

$$X' = AX, A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{op. } X(t) = e^{tA} c, c \in \mathbb{R}^n$$

$$A = P \cdot \boxed{D} \cdot P^{-1}$$

→ у Жордановой нормальной форме ($A \sim D$)

P - матрица перехода

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} \stackrel{(*)}{=} P e^{tD} P^{-1}$$

→ знаем же выражения

$$\textcircled{2} \quad x_1' = x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_2' = x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_3' = 2x_1 - x_2$$

а) найти op

б) найти np $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{a) } X' = AX, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + \underline{2-1} - 2(1-\lambda) - \underline{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 + 1 - 2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1 \rightarrow$ решение и разложение: D - диагональ
 P - 3 столбца

$$D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^t \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1: (A - \lambda_1 E) x_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2a - b + c = 0$$

$$a + 2b - c = 0$$

$$2a - b + c = 0$$

$\vdots$

$$b = -3a$$

$$c = -5a$$

$$\begin{bmatrix} a \\ -3a \\ -5a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow a=1$
 $\leftarrow$

```
>> A=[1 -1 1; 1 1 -1; 2 -1 0]
A =
     1     -1     1
     1      1     -1
     2     -1      0

>> eig(A)

ans =

-1.0000
 1.0000
 2.0000
```

$$c = -5a \quad L[-5a] = a \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{with } a=1 \quad \vec{x}_1$$

$$\lambda_2 = 2: \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = 1: \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\vec{x}_1 \mid \vec{x}_2 \mid \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{matrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.1690 & -0.5774 & 0.7071 \\ -0.5071 & -0.5774 & 0.0000 \\ -0.8452 & -0.5774 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = ?$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{Adj} P = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{OP: } X(t) = e^{tA} \cdot c = P \cdot e^{tD} \cdot \underbrace{P^{-1} c}_{c_1} = P \cdot e^{tD} \cdot c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{b) } X(t) = P e^{tD} \cdot c_1$$

$$X(0) = P \cdot c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dots$$

$$X(t) = P e^{tD} P^{-1} c$$

$$X(0) = P P^{-1} \cdot c = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X(t) = e^{tA} \cdot X(0)$$

$$\textcircled{3} A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_{2,3} = 2 \pm i \end{matrix}$$

$$d + i\beta \leftrightarrow \begin{bmatrix} d & \beta \\ -\beta & d \end{bmatrix}$$

$$\gg A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\gg \text{eig}(A)$$

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} 2.0000 + 1.0000i & & \\ 2.0000 - 1.0000i & & \\ -3.0000 + 0.0000i & & \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d+iz \leftrightarrow \begin{bmatrix} - & i \\ - & \alpha \end{bmatrix}$$

$$-3.0000 + 0.0000i$$

$$\lambda_1 = -3 \rightarrow (A - \lambda_1 E) \mathbf{x}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2+2i \rightarrow (A - \lambda_2 E) \mathbf{x}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3-(2+2i) & 0 & 0 \\ 0 & 3-(2+2i) & -2 \\ 0 & 1 & 1-(2+2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} (-5-2i)a = 0 \\ (1-2i)b - 2c = 0 \\ b + (-1-2i)c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cdot \frac{(1+i)}{2}} b - (1+i)c = 0$$

$$a = 0$$

$$b = (1+i)c$$

$$\text{нпр } c=1: \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Re } \mathbf{x}_2} + i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Im } \mathbf{x}_2}$$

$$P = [\mathbf{x}_1 \mid \text{Re } \mathbf{x}_2 \mid \text{Im } \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3 \text{ не имеет значения: } \lambda_3 = \overline{\lambda_2} \Rightarrow \mathbf{x}_3 = \overline{\mathbf{x}_2})$$

```
>> [P D]=eig(A)
P =
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i 1.0000 + 0.0000i
0.8165 + 0.0000i 0.8165 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.4082 - 0.4082i 0.4082 + 0.4082i 0.0000 + 0.0000i
D =
2.0000 + 1.0000i 0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 2.0000 - 1.0000i 0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i 0.0000 + 0.0000i -3.0000 + 0.0000i
```

$$e^{tD} = ?$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^K = \begin{bmatrix} B_1^K & \\ & B_2^K \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{tB_1} & \\ & e^{tB_2} \end{bmatrix}$$

