

Нека су дате области $U, W \subset \mathbb{R}^n$ и $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ глатка векторска поља на њима. Кажемо да су фазни токови ϕ^t и ψ^t дефинисани једначинама

$$\begin{aligned} \frac{d\phi^t}{dt} &= X(\phi^t), & \phi^0 &= \text{Id} \\ \frac{d\psi^t}{dt} &= Y(\psi^t), & \psi^0 &= \text{Id} \end{aligned}$$

конјуговани или еквивалентни¹ ако постоји бијекција

$$\varphi : U \rightarrow W$$

таква да важи

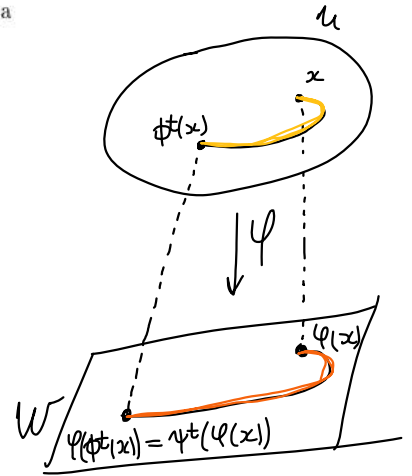
$$\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi. \quad \phi^t = \varphi^{-1} \circ \psi^t \circ \varphi$$

Ако је још и:

- φ линеарно, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t линеарно еквивалентни;
- φ хомеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t тополошки еквивалентни;
- φ дифеоморфизам, кажемо да су токови ϕ^t и ψ^t диференцијално еквивалентни.

Користићемо термин еквивалентни и за саме системе, а не само за токове.

— пер еквиваленције!



$$\varphi \text{ линеарно} \quad \varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

$$\varphi \text{ хомео:} \quad \varphi, \varphi^{-1} \text{ хомео}$$

$$\varphi \text{ дифео:} \quad \varphi, \varphi^{-1} \text{ дифео}$$

$$\text{линеарно} \Rightarrow \text{дифео} \Rightarrow \text{хомео}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi^t} & U \\ \varphi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \varphi \\ W & \xrightarrow{\psi^t} & W \end{array}$$

Теореме за ЛАДЖК ($X' = AX$, $X' = BX$):

$$1) \quad \text{Л} \Leftrightarrow \text{Д}_1 \Rightarrow \text{Т}$$

$$2) \quad \text{Л} \Leftrightarrow A, B \text{ сличне}$$

$$3) \quad A, B \text{ хиперболическе матрице} \quad (\text{Re}(\lambda) \neq 0, \forall \lambda - \text{собств.-вр})$$

$$\text{Т} \Leftrightarrow m_+(A) = m_+(B)$$

$$\hookrightarrow \text{своје собств. вр } \lambda \text{ и } \bar{\lambda} \quad \text{Re}(\lambda) > 0$$

③ Доказати за системе $\begin{matrix} x' = x \\ y' = y \end{matrix}$ и $\begin{matrix} x' = x \\ y' = x+y \end{matrix}$ ису ли еквив или имају ису собств.-вр

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

матр. экв. $\Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in GL_2(\mathbb{R}), A = P B P^{-1} / \cdot P$
 $P^{-1} \downarrow E = A$

$P^{-1} E P = B$
 E
 $B = E \quad \checkmark$

④ Доказать, что у системы $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x^2 + y \end{cases}$ и $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ групп эквив., или найти мин. эквив.

Решим. $\Phi^t(x, y) = (x e^{-t}, y e^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}))$, $\Psi^t(x, y) = e^{t \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x e^{-t}, y e^t)$.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$

$\varphi \circ \Phi^t = \Psi^t \circ \varphi$

$\varphi(x e^{-t}, y e^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = (\varphi_1(x, y) e^{-t}, \varphi_2(x, y) e^t)$

найти мин. экв.: матр., экв. $\Rightarrow \exists \varphi$ мин.

