Metoda prvih integrala

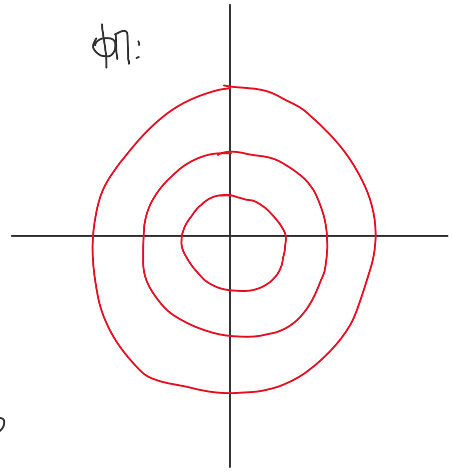
пр $x_1' = x_2$
$x_2' = -x_1$

$$\begin{cases} x_1 = c_1\cos t + c_2 \sin t \\ x_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}$$

експлицитно решење

имплицитно решење. $\underline{x_1^2+x_2^2 = c}$, $c>0$

ФП:



Деф Први интеграл система је фја ψ која је константна дуж решења

Овде је $\psi(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$, јер $\psi(x_1(t),x_2(t)) = c$.

Аутономни систем ДЈ реда n има $n-1$ независних првих интеграла.

$\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ – први интеграли

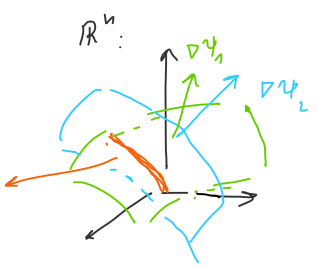
и потребно је да буду независни

→ значи да се хиперповрши $\psi_i = c_i$ секу трансверзално

(M, $\operatorname{codim} M = 1 = n - \dim M$)

$\psi_1 = c_1$ → одређује многострукост (површ) димензије $n-1$

$\psi_2 = c_2$ → –||–



пресек је $\dim = n-2$

(ако се секу трансверзално)

први интеграли независни $\iff$ све $\psi_1=c_1,\dots,\psi_{n-1}=c_{n-1}$ се секу трансверзално

$\iff$ $\nabla\psi_1,\dots,\nabla\psi_{n-1}$ у тачкама пресека независни

Систем карактеристика (*):

квазилинеарна (КЛ): $a_1(x_1,\dots,x_n,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1,\dots,x_n,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = c(x_1,\dots,x_n,u)$

(КЛ) $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} x_j'(t) &= a_j(x_1,\dots,x_n,u) \\ u'(t) &= c(x_1,\dots,x_n,u) \end{aligned}\right\}$ $n+1$ једначина → n првих интеграла

Хомогена линеарна (ХЛ): $a_1(x_1,\dots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0$

(ХЛ) $\Rightarrow$ $\quad x_j'(t)=a_j(x_1,\dots,x_n)\ \}$ n једначина $\longrightarrow$ n−1 првих интеграла

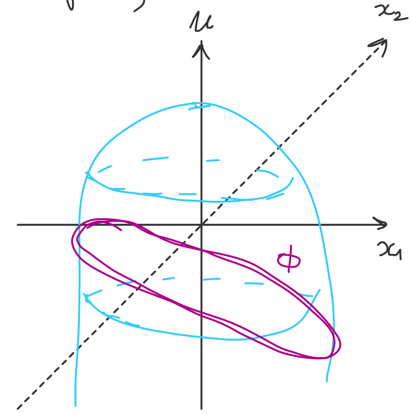
идеја: у систему (*) наћи прве интеграле који су независни

$\boxed{\text{ОР}: u=\varphi(\psi_1,\dots,\psi_{n-1}),\ \varphi\in C^1(\mathbb{R}^{n-1})}$ $\hookrightarrow$ за (ХЛ) једначину

$\boxed{\text{ОР}: \varphi(\psi_1,\dots,\psi_n)=0,\ \varphi\in C^1(\mathbb{R}^2)}$ $\hookrightarrow$ за (КЛ) једначину (имплицитно је задато)

Кошијев проблем: наћи решење које садржи задату фигуру Φ

$\Phi\subseteq\Gamma(u)$



① $\quad x(y^2-z^2)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-y(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

$u\big|_{x=1}=\underline{(y+z)^2}$ $\hookrightarrow$ површ

$u(1,y,z)=(y+z)^2$

$(1,y,z,(y+z)^2)\in\Gamma(u)\subseteq\mathbb{R}^4$

ОР? $\quad$ (ХЛ) $\quad u(x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned} x'&=x(y^2-z^2)\\ y'&=-y(x^2+z^2)\\ z'&=z(x^2+y^2)\end{aligned}\right\}\quad 2 \text{ прва интеграла } \psi_1,\psi_2$$

$x'=x(y^2-z^2)$
$y'=-y(x^2+z^2)$ $\rightsquigarrow$
$z'=z(x^2+y^2)$

$x'_z=\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{x'}{z'}=\dfrac{x(y^2-z^2)}{z(x^2+y^2)}$

$y'_z=-\dfrac{y(x^2+z^2)}{z(x^2+y^2)}$ $\Big\}\longrightarrow$ 2 прва инт.

домаћи: наћи ψ_1 и ψ_2 и показати да су нез.