↳ блочная матрица

$$D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & 2 & 1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t[-3]} & & \\ & e^{t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & & \\ & e^{2t} \cos t & e^{2t} \sin t \\ & -e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{bmatrix}$$

$$\text{возвращаем: } e^{t \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}} = e^{t\alpha} \cdot R_{t\beta}$$

$$DP: x(t) = P e^{tD} \cdot c, c \in \mathbb{R}^n$$

Нормальная форма:

$$\begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

кагда много
собственных $\lambda \in \mathbb{R}$

$$V \quad B_2 = \begin{bmatrix} R & E & & \\ & R & E & \\ & & \ddots & E \\ & & & R \end{bmatrix}$$

кагда много
собственных $\alpha + \beta i \in \mathbb{C}$

$$R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

куп $n=4$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$$

$$A = P D P^{-1}$$

Д можно думать:

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

④ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$k=4$ - алгебраическая кратность

$$(A - 2E)^k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\text{Ker}(A - 2E)) = 2 \Rightarrow m=2 - \text{геометрическая кратность}$$

→ много ② Нормальная форма

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad \vee \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

минимальный полином?

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^4 = \det(A - \lambda E)$$

$$\mu | \varphi \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda - 2)^d, d \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mu(A) = 0$$

$$(A - 2E)^1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \neq 0$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \deg \mu = 2$$

↓

② је једна најлакша таблица

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$\delta_1 \rightarrow \delta_2$
 $\delta_3 \rightarrow \delta_4$

тешакмачи код бек
 (yotamam)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

δ_1 δ_3

$$\delta_1 \rightarrow \delta_2: (A - 2E)\delta_2 = \delta_1$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ c &= 1 \\ 0 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{b=d=0} \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta_3 \rightarrow \delta_4: (A - 2E)\delta_4 = \delta_3 \Rightarrow \delta_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{b=d=0} \delta_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\det P \neq 0) \quad (\text{um } \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \text{ um } \delta_3 \delta_4 \delta_1 \delta_2)$$

```
>> A=[2 0 0 0; 0 2 1 0; 0 0 2 0; 1 0 0 2]
A =
     2     0     0     0
     0     2     1     0
     0     0     2     0
     1     0     0     2

>> [P D]=eig(A)
P =
     0     0.0000     0     0
     0     0     1.0000    -1.0000
     0     0     0     0.0000
    1.0000    -1.0000     0     0

D =
     2     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     0
     0     0     0     2
```

$$e^{tD} = 1 \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t[2]} & & & \\ & e^{t[2]} & & \\ & & e^{t[2]} & \\ & & & e^{t[2]} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & & \\ & 1 & t & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} = e^{t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2E \cdot N = N \cdot 2E} = e^{t \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} e^{t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot (E + tN) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow k=0 \quad \downarrow k=1$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^k = 0, k \geq 2$$

```
>> jordan(A)
ans =
     2     1     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     0     0     0     2

>> [P D]=jordan(A)
P =
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0

D =
     2     1     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     0     0     0     2
```

$$\text{op. } X(t) = P \cdot e^{tD} \quad c, c \in \mathbb{R}^4$$

$$\textcircled{1} X' = AX$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$k=4$

$$(A - 2E) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu = 2 \Rightarrow 2\text{th } \text{Jorda}$$

$$(A-2E)K=0 \leadsto K \in \mathcal{L}_A \left\{ \overset{K_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{K_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\} \Rightarrow m=2 \Rightarrow 2 \text{H Jordan}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^4$$

$$\mu(\lambda) = (\lambda-2)^{\ell}, \ell \leq 4$$

$$\mu(A) = 0, A-2E \neq 0$$

$$(A-2E)^2 \neq 0$$

$$(A-2E)^3 = 0 \Rightarrow \deg \mu = 3 \Rightarrow \text{peg najveličej Jordan je } 3 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \end{bmatrix}$$