$\varphi(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$

$\alpha x e^{-t} + \beta y e^t + \frac{\beta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = (\alpha x + \beta y) e^{-t} / e^t$

$\gamma x e^{-t} + \delta y e^t + \frac{\delta x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) = (\gamma x + \delta y) e^t / e^{-t}$

$\alpha x + \beta y e^{2t} + \frac{\beta x^2}{3}(e^{2t} - e^{-t}) = \alpha x + \beta y$

$\gamma x e^{-2t} + \delta y + \frac{\delta x^2}{3}(1 - e^{-3t}) = \gamma x + \delta y$

$\forall t, x, y$

$\alpha x = \alpha x + \beta y$

$\beta y + \frac{\beta x^2}{3} = 0$

$-\frac{\beta x^2}{3} = 0$

$\beta y = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

$$\delta x e^t + \delta y + \frac{x^2}{3} (1 - e^{-2t}) = \delta x + \delta y$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha x &= \alpha x + \beta y \\ \beta y + \frac{\beta x^2}{3} &= 0 \\ -\frac{\beta x^2}{3} &= 0 \end{aligned} \right\} \beta y = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta^* x &= 0 \\ \delta y + \frac{\delta x^2}{3} &= \delta^* x + \delta y \\ -\frac{\delta x^2}{3} &= 0 \end{aligned} \right\} \boxed{\delta^* = \delta = 0}$$

$$\psi(x, y) = (\alpha x + \beta y, \delta^* x + \delta y) = (\alpha x, 0) \rightarrow \text{ниже диффеоморфизм на } \mathbb{R}^2$$

$$(0, 1) \notin \text{Im } \psi$$

їм'є функ еквів:

$$\psi(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = (\psi_1(x, y)e^{-t}, \psi_2(x, y)e^t)$$

$$(\psi_1(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})), \psi_2(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}))) = (\psi_1(x, y)e^{-t}, \psi_2(x, y)e^t)$$

$$\psi_1(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = \psi_1(x, y)e^{-t}$$

$$\psi_2(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = \psi_2(x, y)e^t$$

$\psi = (\psi_1, \psi_2)$ - координат

$\rightarrow \psi_1(x, y) = x$

$$\psi_1(\underline{x}e^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = \underline{x}e^{-t} = \psi_1(x, y)e^{-t} \checkmark$$

$$\psi_2(x, y) = y + \frac{x^2}{3}$$

$$\psi_2(xe^{-t}, ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t})) = ye^t + \frac{x^2}{3}(e^t - e^{-2t}) + \frac{x^2 e^{-2t}}{3} = (y + \frac{x^2}{3})e^t = \psi_2(x, y)e^t$$

$$\psi(x, y) = (x, y + \frac{x^2}{3}) - \text{функція?}$$

$$1-1: \varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1 + \frac{x_1^2}{3}) = (x_2, y_2 + \frac{x_2^2}{3}) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$$

$$1-2: \varphi(x, y) = (x, t)$$

$$(x, y + \frac{x^2}{3}) = (x, t)$$

$$x = x$$

$$y = t - \frac{x^2}{3} = t - \frac{x^2}{3}$$

$$\varphi(x, t - \frac{x^2}{3}) = (x, t)$$

}

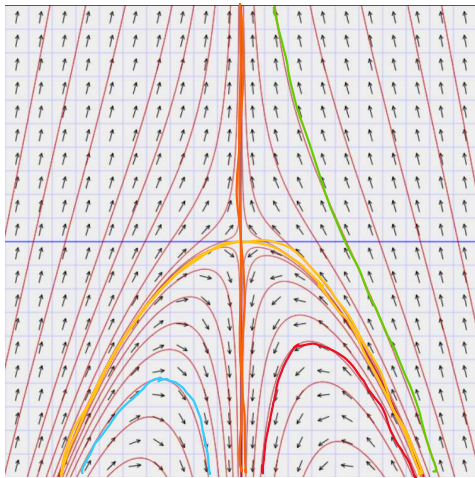
$$\varphi^{-1}(x, t) = (x, t - \frac{x^2}{3})$$

