

$$x(t), y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ako $\exists$ fja $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ (dop C^2) tako ga je

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{onda ovaj sistem} \\ &\text{je Hamiltonov} \end{aligned}$$

H = Хамилтонијан

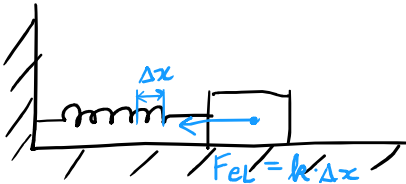
Векторско поље $F(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)$ je Hamiltonovo в.п.

oznaka:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)$$

пример:



k = коеф. еластичности
опруге

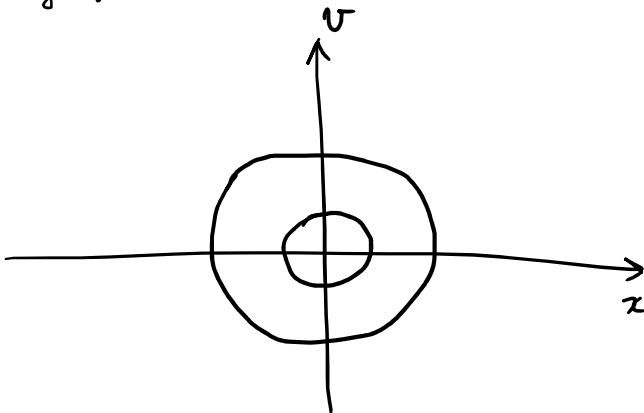
II Нутнов закон: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \leadsto \ddot{x} = -x$ (упростилимо)

Систем: $\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \ddot{x} = -x \end{aligned} \right\} F(x, v) = (v, -x)$

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} \leadsto \text{укупна енергија система}$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $E_{\text{кин}}$ $E_{\text{пот}}$

$c \in \mathbb{R}$: када је $H \equiv c$? $v^2 + x^2 = 2c \rightarrow$ кругови у фазном простору



ово су уједно и
трајекторије
 $\Rightarrow$ енергија се одржава
дуги времена

① Како Хамилтонијан система

$$\left. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \cos x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \sin x$$

② Докажи да у Хамилтоновим системима важи ЗОЕ.

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ решење система}$$

Треба доказати: $H(\gamma(t)) \equiv \text{const}, \forall t$

$$\gamma(t) \quad \updownarrow \quad \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \left\langle \nabla H(x(t), y(t)), \left(\frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t) \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)) \right), (x'(t), y'(t)) \right\rangle = \\ &= \langle (-y'(t), x(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle = 0 \end{aligned}$$

③ Сваки конзервативни (потенцијални) систем је Хамилтонов.

$$U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x' = y$$

$$y' = -\nabla U(x)$$

$$\text{Потенцијал од } x'' = y' = -\nabla U(x)$$

сила која делује на тело је потенцијална
 $U = \text{потенцијал}$

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

④ Хамилтонови системи увек су конзервативни.

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad F(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\text{div} F = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial H}{\partial y_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_n} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} \left(-\frac{\partial H}{\partial x_n} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_j} + \sum_{j=1}^n -\frac{\partial^2 H}{\partial y_j \partial x_j} \stackrel{\uparrow}{=} 0 \quad \text{H}_{\mathbb{R}^n} C^2$$

⑤ Дokaзати да cиcтем није Хaмилтoнов.

$$x' = \frac{y^2}{2} + x$$

$$y' = x \ln x + e^y$$

$$\operatorname{div} F = 1 + e^y \neq 0 \Rightarrow \text{не члва зашрмму} \Rightarrow \text{није Хaм.}$$

⑥ Cкцирaти фaзи портрет cиcтема

$$x' = y$$

$$y' = -x^3 + x$$

Хaмилтoнуан $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

тpојекторије су тде вaли $H \equiv c$

$$4c = 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 2y^2 + (x^2 - 1)^2 - 1$$

$$2y^2 + (x^2 - 1)^2 = 4c + 1 = \tilde{c}$$

