

$$y' = f(x, y)$$
$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$
$$y_2' = f_2(x_1, y_1, \dots, y_n)$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

→ системна жна у које филтрирају

$$x, y, y', y'', y''', \dots$$

$$\begin{cases} y''' = 2y'' + y' + z' + 2x - 1 \\ z'' = y' \sin x + \cos(y' z') \end{cases}$$

as Kettenschwinge. y_7 u. zou. y', y'', z'

→ für 2. Zeile:

$$y_2' = x \cdot (y_2 + y + z_1) + 2x - 1$$
$$z_1' = y_1 \cdot \sin x + \cos(y \cdot z_1)$$

Do you join 3 me?

зодіако из
двух уснова

$$y' = y_1$$

$$y_1' = (y_1')' = y_1'' = y_2$$

$$z^1 = z_1$$

$$y' = y_1$$

$$y_1' = y_2$$

$$y' = x y_2 + y + z_1 + 2x - 1$$

$$Z' = Z_1$$

$$z_1' = y_1 \cdot \sin x + \cos(y \cdot z_1)$$

статусе реда 5

② Методом исключения решить систему ДУ.

а) $y' = py - qz$
 $z' = qy + pz$ $p, q \in \mathbb{R}, \neq 0$

б) $y_1' = y_2$
 $y_2' = y_1$
 $y_3' = y_1 + y_2 + y_3$

используем из первого уравнения
 и подставим в второе

а) имеем 2 уравнения $\rightarrow$ 1 уравнение порядка 2

$y' = py - qz$ $\Rightarrow qz = py - y' / q (\neq 0)$

$z = \frac{py - y'}{q} \Rightarrow z' = \frac{py' - y''}{q}$
 $z' = qy + pz$

$\frac{py' - y''}{q} = qy + p \frac{py - y'}{q}$

$py' - y'' = q^2 y + p^2 y - py'$

$y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0 \rightarrow \text{ДЗ 2 порядка}$

$\Rightarrow \text{ОП. } y(x) = c_1 e^{px} \cos qx + c_2 e^{px} \sin qx, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$z = \frac{py - y'}{q} = \dots = c_1 e^{px} \sin qx - c_2 e^{px} \cos qx$

$y' = c_1 (e^{px})' \cos qx + c_1 e^{px} (\cos qx)' + c_2 (e^{px})' \sin qx + c_2 e^{px} (\sin qx)' =$
 $= c_1 p e^{px} \cos qx - c_1 q e^{px} \sin qx + c_2 p e^{px} \sin qx + c_2 q e^{px} \cos qx$

б) $y_1' = y_2$
 $y_2' = y_1$ } $\rightarrow 2 \text{ уравнения, 2 независимые}$
 $y_3' = y_1 + y_2 + y_3$

$y_2 = y_1' \Rightarrow y_2' = y_1''$
 $\dots \dots \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 2p\lambda + (p^2 + q^2) = 0$
 $D = (-2p)^2 - 4(p^2 + q^2) =$
 $= -4q^2 < 0$
 $\lambda_{1/2} = \frac{2p \pm i \cdot 2q}{2} = p \pm iq$

$$y_3' - y_3 = y_1 + y_2 = 2e^x$$

$$y_2 = y_1' \Rightarrow y_2' = y_1''$$

$$y_2' = y_1' \Rightarrow y_1'' = y_1 \Rightarrow y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_2(x) = y_1'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

$$y_3' - y_3 = y_1 + y_2 = 2e^x$$

$$p(x) = -1$$

$$q(x) = 2e^x$$

$$\int p(x) dx = -x$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx = \int 2e^x \cdot e^{-x} dx = \int 2 dx = 2x + C_3$$

$$y_3 = e^{-\int p(x) dx} \cdot \left(C_3 + \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \right) = e^x (C_3 + 2x)$$

$$C_3 \in \mathbb{R}$$

③ Попробуйте определить какие из данных преобразованных систем являются автономными

$$\begin{cases} 2\sqrt{x} y' = 2y - z \\ 2\sqrt{x} z' = y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy_1' = y_1 + y_2 \\ xy_2' = y_2 \\ xy_3' = -y_3 \end{cases}$$

находим 5.

$$xy_2' = y_2$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{x} \quad (пр) \dots$$

$$\frac{y_3'}{y_3} = -\frac{1}{x} \quad (пр) \dots$$

можно же и гиперинтер

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y' = F(x, y), \quad F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$f(x). y' = F(x, y)$$

$$f(x) = 2\sqrt{x}, x$$

$$x \rightsquigarrow t$$

$$x(t), t(x)$$

$$\frac{d}{dx} y \rightsquigarrow \frac{d}{dt} y$$

$$\text{получим.} \quad f(x) \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dt} y$$

$$y_1 \text{ интегрируем.} \quad f(x) \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$f(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)} \quad (пр)$$

$$f(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)} \quad (pn)$$

$$t = \int \frac{dx}{f(x)}$$

$$2) \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow t = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$t(x) = \sqrt{x}, \quad x(t) = t^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} \cdot y' = 2\sqrt{x} \quad \frac{dy}{dz} = 2\sqrt{x} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dt}{dx} = 2\sqrt{x} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{dt}$$

$$y_t' = \frac{dy}{dt} = 2y - z \Rightarrow z = 2y - y_t' \Rightarrow z_t' = 2y_t' - y_t''$$