$\alpha x x' + \beta y y' = --$

$\frac{\alpha x'}{x} + \frac{\beta y'}{y} = --$

$\psi_1 = x^2+y^2+z^2$

$\psi_2 = \frac{yz}{x}$

Наћи φ тд задовољава Кошијев услов!

$$u(1,y,z) = (y+z)^2$$
$$\parallel$$
$$\varphi(\underbrace{\psi_1(1,y,z)}_{\overline{\psi}_1}, \underbrace{\psi_2(1,y,z)}_{\overline{\psi}_2})$$

φ? тд $\varphi(1+y^2+z^2, yz) = (y+z)^2 = y^2+z^2+2yz$

$$\varphi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2) = \overline{\psi}_1 - 1 + 2\overline{\psi}_2$$

Кошијево реш $u = \varphi(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 - 1 + 2\psi_2 = x^2+y^2+z^2-1+\frac{2yz}{x}$

(2) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$; $z=1$, $xy = x+y$

$x' = x^2$

$y' = y^2$

$z' = -z^2$

[пробати - експлицитно решити систем, а онда наћи прве интеграле]

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x'}{y'} = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad / \int$$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

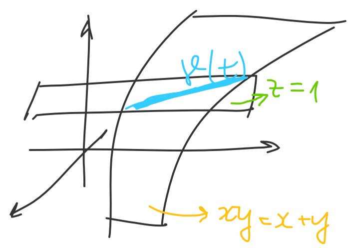
$$\frac{dx}{dz} = \frac{x'}{z'} = -\frac{x^2}{z^2} \quad --- \quad \psi_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\nabla\psi_1 = \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, 0\right)$$

$$\nabla\psi_2 = \left(-\frac{1}{x^2}, 0, -\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\nabla\psi_1 \times \nabla\psi_2 = -\frac{1}{y^2z^2}\vec{i} - \frac{1}{x^2z^2}\vec{j} + \frac{1}{x^2y^2}\vec{k} \neq 0 \quad \Rightarrow \psi_1 \text{ и } \psi_2 \text{ нез!}$$

КР: Наћи φ тд $\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0$ и ово садржи криву $\left.\begin{matrix} z=1 \\ xy = x+y \end{matrix}\right\}$



$\gamma(t) = \left(t, \frac{t}{t-1}, 1\right)$ ← $z=1$

$$xy = x+y$$
$$y(x-1) = x$$
$$y = \frac{x}{x-1}$$

φ? тд $\varphi(\psi_1|_\gamma, \psi_2|_\gamma) = 0$

$$\varphi(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\frac{2}{t} - 1, \frac{1}{t} + 1\right) = 0, \quad \varphi(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2) = -\overline{\Psi}_1 + 2\overline{\Psi}_2 - 3$$

$$\overline{\Psi}_1 = \psi_1|_\gamma = \frac{1}{t} - \frac{t-1}{t} = \frac{2}{t} - 1$$

$$\overline{\Psi}_2 = \psi_2|_\gamma = \frac{1}{t} + 1$$

$\Rightarrow$ КР: $\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0$

$$-\psi_1 + 2\psi_2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 3$$ ← имплицитно задато

Овде може чак експл.: $z = \ldots = \dfrac{2}{3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}$

○ $x(x^2+3y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + y(3x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z(x^2+y^2)$, $xy = z$

$$x(x^2+3y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+y(3x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=2z(x^2+y^2)$$

$$\begin{cases} xy=z \\ x^2-y^2=z^2 \end{cases}$$

$$x'=x(x^2+3y^2)$$
$$y'=y(3x^2+y^2)\quad \rightsquigarrow \psi_1 \text{ и } \psi_2\ ?$$
$$z'=2z(x^2+y^2)$$

$$\int \frac{x'}{x}\,dt=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\frac{x'}{x}+\frac{y'}{y}=(x^2+3y^2)+(3x^2+y^2)=4(x^2+y^2)=2\frac{z'}{z}\ \Big/\int dt$$

$$\ln|x|+\ln|y|=2\ln|z|+c_1$$

$$\psi_1=\frac{xy}{z^2}$$

$$xx'-yy'=x^2(x^2+3y^2)-y^2(3x^2+y^2)=x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x^2-y^2)\cdot\frac{z'}{2z}$$

$$\frac{2xx'-2yy'}{x^2-y^2}=\frac{z'}{z}\ \Big/\int dt \Rightarrow \int d(\ln|x^2-y^2|)=\int d(\ln|z|)$$

$$\Downarrow$$

$$(\ln|x^2-y^2|)'=\frac{1}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)'=\frac{2xx'-2yy'}{x^2-y^2}$$

$$\ln|x^2-y^2|=\ln|z|+c_2$$

$$\psi_2=\frac{x^2-y^2}{z}$$

ψ_1,ψ_2 нез. ← доказати

$$\text{OP: } \varphi(\psi_1,\psi_2)=0,\quad \varphi\in C^1(\mathbb{R}^2)$$

КР? $\left.\begin{matrix} xy=z \\ x^2-y^2=z^2 \end{matrix}\right\}$ у пресеку крива c

$$\overline{\psi_1}=\psi_1\big|_c=\left(\frac{xy}{z^2}\right)\Big|_c=\frac{z}{z^2}=\frac{1}{z}$$

$$\psi_1 = \psi_1\Big|_C = \left(\frac{xy}{z^2}\right)\Bigg|_C \underset{xy = z}{=} \frac{z}{z^2} = \frac{1}{z}$$

$$\overline{\psi_2} = \psi_2\Big|_C = \left(\frac{x^2-y^2}{z}\right)\Bigg|_C \underset{x^2-y^2=z^2}{=} \frac{z^2}{z} = z$$

записати $\overline{\psi_1}$ и $\overline{\psi_2}$ преко 1 параметра

$$\varphi(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = 0 \qquad \varphi(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}) = \overline{\psi_1}\,\overline{\psi_2} - 1$$

$$\overline{\psi_1} = \frac{1}{z}, \quad \overline{\psi_2} = z$$

Кош реш $\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0$

$$\psi_1 \psi_2 - 1 = 0$$

$$\frac{xy}{z^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{z} = 1 \Rightarrow z^3 = xy(x^2-y^2)$$