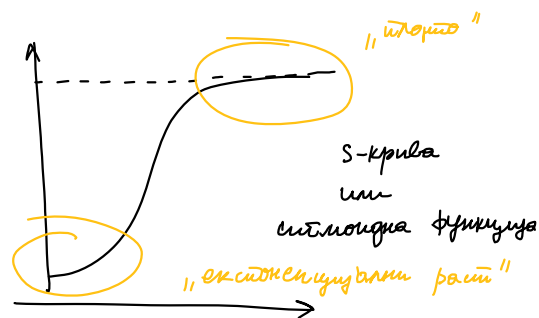


1 врсина · $x' = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right)$ логистички модел

$$r_1, K_1 > 0$$

2 врсина без меѓуседне интеракции: $x' = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right)$

$$y' = r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right)$$



овде имаме само линеарен утицај врсина $\sim x, x, y, y$

уводимо линеарне утицај врсина: $x' = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{a_{12}}{r_1} y\right)$

$$x, y, y, x$$

$$y' = r_2 y \left(1 - \frac{y}{K_2} - \frac{a_{21}}{r_2} x\right)$$

$a_{12}, a_{21} > 0$
меѓу јачину интеракције измеѓу врсина

6 параметара $\leadsto$ упростили простор параметара (готу само го $\mathbb{R}^3$ -тип параметра)
($\mathbb{R}^6$)

смена на форм: $t \leadsto r_1 t$

смена: $x \leadsto \frac{x}{K_1}$

$$y \leadsto \frac{y}{K_2}$$

ознаке: $\rho = \frac{r_2}{r_1}$

$$a_{12} = \frac{a_{12} K_2}{r_1}$$

$$a_{21} = \frac{a_{21} K_1}{r_2}$$

систем се пишува: $x' = x(1 - x - a_{12}y)$

$$y' = \rho y(1 - y - a_{21}x)$$

$$\rho, a_{12}, a_{21} > 0$$

$G = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ - позитиван квадрант, затоа што има биолошка интерпретација

Нулклаинициј:

$$x' = 0:$$

$$x(1 - x - a_{12}y) = 0$$

}

$$x = 0$$

$$1 - x - a_{12}y = 0$$

$$y' = 0:$$

$$\rho y(1 - y - a_{21}x) = 0$$

}

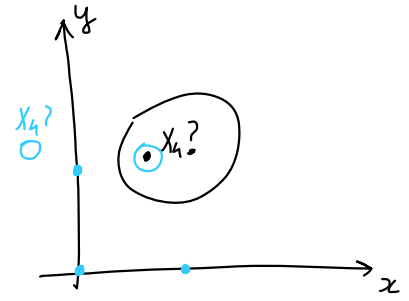
$$y = 0$$

$$1 - y - a_{21}x = 0$$

Еквивалентности: $X_1(0,0)$, $X_2(1,0)$, $X_3(0,1)$, $X_4\left(\frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}}\right)$

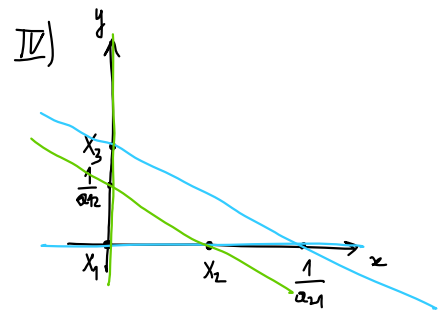
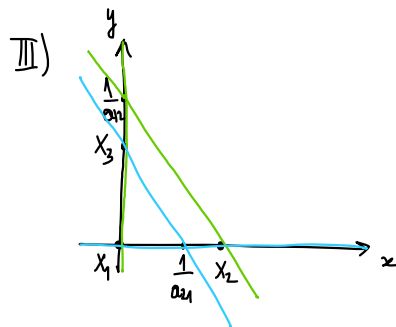
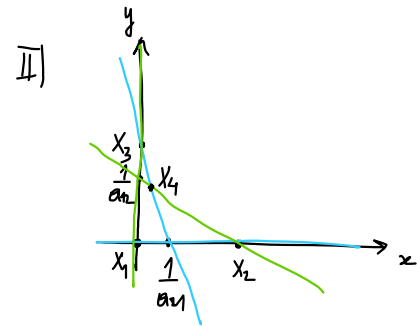
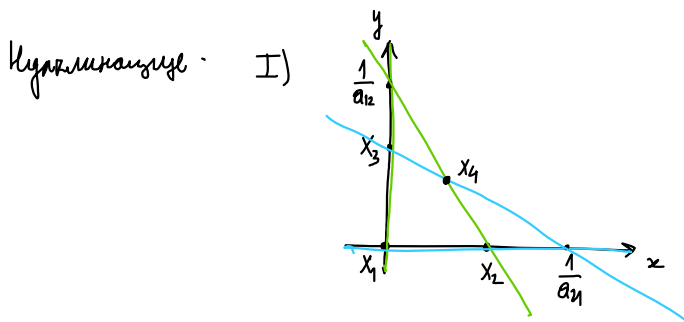
$$X_4 \in G \Leftrightarrow (a_{12}a_{21} < 1 \wedge a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1) \vee (a_{12}a_{21} > 1 \wedge a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1)$$

$$\Leftrightarrow (a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1) \vee (a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1)$$



