Linearne DJ 2. reda

Једначине облика $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=f(t)$

$f(t)$ = нехомогени део

$a(t), b(t)$ = коефицијенти (непр. фје)

Хомогене са константним коефицијентима (КК)

$a, b\in\mathbb{R}$ $\qquad x''+ax'+bx=0$

карактеристична јна: $\lambda^2+a\lambda+b=0$ ⇝ има нуле λ_1,λ_2

1° $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ $\qquad$ ОР: $x_H(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

2° $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ $\qquad$ ОР: $x_H(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

3° $\lambda_{1/2}=\alpha\pm i\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ $\qquad$ ОР: $x_H(t)=c_1e^{\alpha t}\cos\beta t+c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

① Решити почетне проблеме:

а) $x''-9x=0$, $\quad x(0)=2,\ x'(0)=-1$ → почетни проблем: у истој тачки x и x'

б) $x''-4x'+4x=0$, $\quad x(0)=12,\ x'(0)=-3$

в) $x''+16x=0$, $\quad x(\frac{\pi}{2})=-10,\ x'(\frac{\pi}{2})=3$

б) $x''-4x'+4x=0$

$\Updownarrow$

$\lambda^2-4\lambda+4=0$

$(\lambda-2)^2=0 \qquad \lambda_1=\lambda_2=2 \implies$ ОР: $x(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$x(0)=c_1=12$

$x'(t)=c_1\cdot 2\cdot e^{2t}+c_2(te^{2t})'=2c_1e^{2t}+c_2e^{2t}+2c_2te^{2t}$

$x'(0)=2c_1+c_2=-3$

$c_2=-27$ $\qquad$ ПР: $x(t)=12e^{2t}-27te^{2t}$

Опште хомогене $\qquad x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$

ОР је увек облика $x_H(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ за неке фје φ_1,φ_2

некад немамо начин да одредимо φ_1 и φ_2 (као у случају КК)

Абелова формула $\quad$ Ако знамо φ_1, одређујемо $\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\cdot\int\frac{e^{-\int a(t)dt}}{\varphi_1(t)^2}dt$

<u>Абелова формула</u> Ако знамо φ_1, одређујемо $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \int \frac{e^{\dots}}{\varphi_1(t)^2} dt$

извођење: $W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$

израчуна се $W'(t) = -a(t) \cdot W(t) \Rightarrow W(t) = c \cdot e^{-\int a(t)dt}$

израчуна се $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' = \frac{W(t)}{\varphi_1(t)^2} \Rightarrow \varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \int \frac{W(t)}{\varphi_1(t)^2} dt$

2. Решити дј. $tx'' + 2x' + tx = 0$ ако је познато једно решење $\varphi_1(t) = \frac{\sin t}{t}$.

$$x'' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{a(t)} x' + x = 0$$

Абелова фла: $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int a(t)\,dt}}{\varphi_1(t)^2} dt$

$$\int a(t)dt = \int \frac{2}{t} dt = 2\ln|t| + c = \ln t^2 + c$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \int \frac{e^{-\ln t^2}}{\sin^2 t} \cdot t^2 dt = \frac{\sin t}{t} \int \frac{1}{t^2 \sin^2 t} t^2 dt = \frac{\sin t}{t} \underbrace{\int \frac{dt}{\sin^2 t}}_{-\operatorname{ctg} t} = -\frac{\cos t}{t}$$

ОР: $x(t) = c_1 \frac{\sin t}{t} + c_2 \frac{\cos t}{t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

<u>Нехомогене јне</u> $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t)$

ОР: $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

ОР хомогене

ПР нехомогене

За ПР нехомогене радимо <u>метод варијације константе</u>, под условом да знамо ОР хомогене $x_H(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$.

варирамо константе

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$$

$$x' = c_1'\varphi_1 + c_1\varphi_1' + c_2'\varphi_2 + c_2\varphi_2'$$

$$x'' = c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2''$$

$$x'' + ax' + bx = f \Rightarrow$$

$$c_1(\underbrace{\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{\varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2}_{=0}) +$$

$x'' + ax' + bx = f \Rightarrow$

$$c_1(\underbrace{\varphi_1'' + a\varphi_1' + b\varphi_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{\varphi_2'' + a\varphi_2' + b\varphi_2}_{=0}) +$$

$$+ \boxed{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2} + c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' = f$$

↳ ово узмемо да је $= 0$

$$\boxed{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0} \Rightarrow c_1''\varphi_1 + c_1'\varphi_1' + c_2''\varphi_2 + c_2'\varphi_2' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = f}$$

може се записати матрично:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Систем по (c_1', c_2') који умемо да решимо!

