

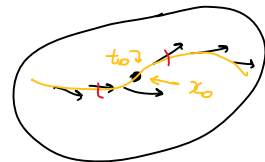
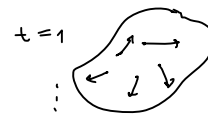
Теорема 121. (Пeanова¹⁵ теорема) Нека је $U \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : U \times [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрекидно. Тада за свако $x_0 \in U$ постоји $\delta > 0$ и (не пужно јединствено) решење Кошијевог проблема

$$x'(t) = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (71)$$

дефинисано на интервалу $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Пeano $\Rightarrow$ егзистенција

Пј: ако је F непрекидно у околини (x_0, t_0) , онда Кошијев проблем $x' = F(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ има (локално дефинисано) решење.



Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ отворен интервал. Кажемо да је векторско поље $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ локално униформно (по $t \in I$) Липшицово¹ по x ако свака тачка из U има околину B тако да важи $\|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L\|x - y\|$, за неку $L > 0$, $x, y \in B$, $t \in I$.

Теорема 67. (Пикарова² теорема.) Нека је $U \subset \mathbb{R}^k$ отворен и векторско поље $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ непрекидно и локално униформно (по t) Липшицово по x . Тада за свако $x_0 \in U$ и $t_0 \in I$ постоји $\delta > 0$ и јединствено решење

$$x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow U$$

Кошијевог проблема

$$x'(t) = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Пикар $\Rightarrow$ егзистенција и јединственост

$F(x, t) = F_t(x)$
може да се гледа
као временски зависно
векторско поље

Пј: ако је F непрекидно и локално Липшицово у околини (x_0, t_0) , онда Кошијев проблем $x' = F(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ има јединствено (локално дефинисано) решење.

формула за итеративни процес и доказ теорема Пикара, $x_n \rightarrow x_\infty$ и x_∞ је решење.

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(x_n(s), s) ds,$$

① Истакнути егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема

$$x' = F(x, t), \quad x(0) = 0.$$

$$a) F(x, t) = tx^3$$

$$b) F(x, t) = t^2 \cdot |x|^{1/2}$$

$$b) F(x, t) = \frac{\ln x}{1 + \sin x}$$

$$a) F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t$$

$$\left. \begin{array}{l} t, x^3 \text{ - континуиран} \\ \text{(непр)} \end{array} \right\} \Rightarrow F \text{ непр на } \mathbb{R}^2 \xRightarrow{\text{Теорема}} \exists \text{ решење}$$

$$\|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L \cdot \|x - y\|$$

$$k=1 \quad \| \cdot \| = | \cdot |$$

$$|tx^3 - ty^3| \leq L |x - y|$$

$$|t| |x^3 - y^3| \leq L \cdot |x - y|$$

$$|t| |x^2 + xy + y^2| \leq L \quad ?$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\begin{array}{l} \text{можемо око } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t \in [-a, a] \\ xy \in B(0) = [-b, b] \end{array}$$

(или непр $[-1, 1]$)

impedire natura L tutto su $[-b, b] \times [-a, a]$ banni

$L = 3ab^2$ (L ene ga saluun og orvonne)

$|t| \leq a$

$$|x|, |y| \leq b \Rightarrow |x|^2, |xy|, |y|^2 \leq b^2 \Rightarrow |x^2 + xy + y^2| \leq |x|^2 + |xy| + |y|^2 \leq 3b^2 \Rightarrow \leq 3ab^2 \checkmark$$

$\Rightarrow$ jest. Lut $\Rightarrow E + J$

$|tx^3 - ty^3| = |t| |x^3 - y^3|$

$$f(x) = x^3$$

$$|f(x) - f(y)|$$

f je c' dja : yes now him!

