta + \omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$

$2^o$   $\omega = \omega_0$ :  $x_p(t) = A t^2 \cos(\omega_0 t) + B t^2 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cdot \sin(\omega_0 t)$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \Rightarrow x(t) = A \sin(\theta + \omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \cdot \sin(\omega_0 t)$

• Приметимо да су у  $1^o$  осцилације ограничене.

У  $2^o$  то не важи: када  $t \rightarrow \infty$ , тада  $x(t) \rightarrow \infty$  (чак и када је  $F_0$  јако мало).

Тада кажемо да је дошло до **резонанције**.

То значи ако се фреквенције изједначе, долази до повећања амплитуде.

Приметимо да чак и када је  $\omega$  блиско  $\omega_0$  (далеко од  $\omega_0$ ) амплитуде су веће ( $\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ )

**Примери резонанције**:  
- Андулација  
- поскакивање возила на неравној путу  
- уруцавање моста  
- оперски певач и стаклена чаша

15.

## Пригушене осцилације

У реалним условима иначо важи нешто другу средину.  
Сила отпора зависи од средине, али и брзине и облика тела.

Када имамо отпор средине, осцилација временом слабе, јер се део енергије троши на савладавање тог отпора.

Губитак енергије се може надокнадити спољном силом (нпр. андуло белу)

деф. **Пригушене осцилације** настају када има отпора средине,  $T_j$  -  $c \neq 0$ .

→ Прво посматрајмо случај без спољне силе

Коју дј посматрамо?  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$  /  $m$

$x''(t) + 2p \cdot x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

гд је  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , а  $p = \frac{c}{2m}$  тзв **фактор пригушења**.

Карактеристична једначина ове дј је:  $\lambda^2 + 2p\lambda + \omega_0^2 = 0$ .

Раздвајамо случајеве у зависности од дискриминанте:  $D = 4p^2 - 4\omega_0^2$

$1^o$   $D > 0$  ( $p^2 > \omega_0^2$ )

Тада су решења реална и различита:  $\lambda_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{D}}{2}$

$\Rightarrow$  скуп решења дј је:  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ )



У овом случају немамо осцилаторно кретање, већ понерај тежи 0 током времена.

$2^o$   $D = 0$  ( $p^2 = \omega_0^2$ )

- ово зовемо **критичан пригушен систем**

Тада су решења реална и једнака:  $\lambda_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{D}}{2} = -p$

$\Rightarrow$  скуп решења дј је:  $x(t) = C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt}$  ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ )



Понерај још брже тежи нули.

$3^o$   $D < 0$  ( $p^2 < \omega_0^2$ ) - **тресе** мање у везу са реституционом силом

Тада су решења кпј - комплексна:  $\lambda_{1,2} = -p \pm i \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i \omega_1$

$\Rightarrow$  скуп решења дј је:  $x(t) = C_1 e^{-pt} \cos(\omega_1 t) + C_2 e^{-pt} \sin(\omega_1 t)$  ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ )

$T_j$   $x(t) = A e^{-\frac{c}{2m} t} \sin(\theta + \omega_1 t)$  ( $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ )



$\omega_1$  - **имамо осцилације**  
 $A$  - **амплитуда се смањује** - **пригушење**

→ Сада посматрамо случај када имамо и спољну силу - **принудна осцилација**

Коју дј посматрамо?  $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$  /  $m$

$x''(t) + 2p \cdot x'(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$   $\Delta \neq \omega_0$

Посетимо се:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Хомогени случај смо већ решили:  $x_h(t)$  ће бити једно од  $1^o, 2^o, 3^o$ .

По облику десне стране, закључујемо да ће хомог. реш. бити облика  $x_h(t) = A \cos(\omega t + \theta)$

$T_j$   $x_p(t) = \frac{F_0}{m \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4p^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta)$

• Интересује нас под којим условима систем може довести до оштећења.

Другим речима, занима нас када је амплитуда највећа.

$x(t)$  има највећу амплитуду када је:  $p(\omega) = \frac{F_0}{m \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4p^2 \omega^2}}$  -  $\omega_1$  најмање  
Лакше се проверава да се то постигне за  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2p^2}$ .

Дакле, учинимо да за мале вредности пригушења  $p$  важи  $\omega = \omega_0 \Rightarrow$  **прети резонанција**

Наравно,  $p$  никад није кроз 0, па неће доћи до резонанције.

Ипак, и овај мали долази до озбиљне штете. Овај случај зове се **практична резонанција**.

**Пример**: Да би се код аутомобила ово избегло, уграђују се амортизери.

Тиме се спречава да се причврсна брзга изједначи са фрек. спољне силе.