③ а) $x'' + 4x = 2\operatorname{tg} t$

б) $t^2x'' - tx' + 4x = \cos(\ln t) + t\sin(\ln t)$, ако се једно решење хомогене једначине може наћи у облику $\varphi_1(t) = t\cos(\alpha \ln t)$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$.

а) хом: $x'' + 4x = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2i$

$x_H(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$

$\varphi_1 = \cos 2t$ $\quad \varphi_1' = -2\sin 2t$

$\varphi_2 = \sin 2t$ $\quad \varphi_2' = 2\cos 2t$

нехом: $f(t) = 2\operatorname{tg} t$

решавамо:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2t \cdot c_1' + \sin 2t \cdot c_2' &= 0 \\ -2\sin 2t \cdot c_1' + 2\cos 2t \cdot c_2' &= 2\operatorname{tg} t \end{aligned}\right\}$$

$$c_2' = -\frac{\cos 2t}{\sin 2t} \cdot c_1'$$

$$-2\sin 2t \cdot c_1' + 2\cos 2t \cdot \left(-\frac{\cos 2t}{\sin 2t}\right) \cdot c_1' = 2\operatorname{tg} t$$

$$c_1' \cdot \frac{-\cancel{2}\sin^2 2t - \cancel{2}\cos^2 2t}{\sin 2t} = \cancel{2}\operatorname{tg} t \Rightarrow c_1' = -2\sin t\cancel{\cos t} \cdot \frac{\sin t}{\cancel{\cos t}} = -2\sin^2 t$$

$$c_1(t) = \int -2\sin^2 t\,dt = \int (\cos 2t - 1)\,dt = -t + \frac{1}{2}\sin 2t + C_1$$

$$c_2'(t) = -\operatorname{tg} 2t \cdot (-2\sin^2 t) = 2\operatorname{tg} 2t \cdot \sin^2 t \Rightarrow \ldots \quad c_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + \ln|\cos t| + C_2$$

ОР: $x(t) = \left(-t + \frac{1}{2}\sin 2t + C_1\right) \cdot \cos 2t + \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \ln|\cos t| + C_2\right) \cdot \sin 2t =$

$\ldots \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

ОР: $x(t) = \left(-t + \frac{1}{2}\sin 2t + c_1\right)\cdot \cos 2t + \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \ln|\cos t| + c_2\right)\cdot \sin 2t =$

$= c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t - t\cos 2t + \ln|\cos t|\cdot \sin 2t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

б) $t^2 x'' - t x' + 4x = 0$

$\varphi_1(t) = t\cos(\alpha \ln t)$

$\varphi_1' = \cos(\alpha \ln t) + t\left(-\sin(\alpha \ln t)\right)\cdot\alpha\cdot\frac{1}{t} = \cos(\alpha \ln t) - \alpha\sin(\alpha\ln t)$

$\varphi_1'' = -\alpha\sin(\alpha \ln t)\cdot\frac{1}{t} - \alpha\cos(\alpha\ln t)\cdot\frac{\alpha}{t}$

$-\alpha t \cancel{\sin(\alpha \ln t)} - \alpha^2 t\cos(\alpha\ln t) - t\cos(\alpha \ln t) + \alpha t\cancel{\sin(\alpha\ln t)} + 4t\cos(\alpha\ln t) = 0$

$\cos(\alpha \ln t)\cdot t\cdot \underbrace{\left(-\alpha^2 - 1 + 4\right)} = 0$

$-\alpha^2 + 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{3}$ напр. $\alpha = \sqrt{3}$

$\varphi_1(t) = t\cdot\cos(\sqrt{3}\ln t) \xrightarrow[\text{Абел}]{} \varphi_2(t) = \ldots = t\cdot\sin(\sqrt{3}\ln t)$

решение: $x(t) = c_1 t\cos(\sqrt{3}\ln t) + c_2 t\sin(\sqrt{3}\ln t) + \frac{3}{13}\cos(\ln t) - \frac{2}{13}\sin(\ln t) + \frac{1}{2}x\sin(\ln t)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$