

Радиоактивни распад

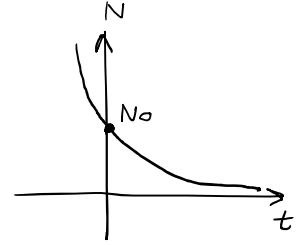
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N -број радиоактивних честица

λ - константа радиоактивног

$$\lambda > 0$$



① Доказати да $\exists T_{1/2} > 0$ и $N(t+T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N(t)$. $T_{1/2}$ - период полураспада.

$$N_0 \cdot e^{-\lambda(t+T_{1/2})} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow -\lambda T_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Популациони модел

$P(t)$ - број појунки

k - стапа раста, $k > 0$

→ Малулов модел (крај 18. века) $P' = k \cdot P$, $P(t_0) = P_0$

$$P = c \cdot e^{kt}$$

$$t = t_0: P_0 = c \cdot e^{kt_0} \Rightarrow c = P_0 \cdot e^{-kt_0} \left\{ \begin{aligned} P(t) &= P_0 \cdot e^{-kt_0} \cdot e^{kt} = P_0 \cdot e^{k(t-t_0)} \end{aligned} \right.$$

→ Логистички модел (околина 19. века)

(Верхулов модел)

$$P' = k \cdot P \left(1 - \frac{P}{K}\right), P(t_0) = P_0, \quad K - \text{капацитет средине}$$

$$\frac{KP'}{kP(K-P)} = 1 \quad \bigg| \int dt$$

$$\frac{K}{k} \cdot \underbrace{\int \frac{dP}{P(K-P)}}_{\frac{1}{K} \left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{K-P} \right)} = t + C$$

$$\frac{1}{K} \left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{K-P} \right)$$

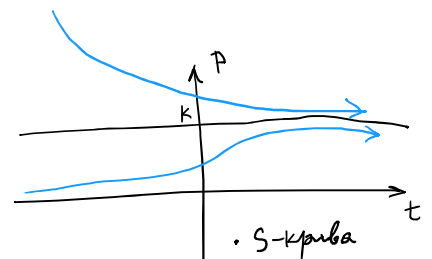
$$P(t) = \frac{K}{1 + C e^{-kt}}$$

$$P(t) = \frac{P_0 K}{P_0 + e^{k(t-t_0)} \cdot (K - P_0)}$$

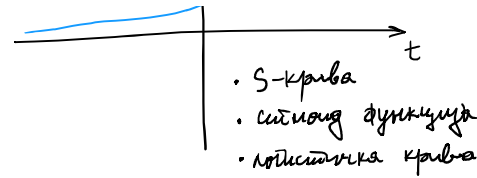
② Како $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$.

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{k(t-t_0)} \rightarrow \infty \Rightarrow P(t) \rightarrow \frac{P_0 K}{P_0 - 0} = K$$

K - гранична величина популације



K = ситиматна величина ситиматна



③ Број ситиматна неке државе кроз време:
(M = милиона)

1801: 16 M
1851: 27 M
1901: 41 M

а) Матризови моделу и са прва два података проценити за 2001.

(ситиматна вредност
2001: 63 M)

б) Логистички моделу и са два прва података проценити за 2001.

а) $t_0 = 1801$

$$P(1851) = P(1801) \cdot e^{h(1851-1801)} \Rightarrow e^{50h} = \frac{27}{16} \Rightarrow h = \frac{1}{50} \ln \frac{27}{16}$$

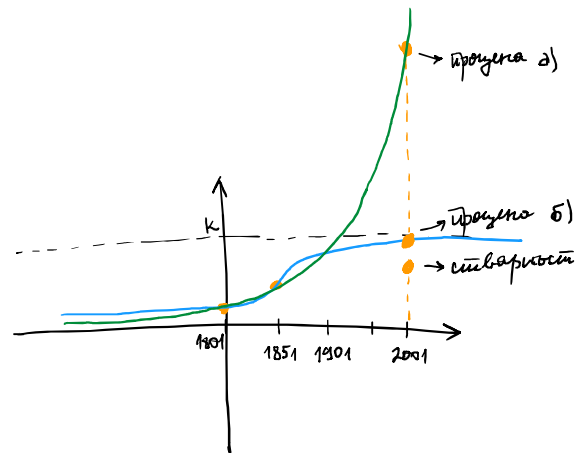
$$P(2001) = P(1801) \cdot e^{h(2001-1801)} = 16M \cdot e^{4 \ln \frac{27}{16}} = 16M \cdot \left(\frac{27}{16}\right)^4 \approx 130M$$