$$L = \max |f'|$$

из Леммы: $|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(z)|}_{\leq L} |x - y|$

$$K \gg 2 \quad L = \mu_{21} \times \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right| - T \sigma_{\text{ср}} \rho_p$$

b) $F(x,t) = t^2 |x|^{1/2}$

$\frac{t^2}{\sqrt{|x|}}$  $\left\{ \begin{array}{l} \text{F нег} \\ \text{F нег} \end{array} \right. \Rightarrow \exists \text{ piecewise}$

$$|F(x,t) - F(y,t)| \leq L |x - y|$$

$$\underbrace{t^2}_{\leq 1} |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq L \cdot |x - y| \rightarrow \text{покажем что } 0$$

$$t \in [-1, 1] \text{ (монотонно } \sqrt{\cdot} \text{ не убывает)}$$

$$|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}| \leq |x - y|. \quad \text{7. } y \text{ ~~определен~~ } 0$$

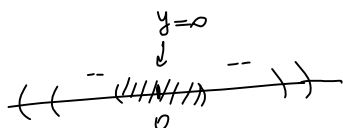
$$x(0) = 0$$

Доказуємо, що це не так у разі оконних 0

$$y=0$$

nn $\exists L \forall u \text{ open } 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L |x - y|, x, y \in u$

$$y=0 \quad \sqrt{129} \leq L \cdot |x| \quad / : |x|$$



$$\underline{x \rightarrow 0} \ (x \neq 0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq L \quad / \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\infty \leq L \quad \downarrow$$

$\Rightarrow$ F неже лок ма. у ономин 0

$\Rightarrow$ не бамн тунар

НЕ ЗАГАЛИ за решение неже фегуенцирени!

решавано: $x' = t^2 \sqrt{|x|} \quad , x(0) = 0$

$x \equiv 0$ ✓

$x \neq 0 \quad \frac{x'}{\sqrt{|x|}} = t^2 \quad (P \cap I)$

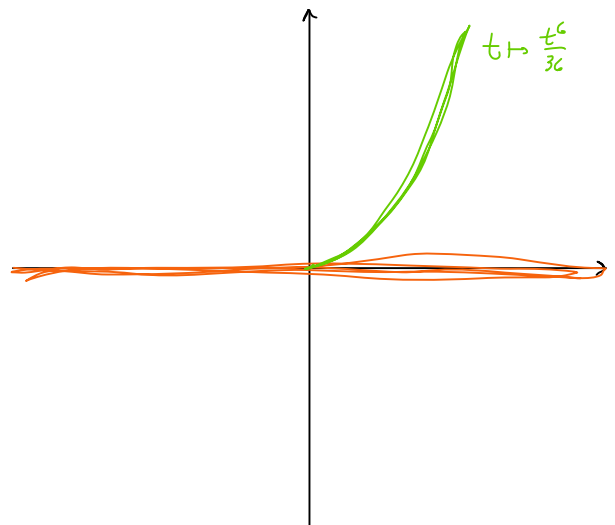
1) $x > 0 \quad \frac{x'}{\sqrt{x}} = t^2 \quad / \int$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + C$$

$$x = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{C}{2} \right)^2$$

$t \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0$ (непосредственно от x)

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = \frac{t^6}{36} \quad , t > 0$



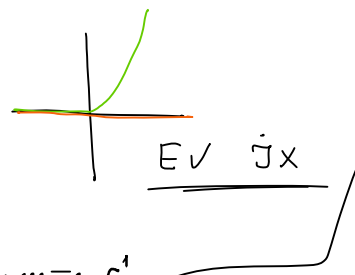
Поэтому будем иметь 2 решения для $(0,0)$

⊗ $x \equiv 0$ ✓

⊕ $x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t^6}{36}, & t > 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow C'$ фге

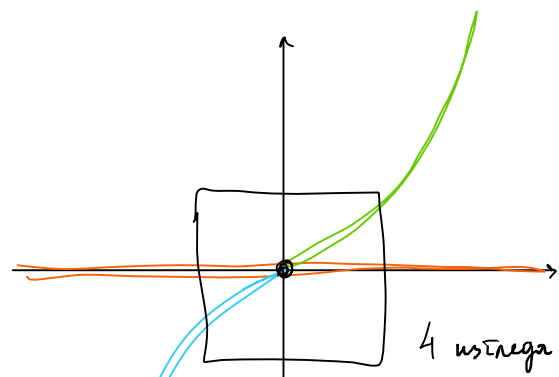
$x'(0) = 0 \rightarrow$ решение C'