gledamo za K_2 :

$$(A-2E)K = K_2$$

$\Rightarrow$ nema rešenja $\Rightarrow K_2$ nema odgovarajuće

$\Rightarrow K_2$ opet dimenzije 1×1

$$\begin{matrix} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 1 \\ d & = & 0 \\ a & = & 0 \end{matrix}$$

$$K_1: (A-2E)K_3 = K_1$$

$$\begin{matrix} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ d & = & 1 \\ a & = & 0 \end{matrix} \Rightarrow K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{b=c=0} K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K_3: (A-2E)K_4 = K_3$$

$$\begin{matrix} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ d & = & 0 \\ a & = & 1 \end{matrix} \Rightarrow K_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{b=c=0} K_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \end{bmatrix} \leadsto P = \begin{bmatrix} \boxed{K_1 \ K_3 \ K_4} & \boxed{K_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = ? \quad D = \begin{bmatrix} B & \\ & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{tB} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix}$$

K_1 K_2
 $\vdots$
 K_3
 $\vdots$
 K_4

```
>> A=[2 0 0 0; 0 2 0 0; 0 0 2 1; 1 0 0 2]
A =
     2     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     1     0     0     2

>> [P D]=jordan(A)
P =
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0
     0     1     0     0

D =
     2     1     0     0
     0     2     1     0
     0     0     2     0
     0     0     0     2
```

$$e^{tD} = e^{t \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{N}{=} e^{t \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}} \cdot e^{tN} = e^{2t} E \cdot \left(E + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$2EN = N \neq E$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = 0$$

$$e^{tD} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ & 1 & t \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \text{ OP: } X|t| = P e^{tD} \cdot c, c \in \mathbb{R}^4$$

$$(2) X' = AX$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow k=3$$

$$(A-2E)k=0 \Rightarrow k = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim \ker(A-2E) = 2 \Rightarrow 2 \text{ жана } (m=2)$$

$$k=3, m=2 \text{ жогору } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P=? \quad k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leadsto \text{үреді 1 жөнөтүүгө} \leadsto \text{жа неге не } k_1 \text{ мен } k_2?$$

$$(A-2E)k_3 = k_1$$

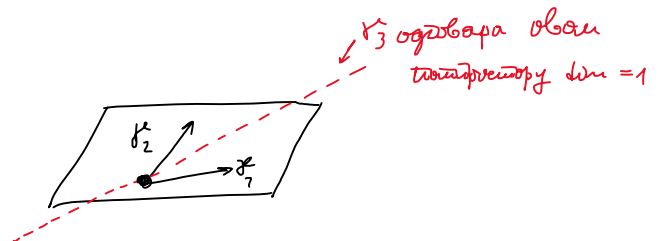
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b+c &= 1 \\ -b-c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{aligned}$$

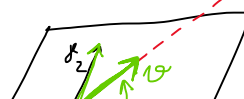
$$(A-2E)k_3 = k_2$$

$$\begin{aligned} b+c &= 0 \\ -b-c &= 1 \\ b+c &= -1 \end{aligned}$$

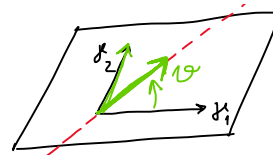
$$\text{сәттелген жөнөтүүгө} \\ = \text{Lin}\{k_1, k_2\}$$



небана басы
ог $\ker(A-2E)$:



укажем базис
из $\ker(A-2E)$:



$\{v, k_2\}$ — новая база

$$v = ? , v \in \text{span}\{k_1, k_2\} \Rightarrow v = \alpha k_1 + \beta k_2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

→ найдем α и β из уравнения k_3

$$\exists k_3 \text{ т.ч. } (A-2E)k_3 = v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b+c=\alpha \\ -b-c=\beta \\ b+c=-\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\text{нужно } \alpha=1, \beta=-1$$

$$b+c=1, b=1, c=0, a=0$$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad k_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

совместимы: v и k_2

получим: $\begin{bmatrix} v \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} v \downarrow k_3 \downarrow k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[2 1 1; 0 1 -1; 0 1 3]
A =
     2     1     1
     0     1    -1
     0     1     3