случајеви које ћемо разматрати: ако је неки од a_{12} или a_{21} једнак 1

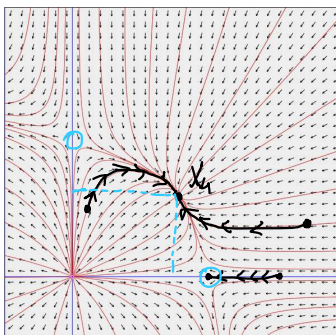
- Случајеви: I) $a_{12} < 1 \wedge a_{21} < 1$
 II) $a_{12} > 1 \wedge a_{21} > 1$
 III) $a_{12} < 1 \wedge a_{21} > 1$
 IV) $a_{12} > 1 \wedge a_{21} < 1$
- } имамо и X_4



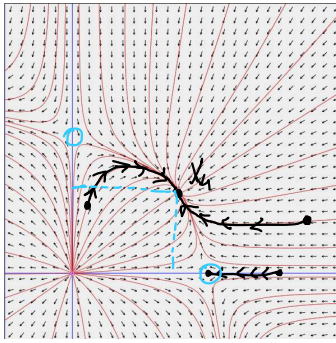
I) координатне осе и $x' = x(1-x-\frac{y}{3})$

$$y' = y(1-y-\frac{x}{2})$$

$$\forall (x(t), y(t)) \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_4$$



$a_{12}, a_{21} < 1$ - поклањање није одвајање јак и де прате одвајање,
 али у мањем броју него да су саме



$$y' = y(1 - y - \frac{x}{2})$$

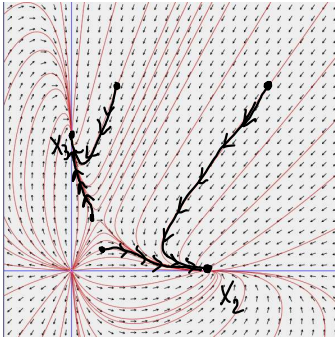
$$\forall x(0), y(0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} X_1$$

$a_{12}, a_{21} < 1$ - поименно није доволно јачо и од брине отицању,
али у нашем случају нешто је су саме

II) изумирање брине нпр

$$x' = x(1 - x - 2y)$$

$$y' = y(1 - y - 3x)$$



можемо такође сабрати фТ су X_2 или X_3 - зависи од

$(x(0), y(0))$ где смо сабрали

X_2 . $y = 0 \rightarrow$ прва брине изумира, а друга брине y
остаје ово еквидрума

X_3 . $x = 0 \rightarrow$ друга брине изумира, а прва брине y
остаје ово еквидрума

$a_{12}, a_{21} > 1$ - онда су доволно велика да може доћи до изумирања

III) и IV) су симетрични - уграђено II) генерално

$$x' = x(1 - x - a_{12}y)$$

$$y' = \rho y(1 - y - a_{21}x)$$

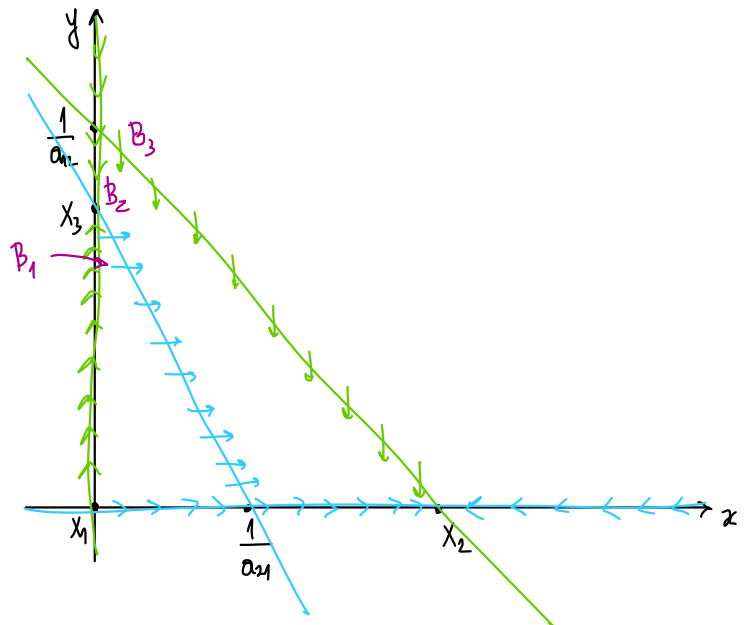
$$a_{12} < 1 \wedge a_{21} > 1$$

Увидимо еквидрума:

$$f(x, y) = (x(1 - x - a_{12}y), \rho y(1 - y - a_{21}x))$$

$$df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}\rho y & \rho(1 - 2y - a_{21}x) \end{bmatrix}$$

$$dF(X_1) = dF(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = \rho > 0 - \text{немајући}$$



$$dF(X_1) = dF(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = f > 0 - \text{неустойчиво}$$

$$dF(X_2) = dF(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} \\ 0 & f(1-a_{11}) \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1 < 0, \lambda_2 = f(1-a_{11}) < 0 - \text{устойчиво}$$

$$dF(X_3) = dF(0,1) = \begin{bmatrix} 1-a_{12} & 0 \\ -a_{21}f & -f \end{bmatrix}, \lambda_1 = 1-a_{12} > 0, \lambda_2 = -f < 0 - \text{седло}$$

Задание: ХГ система $\Rightarrow$ построить у $dF(X_j)$ собственные $\Rightarrow X' = dF(X_j)X$ и $X' = F(X)$ для эквив.

$j \in \{1, 2, 3\}$

$\Rightarrow$ они „линейно устойчивы“ у некоего экв.
 $\Rightarrow$ у того экв. и более сложными ф.п.

X_1 - неуст. члор 

X_2 - уstab. члор 

X_3 - седло 

Понамне думи куклиниции.

$$\underline{x' = 0}$$

$$x = 0 : x' = 0$$

$$y' = fy(1-y) - \text{подсказка}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1)$$

$$\underline{y' = 0}$$

$$y = 0 : y' = 0$$

$$x' = x(1-x)$$

$$x' > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} & \swarrow 1-x-a_{12}y=0 \\ & \searrow x=1-a_{12}y \\ & y' = fy(1-y-a_{12}x) \text{ как же знака?} \\ & \swarrow 1-y-a_{21}x=1-y-a_{21}(1-a_{12}y) = 1-y-a_{21}+a_{12}a_{21}y \stackrel{?}{<} 0 \\ & \Leftrightarrow 1-a_{21}-y(1-a_{12}a_{21}) < 0 \\ & \Leftrightarrow y(1-a_{12}a_{21}) > 1-a_{21} / (-1) \\ & \Leftrightarrow y(a_{12}a_{21}-1) < \underline{\underline{a_{21}-1}} \end{aligned}$$

$$1^\circ a_{12}a_{21}-1 < 0 \checkmark \quad (+) \cdot (-) < (+)$$

$$2^\circ a_{12}a_{21}-1 > 0 \quad - \Leftrightarrow y < \frac{a_{21}-1}{a_{12}a_{21}-1}$$

$$\text{where } a_{12} > 1, \quad 1 < \frac{a_{21}-1}{a_{12}a_{21}-1}$$

$$1-y-a_{21}x=0 \rightarrow \text{каким-то се место}$$

$$1-x-a_{12}y=0 \Rightarrow y < \frac{1-x}{a_{12}}$$

$$\Rightarrow 1-x-a_{12}y > 0 \Rightarrow x' > 0$$

$\Rightarrow$ верно $\rightarrow$

$$0 \quad a_{12}a_{21}-1$$

$$\text{през } f_{\text{пр}}, \quad \frac{1}{a_{12}} < \frac{a_{21}-1}{a_{12}a_{21}-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a_{12}a_{21}-1 < a_{12}a_{21}-a_{12}$$

$$\Leftrightarrow a_{12} < 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow y' < 0 \Rightarrow \text{век поле всегда нагоне} \quad \downarrow$$

Затем:

$$B_1: \text{уравнение прямой } 1-x-a_{12}y=0 \text{ и } 1-y-a_{21}x=0$$

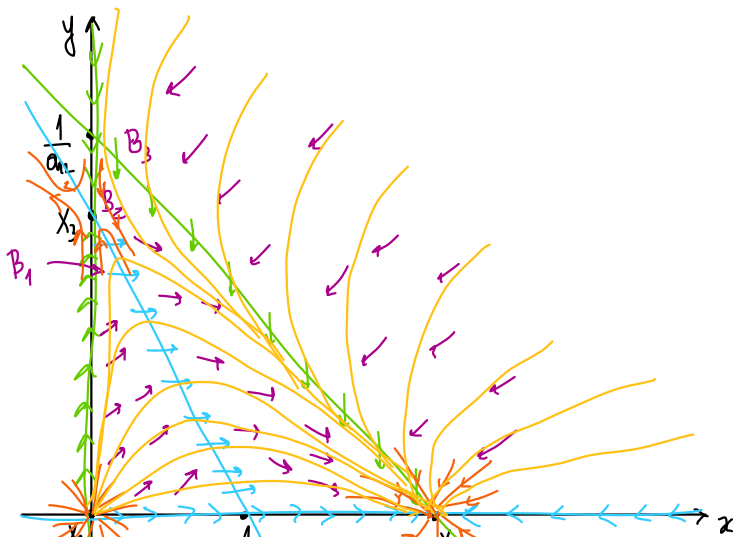
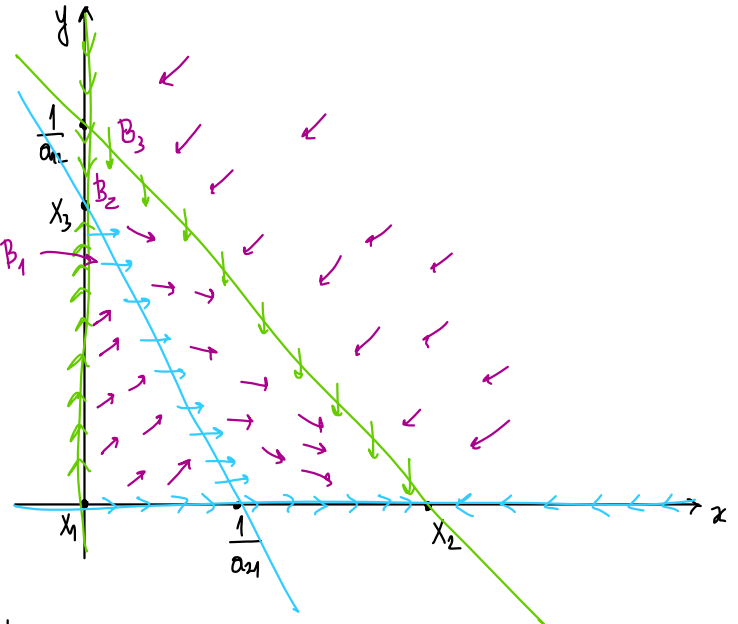
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1-x-a_{12}y > 0 \\ 1-y-a_{21}x > 0 \end{array} \right\} x', y' > 0 \quad \nearrow$$

$$B_2 \text{ предположим предположим } 1-y-a_{21}x=0 \Rightarrow \text{можно ли знак } y'$$

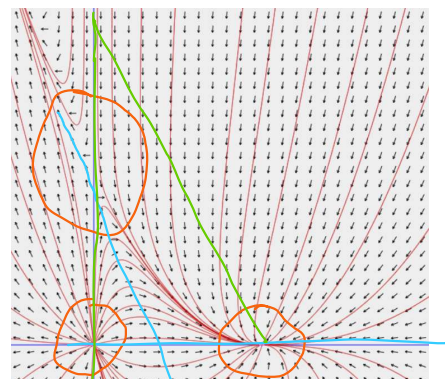
$$x' > 0, y' < 0 \quad \searrow$$

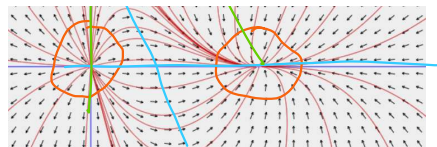
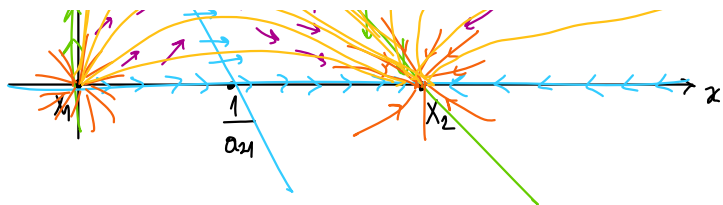
$$B_3: \text{можно ли знак } x' \Rightarrow x', y' < 0 \quad \swarrow$$

- если предположим из $B_1 \Rightarrow$ предположим в B_2
- если предположим из $B_3 \Rightarrow$ предположим в B_2 или рассмотрим y x_2 (горизонтальной линии)
- если не предположим y $B_2 \Rightarrow$ рассмотрим y B_2
- для траекторий ищутся за горизонтальной линией $y = x_2$



$$\text{мы } \begin{aligned} x' &= x(1-x-\frac{y}{2}) \\ y' &= y(1-y-3x) \end{aligned}$$





За свако $(x_0, y(0))$ постоји време $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow y$ брзо умире

x се стабилизује у x_2

$\left. \begin{array}{l} a_{11} > 0 \\ a_{11} < 0 \end{array} \right\}$ x експоненцијално у овој интервалу

IV) x умире, y је у x_3