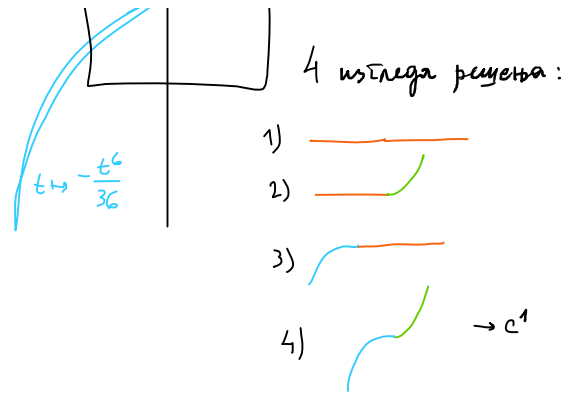
2) $x < 0$

$$\frac{x'}{\sqrt{-x}} = t^2 \quad / \int$$

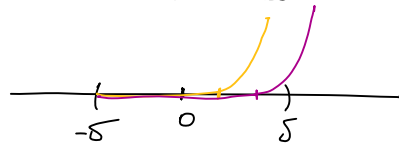
$$x = -\frac{t^6}{36} \quad , t < 0$$



4 решения решения:



не значи да на произволен (даден) интервал $(-\delta, \delta)$ постоје само 4 решения КД. $\rightarrow$ има их бесконечно многу



(видети предавање)

$$b) F(x, t) = \frac{\ln x}{1 - \operatorname{sgn} x}$$

F није дефинисан за $x \leq 0$

$$\ln x, \quad x > 0$$

$1 - \operatorname{sgn} x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} x \neq 1 \Rightarrow x \leq 0$ } $\nexists$ да једнакост у постојењу је противуречна $\Rightarrow$ нема решења

$x \setminus t$	$\sqrt{}$	x
$\sqrt{}$	a	b
x	z	B

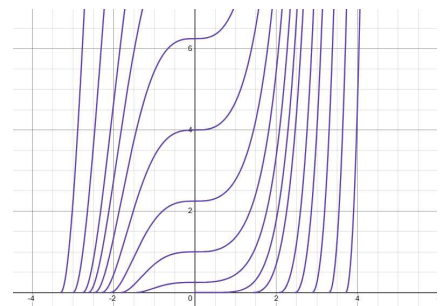
Једино решење за $x > 0$: $F(x, t) = t^2 \cdot x^{1/2}$ важи Лемма за $x(t_0) = x_0$ када x_0 је $x_0 \neq 0$. За $x_0 = 0$ не важи.

Излаз је израчунавање да је $x(t) = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{c_1}{2}\right)^2$ решење кад год је $x > 0$.

$$2\sqrt{x} = \frac{t^3}{3} + c_1 > 0 \Rightarrow t > \sqrt[3]{-3c_1}$$

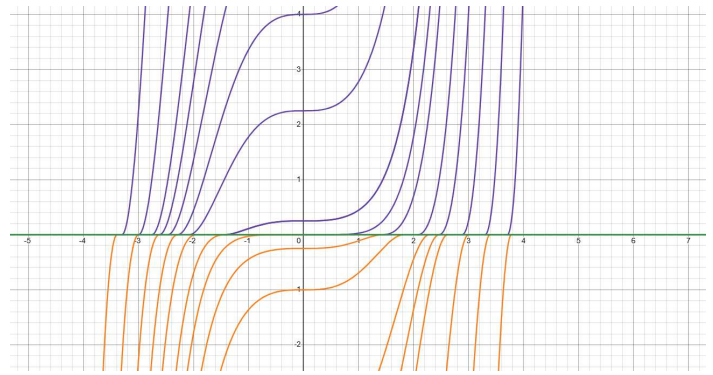
овде је приказана слика:

$$\text{за } x < 0: x(t) = -\left(\frac{t^3}{6} + \frac{c_2}{2}\right)^2, \quad t < \sqrt[3]{-3c_2}$$