φ, φ^{-1} гом: гом, гом у гом

$$(d\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3}x & 1 \end{bmatrix}, d(\varphi^{-1})(x, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3}x & 1 \end{bmatrix})$$

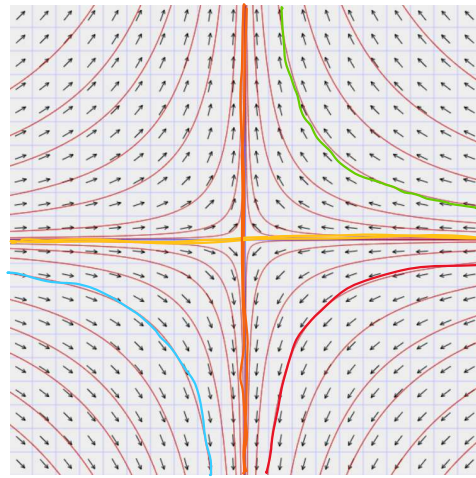
$\Rightarrow$ гом у гом гом.

ϕ^t



φ
 φ^{-1}

ψ^t



$$\varphi(x, y) = (x, y + \frac{x^2}{3})$$

$$\varphi^{-1}(x, t) = (x, t - \frac{x^2}{3})$$

$$\varphi^{-1}(x, 0) = (x, -\frac{x^2}{3})$$

$$\varphi^{-1}(0, t) = (0, t)$$

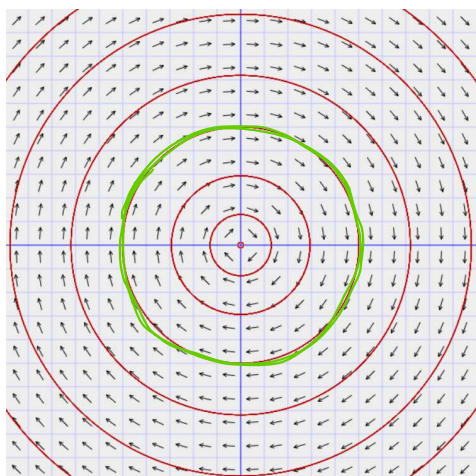
⑤ За м у гом гом $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X$ и $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X$ гом гом?

⑤ Да ли су системи $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$ и $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x$ еквив?

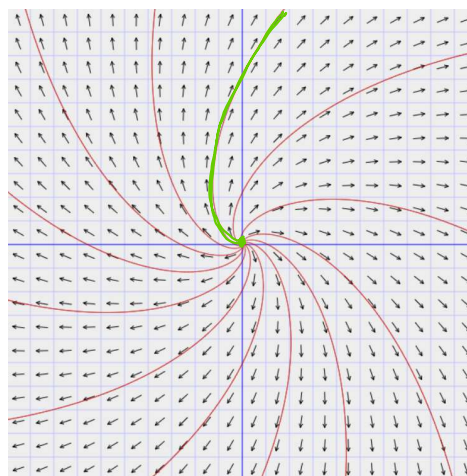
↓ "A"
 $\lambda_{1,2} = \pm i$
 $\operatorname{Re}(\pm i) = 0$

↓ "B"
 $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$\Rightarrow$ A није хиперболичка (не може T)



φ
 хаус



проблем: не можемо да раздвојимо кругове

Напомена 123. Ако са $\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})$ означимо трајекторију тачке $\mathbf{x}$:

$$\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x}) := \{\phi^t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

тада је очигледно да, за еквивалентне токове ϕ^t и ψ^t , бијекција φ слика трајекторију тачке $\mathbf{x}$ на трајекторију тачке $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi(\gamma_{\phi^t}(\mathbf{x})) = \gamma_{\psi^t}(\varphi(\mathbf{x})).$$

