Т (Гронволова неједнакост) $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне и $v \geq 0$. Ако $\exists c \in \mathbb{R}$ тд.

$$u(t) \leq c + \int_a^t u(s) \cdot v(s)\, ds \quad , \forall t \in [a,b] \quad , \text{онда} \quad u(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t v(s)\, ds} \quad , \forall t \in [a,b].$$

Т (непрекидност тока) Ако је $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ глобално униформно липшицово, $x(t), y(t)$ решења $x' = F(x,t)$, онда ($t_0 \in I$) (L-Лип. конста)

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \cdot e^{L|t-t_0|}$$

Доказ: НЗА фја: $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)\, ds = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(s), s)\, ds$

$$\|x(t) - y(t)\| = \| x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(s), s) - F(y(s), s)\, ds \| \leq$$

$$\leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \underbrace{\|F(x(s), s) - F(y(s), s)\|}_{\leq L \cdot \|x(s) - y(s)\|} ds$$

$u(t) = \|x(t) - y(t)\|$

$c = \|x(t_0) - y(t_0)\|$

$v(t) \equiv L$

Гронвол $\Rightarrow \quad \|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \cdot e^{L \cdot |t-t_0|}$

① $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ глобално униформно липшицово, $x(t), y(t)$ такви да ($\varepsilon > 0$) (L-Лип. конста)

$x'(t) = F(t, x(t))$ и $\|y'(t) - F(t, y(t))\| < \varepsilon$.

Доказати: а) $\|x(t) - y(t)\| \leq \left(\|x(t_0) - y(t_0)\| + \varepsilon \cdot |t - t_0|\right) \cdot e^{L|t-t_0|}$

б) $\|x(t) - y(t)\| \leq \left(\|x(t_0) - y(t_0)\| + \frac{\varepsilon}{L}\right) \cdot e^{L|t-t_0|} - \frac{\varepsilon}{L}$

а) $u(t) = x(t) - y(t)$

$$\|u(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t u'(s)\, ds + u(t_0) \right\| \leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|u'(s)\|\, ds = \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|F(s, x(s)) - y'(s)\|\, ds$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \left(\|F(s, x(s)) - F(s, y(s))\| + \|F(s, y(s)) - y'(s)\| \right) ds$$

$$\leq \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \varepsilon\, ds + \int_{t_0}^t L \cdot \|x(s) - y(s)\|\, ds$$

$$= \|u(t_0)\| + \varepsilon \cdot |t - t_0| + L \cdot \int_{t_0}^t \|u(s)\|\, ds$$

$$\leq \left(\|u(t_0)\| + \varepsilon \cdot |t - t_0|\right) \cdot e^{L|t-t_0|}$$

$= \|u(t_0)\| \cdot \qquad\qquad t_0$

Гронвол $\Rightarrow \|u(t)\| \le \left(\|u(t_0)\| + \underbrace{\varepsilon \cdot |t-t_0|}\right) \cdot e^{L|t-t_0|}$

↳ во се може ограничити константата на секаков конечен интервал (урадимо за конечне интервале и така покупимо све $t \in I$)

б) слично као а)

T (Глаткост тока) Ако је F класе C^k, онда је његов ток класе C^k.

② Испитати глаткост $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и њеног тока.

$$F(x) = \begin{cases} x^3, & x \ge 0 \\ -x^3, & x \le 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \ge 0 \\ -3x^2, & x \le 0 \end{cases} \in C(\mathbb{R})$$

$$F''(x) = \begin{cases} 6x, & x \ge 0 \\ -6x, & x \le 0 \end{cases} = 6|x| \in C(\mathbb{R}), \text{ али није диф.}$$

$\Rightarrow F \in C^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{T}$ ток је бар класе C^2.

$$y' = F(y) = \begin{cases} y^3, & y \ge 0 \\ -y^3, & y \le 0 \end{cases}$$

$y \equiv 0$ решење $\Rightarrow$ следамо одвојено $y > 0$ и $y < 0$.

Тикар

$y > 0$: $y' = y^3 \Rightarrow y' y^{-3} = 1 \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = t + C \Rightarrow y^{-2} = -2t - 2C \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{-2C-2t}}$

$y < 0$: $y' = -y^3 \Rightarrow \dots \; y = -\frac{1}{\sqrt{2C+2t}}$

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{-2C}} = x \Rightarrow C = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\phi^t(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 2t}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2t}}, & x < 0 \end{cases}$$

Ток је класе C^∞.