и имамо решение: $x \equiv 0$

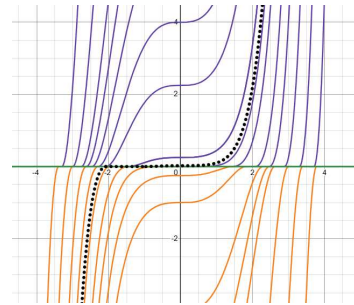
$x > 0$: положително
 $x = 0$: негово
 $x < 0$: отрицателно



Можемо и „максимално“ решение и годиним глобално дефинисано решение:

за произволни $c_2 > c_1$

$$x(t) = \begin{cases} -\left(\frac{t}{6} + \frac{c_2}{2}\right)^2, & t < \sqrt[3]{-3c_2} \\ 0, & \sqrt[3]{-3c_2} \leq t \leq \sqrt[3]{-3c_1} \\ \left(\frac{t}{6} + \frac{c_1}{2}\right)^2, & t > \sqrt[3]{-3c_1} \end{cases}$$



desmos.com/calculator/rq0iwebcmf

② $x' = x(1-x)$. Без решавање:

а) Докажати да урешет $x(t)$ важи: $x(0) = a \in (0,1) \Rightarrow (\forall t) \quad 0 < x(t) < 1$.

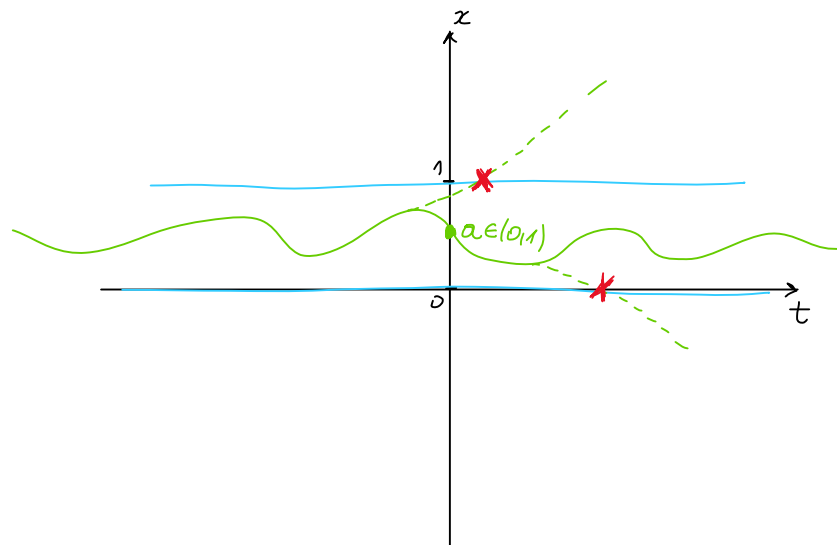
б) Јако ли $x(t)$ у зависности од $x(0) = a \in \mathbb{R}$

а) $x' = x(1-x)$

$x \equiv 0 \quad \checkmark$

$x \equiv 1 \quad \checkmark$

$x(0) = a \in (0,1)$



$$\left. \begin{aligned} F(x,t) &= x(1-x) = x - x^2 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 - 2x \in C(\mathbb{R}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F \in C^1(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ Липс

$\Rightarrow$ решења се не сиду

$\Rightarrow x(t)$ је у интервалу $\mathbb{R} \times (0,1) \Rightarrow (\forall t) \quad 0 < x(t) < 1$.

$$b) x(0) = a \in \mathbb{R}$$

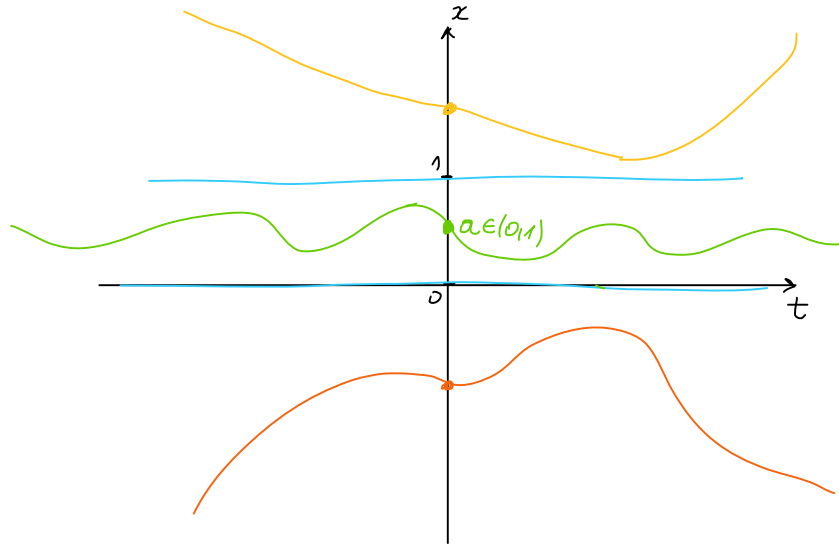
$$1^\circ \underline{a \in (0,1)} \Rightarrow x(t) \in (0,1)$$