нпс $\exists$ φ -хаус, $\varphi(\odot) = \curvearrowright \Rightarrow \bigcirc \approx \curvearrowright \downarrow$
 ($\bigcirc$ је компактан, $\curvearrowright$ није)

[нм: лево су периодичне трај, десно нису]

⑥ Доказати да потпуна класификација не важи за нехиперболичке матрице

от $\nearrow$
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 ↓

$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
 ↑ ↓

ни A, ни B није хиперб.

$$\begin{array}{cc} \nearrow \phi^t & A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \downarrow \lambda_{1/2} = \pm 1 \\ \uparrow \psi^t & B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ & \downarrow \lambda_{1/2} = \pm 2 \end{array}$$

ни A, ни B нису симметрични.

$$u_+(A) = u_+(B) = 0$$

$$u_-(A) = u_-(B) = 0$$

преда. постоји нека T таква

$$\begin{array}{l} \phi^t(x) = e^{tA} x = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot x \rightarrow \text{преко периода } 2\pi \\ \psi^t(x) = e^{tB} \cdot x = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} x \rightarrow \text{преко периода } \pi \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \phi^t(x) \\ \psi^t(x) \end{array}} \right\} \text{неке матице}$$

нц $\exists \varphi$ -акомо $\varphi \circ \phi^t = \psi^t \circ \varphi$

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} x \right) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \varphi(x)$$

$$t = \pi: \quad \varphi \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$$

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \Rightarrow \begin{matrix} 1-1 \\ \text{---} \end{matrix} -x = x \Rightarrow x = 0 \quad \begin{matrix} \downarrow \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \end{matrix}$$

Теорема 136. (Хартмен²-Гробман³) Нека је $F(x_*) = 0$ и нека је $A = dF(x_*)$ хиперболичка матрица. Тада постоји околина $\mathcal{U}$ тачке x_* на којој су токови система

$$x' = F(x) \quad \text{и} \quad x' = Ax$$

тополошки еквивалентни.

↳ линеаризација система (*)

□

x_* -свиблиндр

$$A = dF(x_*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_*) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_*) \end{bmatrix}$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

⑦ Доказать, что у системы
$$\begin{aligned} x' &= \sin x + x + y \\ y' &= x + y \end{aligned} \quad (*)$$
 и
$$\begin{aligned} x' &= 2022x + y \\ y' &= x + y \end{aligned} \quad (**)$$
 т.е. эквив. на некоем

окрестности окр. $\mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = (\sin x + x + y, x + y)$$

$$X_* = ? \quad \left. \begin{aligned} \sin x + x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sin x &= 0 \\ y &= -x \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_* \in \{(k\pi, -k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{нпр } k=0 \Rightarrow X_* = (0, 0)$$

$$A = dF(X_*) = \begin{bmatrix} \cos x + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{(x, y) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX \quad (*)$$

$$\hookrightarrow \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) = \lambda_{1/2} > 0 \Rightarrow \text{неустойчивость}$$

$$u_+(A) = 2$$

ТХТ: Существует ли окр. $(0, 0)$ на которой у системы $(*)$ и $(**)$ т.е. эквив.

После нам $(*)$ и $(**)$ т.е. эквив.

$$B = \begin{bmatrix} 2022 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= 2023^2 - 4 \cdot 2021 = (2021 + 2)^2 - 4 \cdot 2021 = \\ &= 2021^2 + 4 \cdot 2021 + 4 - 4 \cdot 2021 = 2021^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\det(B - \lambda E) = 0 \Rightarrow (2022 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2023\lambda + 2021 = 0$$

$$\sqrt{D} < 2023$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2023 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) = \lambda_{1/2} > 0 \Rightarrow u_+(B) = 2$$