$$z_t' = \frac{dz}{dt} = y + 2z$$

$$\Rightarrow 2y_t' - y_t'' = y + 4y - 2y_t'$$

$$y_t'' - 4y_t' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4 < 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_t'(t) = \dots$$

$$z(t) = 2y - y_t' = \dots$$

$$OP: \quad \left. \begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + c_2 e^{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \\ z(x) &= -c_2 e^{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + c_1 e^{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \end{aligned} \right\} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

$$x=0: \quad \left. \begin{aligned} 2y(0) - z(0) &= 0 \\ y(0) + 2z(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad y(0) = z(0) = 0 \rightarrow \text{не могу ее для решения определить у нуля}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad xy_1' &= y_1 + y_2 \\ xy_2' &= y_2 \\ xy_3' &= -y_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=0: y_1(0) + y_2(0) &= y_2(0) = -y_3(0) = 0 \\ \Rightarrow y_1(0) &= y_2(0) = y_3(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$t = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$1^\circ x > 0, \quad t = \ln x, \quad x = e^t$$

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot x = \frac{dy_1}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{dy_1}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} 2^\circ x < 0, \quad t = \ln(-x), \quad x = -e^t \\ \vdots \\ \text{probleme} \end{aligned} \right\}$$

$$y_1' = y_1 + y_2$$

$$y_2' = y_2 \Rightarrow y_2(t) = c_1 e^t$$

$$y_3' = -y_3 \Rightarrow y_3(t) = c_2 e^{-t}$$

$$y_1' = y_1 + c_1 e^t$$

$$y_1(t) = e^t (c_3 + c_1 t)$$

$$\text{OP } y(x) = \begin{bmatrix} x(c_3 + c_1 \ln x) \\ c_1 x \\ \frac{c_2}{x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

④ Методом исключения решить систему ДУ

$$a) \quad y' = 1 - \frac{1}{z}$$

$$z' = \frac{1}{y-x}$$

$$b) \quad 2zy' = y^2 - z^2 + 1$$

$$z' = y + z$$

$$a) \quad z \neq 0$$

$$y \neq x$$

$$\frac{1}{z'} = y - x \Rightarrow y = x + \frac{1}{z'} \quad /'$$

$$z' \neq 0$$

$$y' = 1 + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{z'} \right) = 1 + \left(-\frac{1}{z'^2} \right) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{z''}{(z')^2}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{z}$$

$$1 + \frac{z''}{(z')^2} = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow (z')^2 = z'' z \quad \leftarrow \text{неделя 2-го (нема x)}$$

$$\frac{z'' \cdot z - (z')^2}{z^2} = 0$$

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{(z')' \cdot z - z' (z')'}{z^2} = \frac{z'' z - (z')^2}{z^2}$$

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = 0$$

$$\frac{z'}{z} = C_1 \quad \int, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|z| = C_1 x + C_2$$

$$|z| = e^{C_1 x} e^{C_2}$$

$$z = C_3 e^{C_1 x} \quad , C_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$z' = C_3 \cdot C_1 e^{C_1 x} \quad C_1 \neq 0$$

$$y = x + \frac{1}{C_1 C_3 e^{C_1 x}}$$

$$b) \quad 2zy' = y^2 - z^2 + 1$$

$$z' = y + z \longrightarrow \begin{cases} y = z' - z \\ y' = z'' - z' \end{cases}$$

$$2z(z'' - z') = (z' - z)^2 - z^2 + 1$$

$$2zz'' - 2zz' = z'^2 - 2zz' + z^2 - z^2 + 1$$

$$2zz'' = z'^2 + 1 \quad \leftarrow \text{неделя 2-го (нема x)}$$

$$2z \cdot u' u = u^2 + 1$$

$$\frac{2u'u}{u^2+1} = \frac{1}{z} \quad (pn)$$

$$\int \frac{2u du}{u^2+1} = \int \frac{dz}{z}$$

$$\ln(u^2+1) = \ln|z| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$u^2+1 = |z| e^{C_1} = C_2 \cdot z, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$z'^2 + 1 = C_2 z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{СМЕНА. } u(z) = z' \\ u'(z) = \frac{d}{dz}(z') = \frac{dz'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = z'' \cdot \frac{1}{\frac{dz}{dx}} = \frac{z''}{z'} \\ z'' = u' \cdot z' = u' u \end{array} \right.$$

$$z'^2 = c_2 z - 1$$

$$(c_2 z - 1 \geq 0)$$

$$z' = \pm \sqrt{c_2 z - 1}$$

$$1^o \quad z' = \sqrt{c_2 z - 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{c_2 z - 1}} = dx \quad / \int$$

$$2^o \quad z' = -\sqrt{c_2 z - 1}$$

$$\frac{1}{c_2} 2\sqrt{c_2 z - 1} = x + c_3$$

$\Downarrow$

$$z = \frac{1}{c_2} \left(1 + \frac{c_2^2}{4} (x + c_3)^2 \right) \Rightarrow z' = \dots = \frac{c_2}{2} (x + c_3)$$

$$y = z' - z = \dots = \frac{c_2}{2} (x + c_3) - \frac{1}{c_2} - \frac{c_2}{4} (x + c_3)^2$$

наблюдена: НЕ получается $y(x)$ как $y' = \frac{y^2 - z^2 + 1}{2z} = \frac{(z' - z)^2 - z^2 + 1}{2z}$

или

$$y' = z'' - z'$$

пер. в сдв. форму получ 1 константу

имеем 2 пара $\leadsto$ зависит от 2 констант