б) $t_0 = 1801$

$$P(1851) = \frac{P(1801) \cdot K}{P(1801) + e^{-50h} \cdot (K - P(1801))}$$

$$P(1901) = \frac{P(1801) \cdot K}{P(1801) + e^{-100h} \cdot (K - P(1801))}$$

$$\dots P(2001) \approx 67M$$



④ Рибе живе у језеру и њихово број се (без утицаја ситиматна услова) повећава експоненцијално. Риба се размножава сваке 10 година. Сваке 10 година, свакој риби 3 рибе умртвљују из рибарства, а 21 уловљена риба умртвљују. На почетку има 100 риба. Колико риба ће популација представљати?

$$P' \sim P \Rightarrow P' = hP \quad P(t+10) = 2 \cdot P(t)$$

$$\Downarrow$$

$$P = c \cdot e^{ht} \rightsquigarrow c \cdot e^{h(t+10)} = 2 \cdot c \cdot e^{ht} \Rightarrow h = \frac{\ln 2}{10}$$

$$DJ: P' = kP + 3 - 21 = \frac{\ln 2}{10} P - 18, \quad P(0) = 200$$

$$P(t) = \frac{180}{\ln 2} - 59,7 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$$

$$P(t_{\text{end}}) = 0 \Rightarrow t_{\text{end}} \approx 21,21 \text{ год}$$

Ньютонов закон охлаждения

T - температура тела

T_{∞} - температура окружающей среды

k - коэффициент охлаждения, $k > 0$

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_{\infty})$$

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \cdot e^{-kt} \quad (T_0 - \text{начальное})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_{\infty}$$

- ⑤ У соды у којој је 20°C плази се ринџа. Након 3 мин температура је била 100°C , а након 10 мин је 40°C . Колика је почетна температура?

$$\left. \begin{aligned} 100 &= T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \cdot e^{-3k} \\ 40 &= T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \cdot e^{-10k} \end{aligned} \right\} \frac{80}{20} = e^{7k} \Rightarrow k = \frac{\ln 4}{7}$$

$$T_0 = 80 \cdot e^{\frac{3}{7} \ln 4} + 20 \approx 165^\circ\text{C}$$

T_{∞} може и да се мења у времену, $T_{\infty} = T_{\infty}(t)$

Зачети: решити претходни задатак ако $T_{\infty} = T_{\infty}(t) = 10^\circ\text{C} \cdot e^{-t}$

Продели менаџа

$K(t)$ - количина супстанције у раствору

$$\frac{dK}{dt} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}$$

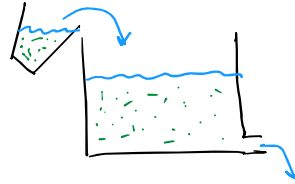
↓
приток који улази

↓
приток који излази

(приток = количина супстанције по времену)

- ⑥ У цистерни има 2000 л воде. У тренутку $t=0$ раствор са концентрацијом $0,1 \text{ kg/l}$ и мла брзином 8 l/min , а из цистерне се истовремено протиче менаџа (премештајући га се менаџе глевова исподња).

Натм мавъи кони ы ыусталрми (ы бреним).



$$Q_{in} = 0,1 \text{ kg/l} \cdot 8 \text{ l/min} = 0,8 \text{ kg/min}$$

$$Q_{out} = \frac{k(t)}{V} \cdot 8 \text{ l/min} = \frac{k(t)}{250 \text{ min}}$$

$$V = V_{const} = 2000 \text{ l}$$

$$\frac{dk}{dt} = 0,8 - \frac{k}{250}, \quad k(0) = 0 \Rightarrow k(t) = 200 \left(1 - e^{-\frac{t}{250}}\right) \text{ kg}$$