>> [P D]=jordan(A)
P =
     1     0     0
    -1     1    -1
     1     0     1

D =
     2     1     0
     0     2     0
     0     0     2
```

$$\text{оп: } x(t) = P \cdot e^{tD} \cdot c, c \in \mathbb{R}^3$$

$$(3) \quad x' = Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_{3/4} = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad (k=1)$$

$$(A-2E)k = 0 \Rightarrow k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{3/4} = 1 \pm i$$

$$1+i \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha=1, \beta=1$$

$$(A - (1+i)E)k = 0 \rightsquigarrow k = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A-2E)x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{1} & \boxed{1} \\ & & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{bmatrix} \rightsquigarrow e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} & e^{t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & e^{t \cdot R_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t \cos t} & e^{t \sin t} \\ 0 & 0 & -e^{t \sin t} & e^{t \cos t} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \text{Re } x_3 & \text{Im } x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{OP: } x(t) = P e^{tD} \cdot c, c \in \mathbb{R}^4$$

$$(4) \quad X' = AX$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1/2} = \lambda_{3/4} = \pm i$$

$$\lambda_1 = i, k=2 \rightarrow 0 + i \cdot 1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ & & \boxed{0} & \boxed{1} \\ & & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \mu=2$$

↪ 2 (комплексных) корня $\pm i$

$$D = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ & & \boxed{0} & \boxed{1} \\ & & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \mu=1$$

↪ 1 (комплексный) корень i

$$(A - iE)x_1 = 0$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 реальных век
1 комплексный век

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(A - iE) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Lin}\{x_1\} = 1 \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow 1 \text{ корень}$$

...
1 yozuv ber

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \end{bmatrix}$$

shu shu e qadima 2 taqib ber k_1, k_2

$m=2 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \text{Re } k_1 & \text{Im } k_1 & \text{Re } k_2 & \text{Im } k_2 \end{bmatrix}, e^{tD} = \begin{bmatrix} R_t & \\ & R_t \end{bmatrix}$

k_2 - yozuv ber k_1 . $(A - 2E)k_2 = k_1$

$$\therefore k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1-2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \text{Re } k_1 & \text{Im } k_1 & \text{Re } k_2 & \text{Im } k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = ? \quad D = \begin{bmatrix} R & E \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}_J + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

$(J \sim E) \quad JN = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$N \cdot J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow JN = NJ \Rightarrow e^{tD} = e^{tJ} e^{tN}$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tR} & \\ & e^{tR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_t & \\ & R_t \end{bmatrix}$$

$$e^{tN} = E + t \cdot N = \begin{bmatrix} E & tE \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$$\dots \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} R_t & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & tE \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_t & tR_t \\ 0 & R_t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \cos t & t \sin t \\ -\sin t & \cos t & -t \sin t & t \cos t \end{bmatrix}$$

$$U = E + U \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & t \cos t & t \sin t \\ -\sin t & \cos t & -t \sin t & t \cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$OP: X(t) = P e^{tD} c, c \in \mathbb{R}^4$$

Вспомогательная
комплексная
лепная и форма
(или решение
реальной системы)

```
>> A=[-1 0 -1 0; 1 0 1 1; 2 0 1 0; 1 -1 0 0]
A =
    -1     0     -1     0
     1     0     1     1
     2     0     1     0
     1    -1     0     0

>> [P D]=jordan(A)
P =
 0.0000 + 0.0000i  0.5000 - 0.5000i  0.0000 + 0.0000i  0.5000 + 0.5000i
 0.5000 + 0.5000i  0.0000 + 0.0000i  0.5000 - 0.5000i  0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 1.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 - 1.0000i
 0.5000 - 0.5000i  0.0000 + 0.0000i  0.5000 + 0.5000i  0.0000 + 0.0000i

D =
 0.0000 - 1.0000i  1.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i  0.0000 - 1.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 1.0000i  1.0000 + 0.0000i
 0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 0.0000i  0.0000 + 1.0000i
```