B -устойчив

$$u_+(A) = u_+(B) = 2 \Rightarrow (*) \text{ и } (**) \text{ т.е. эквив.}$$

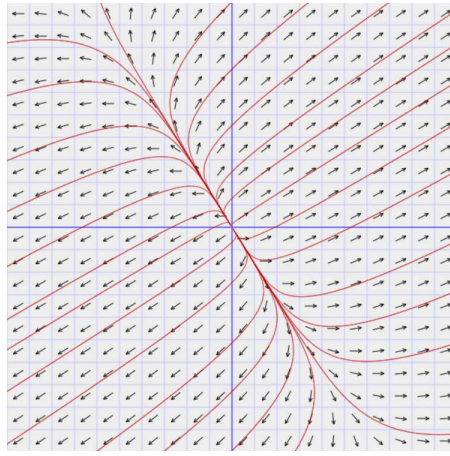
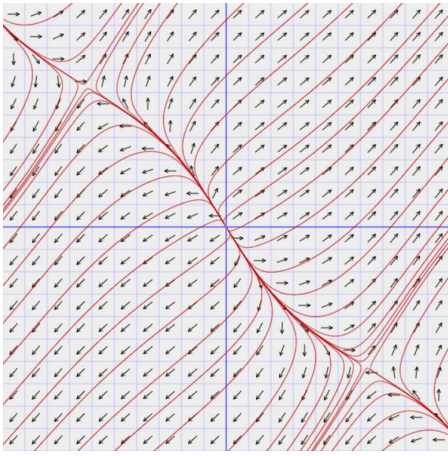
$$\Rightarrow (*) \text{ и } (**) \text{ т.е. эквив.}$$

↑
перейти к эквив.

$(*)$

$(*)$

$(**)$



⑧ Δοκίμασε να μετρήσεις $x' = x^2$ και $y' = y$ και να κάνεις τον εκθετικό λογαριθμισμό $y(0,0)$.

$$F(x,y) = (x^2, y) \Rightarrow A = dF(0,0) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$
 $\lambda_2 = 1$ } A έχει συμπέρασμα
(με βάση $X \Gamma$)

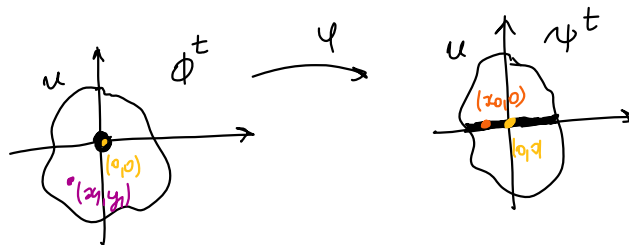
$$x' = F(x) \rightsquigarrow \phi^t$$

$$x' = AX \rightsquigarrow \psi^t$$

εξαρτησιμότητα: $x_* = (0,0)$
 $\left. \begin{matrix} x^2 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \uparrow$

$$\left. \begin{matrix} x' = 0 \\ y' = y \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 0 = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

$$x_* \in \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



ημε $\exists \psi$ τέτοιο $\psi \circ \phi^t = \psi^t \circ \psi$

$$\phi^t(0,0) = \psi^t(0,0) = (0,0), \quad \psi^t(x_0,0) = (x_0,0), \quad x_0 \text{ ως κενό σημείο } (0,0)$$

ψ -διεκκυσμός: $\exists (x_1, y_1) \quad \psi(x_1, y_1) = (x_0, 0) \in \mathcal{U}$

$$\psi \circ \phi^t(x_1, y_1) = \psi^t \circ \psi(x_1, y_1) = \psi^t(x_0, 0) = (x_0, 0)$$

$$\Rightarrow \phi^t(x_1, y_1) = (x_1, y_1) \Rightarrow (x_1, y_1) = (0, 0)$$

ϕ je 1-1

Σο ερωτηματο ημ ημε οκουμε , οσο ημε μπορε !