$$2^\circ \underline{a=0} \Rightarrow x(t) \equiv 0$$

$$3^\circ \underline{a=1} \Rightarrow x(t) \equiv 1$$

$$4^\circ \underline{a > 1} \Rightarrow x(t) > 1$$

$$5^\circ \underline{a < 0} \Rightarrow x(t) < 0$$



$$1^\circ a \in (0,1) \Rightarrow x \in (0,1)$$

$$x' = \underbrace{x}_{\in (0,1)} \underbrace{(1-x)}_{\in (0,1)} \in (0,1) \Rightarrow x' > 0 \Rightarrow x \uparrow$$

$x \uparrow, x \in C^1, x$ не имеет экстр. значений.

$$\Rightarrow \exists \lim x \Rightarrow \exists \lim x' \Rightarrow x'(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$0 = \lim x(1-x) \Rightarrow x \rightarrow 0 \vee \boxed{x \rightarrow 1} \text{ так как } x \uparrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

$$4^\circ \text{ globally } \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$$

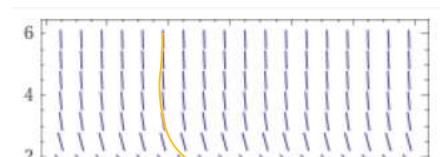
$$5^\circ a < 0, x < 0$$

$$x' = \underbrace{x}_{< 0} \underbrace{(1-x)}_{> 0} < 0 \Rightarrow x \downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{так } x \text{ не имеет экстр. значений} \Rightarrow \exists \lim x \Rightarrow \exists \lim x' \Rightarrow x' \rightarrow 0 \\ \Rightarrow x \rightarrow 0 \vee x \rightarrow 1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{не может} \quad \text{не может} \\ x \downarrow \quad \quad x \downarrow \end{array} \right] \quad \downarrow$$

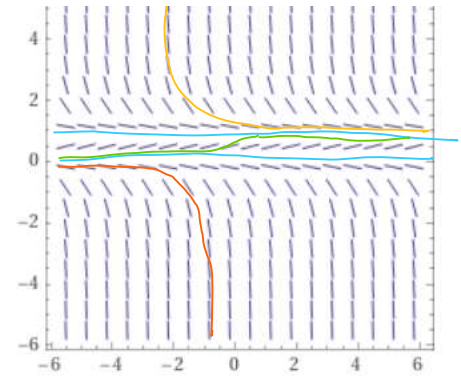
$$\Rightarrow x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$$

$$x' \rightarrow -\infty$$



$$x' \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$



③ Доведено је да $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2})$ није повлачица нити је једног
оменигача (од)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\hat{11}$$
$$x' = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y' = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$$

не вани тинар зор $X(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

generale $x_2 = (0, 0) \leadsto f(x_2) = (0, 0)$

$$\|f(x_n)\| \leq L \|x_n\|$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = (x_1, y_1) \\ x_2 = (x_2, y_2) \end{array} \right\} \text{ y o'quvchi } (0, 0)$$

|| - уриман еуклидску норму

$$\|(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \sqrt{x_1^2 + y_1^2})\| \leq L \|(x_1, y_1)\|$$

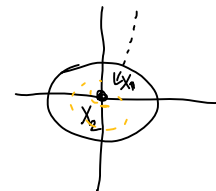
$$\sqrt{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 + (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2} \leq L \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2} / 2$$

$$x_1^2 + y_1^2 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq L^2 (x_1^2 + y_1^2) \quad / : (x_1^2 + y_1^2)$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \leq L^2$$

lim $\frac{1}{\sqrt{x}}$ as $x \rightarrow 0^+$ = ∞

$$\left. \begin{array}{l} \infty \leq L^2 \in \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \end{array} \right\}$$


$$X_1 \neq (0, 0)$$

am $X_1 \rightarrow (0,0)$

$$\lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \infty \quad \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} \text{) } \\ \text{ ⚡ } \end{array} \right\}$$

④ Φορμπαίνι με υπέρβαση με γωνία τυράφια T με υπόδειξη

$$a) x' = \frac{x}{t}, x(t_0) = x_0, t_0 > 0$$

$$b) x' = Ax, A \in M_n(\mathbb{R}), x(0) = x_0$$

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(x_n(s), s) ds,$$

$$b) x_0(t) = x_0 \quad F(x, t) = A \cdot x$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t A x_0(s) ds = x_0 + \int_0^t A x_0 ds = x_0 + A x_0 \cdot s \Big|_0^t = x_0 + t A x_0$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t A x_1(s) ds = x_0 + \int_0^t A (x_0 + s A x_0) ds = x_0 + t A x_0 + \frac{1^2}{2} A^2 x_0 \Big|_0^t = x_0 + t A x_0 + \frac{t^2}{2} A^2 x_0$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t A x_2(s) ds = x_0 + \int_0^t A (x_0 + s A x_0 + \frac{1^2}{2} A^2 x_0) ds = x_0 + t A x_0 + \frac{t^2}{2} A^2 x_0 + \frac{t^3}{6} A^3 x_0$$

⋮

$$\text{αναγκασμένη (σταθερά)} \quad x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k x_0$$

$$x_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_0 = \underline{\underline{e^{tA} x_0}}$$

$$d) x_0(t) \equiv x_0, \quad F(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x_0(s), s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{x_0(s)}{s} ds = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{x_0}{s} ds = x_0 + x_0 \ln \frac{t}{t_0}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t \frac{x_0 + x_0 \ln \frac{s}{t_0}}{s} ds = x_0 + x_0 \ln s \Big|_{t_0}^t + x_0 \cdot \int_{t_0}^t \frac{\ln \frac{s}{t_0}}{s} ds = \\ &= x_0 + x_0 \ln \frac{t}{t_0} + \int_0^{\ln \frac{t}{t_0}} u du = x_0 + x_0 \ln \frac{t}{t_0} + x_0 \frac{\ln^2 \frac{t}{t_0}}{2} \end{aligned}$$

$\leftarrow u = \ln \frac{s}{t_0}, du = \frac{ds}{s}$

$$\text{Αναγκασμένη: } x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{x_0}{k!} \ln^k \frac{t}{t_0}$$

Induktionsanfang: $x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{x_0}{k!} \ln^k \frac{t}{t_0}$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{x_n(\tau)}{\tau} d\tau = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\sum_{k=0}^n \frac{x_0}{k!} \ln^k \frac{\tau}{t_0}}{\tau} d\tau = x_0 + x_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_{t_0}^t \frac{\ln^k \frac{\tau}{t_0}}{\tau} d\tau =$$

$$= x_0 + x_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\ln^{k+1} \frac{t}{t_0}}{k+1} = x_0 + x_0 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln^k \frac{t}{t_0}}{k!} = x_0 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\ln^k \frac{t}{t_0}}{k!} \quad \checkmark$$

$\int_{t_0}^t \frac{\ln^k \frac{\tau}{t_0}}{\tau} d\tau = \dots = \frac{\ln^{k+1} \frac{t}{t_0}}{k+1}$

Ansatz: $u = \ln \frac{t}{t_0}, \quad du = \frac{dt}{t}$

$$x_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_0 \cdot \frac{\ln^k \frac{t}{t_0}}{k!} = x_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k \frac{t}{t_0}}{k!} = x_0 \cdot e^{\ln \frac{t}{t_0}} = x_0 \cdot \frac{t}{t_0} \Rightarrow x_\infty(t) = \frac{x_0}{t_0} \cdot t$$