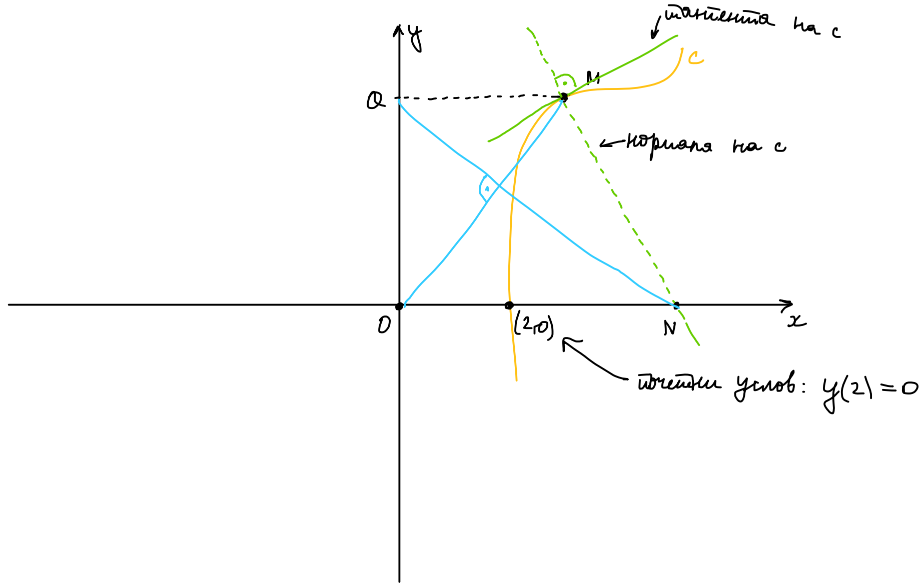
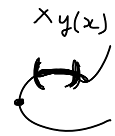
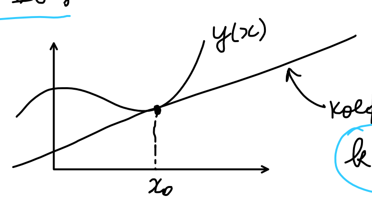
1) Наћи криву c, ако важи следеће: $M \in c$ се пројектује на y-осу у Q, а нормала на c у M сече x-осу у N. Нека је O коорд. почетак. $\forall M \in c$, $QN \perp OM$ и c пролази кроз $(2,0)$

$c: \; y(x) = ?$





Где је ДЈ?



коеф. правца:

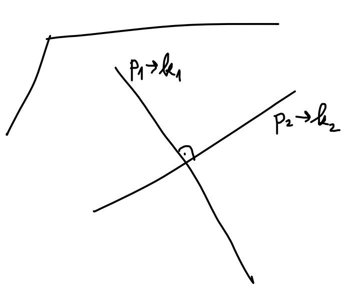
$k = y'(x_0)$

$M(x_0, y(x_0))$

$\left.\begin{array}{l} y_Q = y_M \\ x_Q = 0 \end{array}\right\} \; Q(0, y(x_0))$

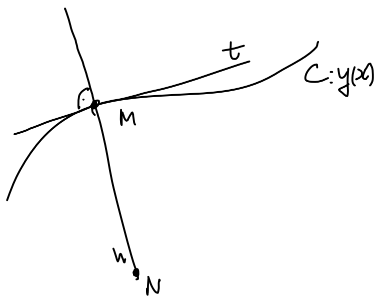
$O(0,0)$

$N(\underset{?}{x_N}, 0)$



$p_1 \perp p_2 \iff k_1 k_2 = -1$

$k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$



$$k_t = y'(x_0)$$

$$k_n = -\frac{1}{y'(x_0)}$$

$$k_n = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{y(x_0) - 0}{x_0 - x_N}$$

?

$$-\frac{1}{y'(x_0)} = \frac{y(x_0)}{x_0 - x_N}$$

$$x_N - x_0 = y(x_0)\, y'(x_0)$$

$$x_N = x_0 + y(x_0)\, y'(x_0)$$

$OM \perp QN$:

$$OM = p_1 : \; k_1 = \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} = \frac{y(x_0) - 0}{x_0 - 0} = \frac{y(x_0)}{x_0}$$

$$QN = p_2 : \; k_2 = \frac{y_Q - y_N}{x_Q - x_N} = \frac{y(x_0) - 0}{0 - (x_0 + y(x_0)\, y'(x_0))} = -\frac{y(x_0)}{x_0 + y(x_0)\, y'(x_0)}$$

$$p_1 \perp p_2 : \; k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$-\frac{y(x_0)}{x_0} \cdot \frac{y(x_0)}{x_0 + y(x_0)\cdot y'(x_0)} = -1$$

$$y^2(x_0) = x_0^2 + x_0\, y(x_0)\cdot y'(x_0) \qquad \forall x_0 \in (a,b)$$

ДЈ:

x_0 – променљива $\quad x_0 \to x$

y – непозната $\quad y(x_0) \to y$

$$y^2 = x^2 + x\, yy' \;,\; y(2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z = y^2 \\ z' = 2yy' \end{array}\right\} \; z = x^2 + x \cdot \frac{z'}{2} \;\to\; \text{лин}$$

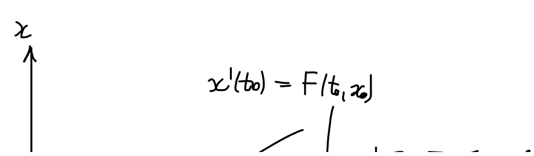
$$z(2) = 0$$

⋱

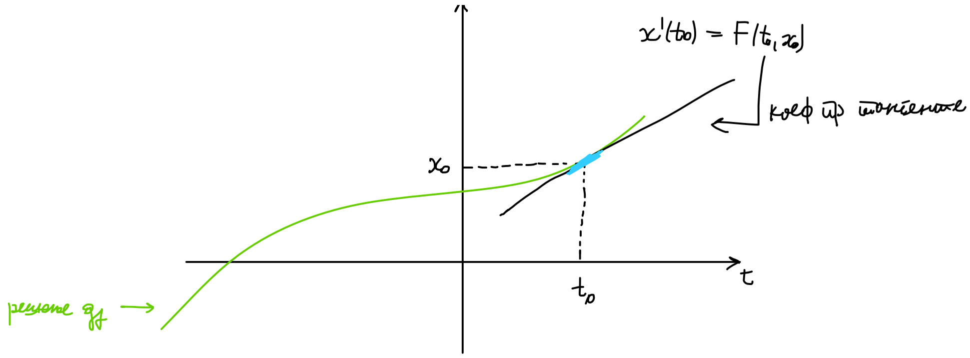
(2) Скицирати поље правца ДЈ $x' = F(t, x)$. Не решавајући ДЈ скицирати њене интегралне криве.

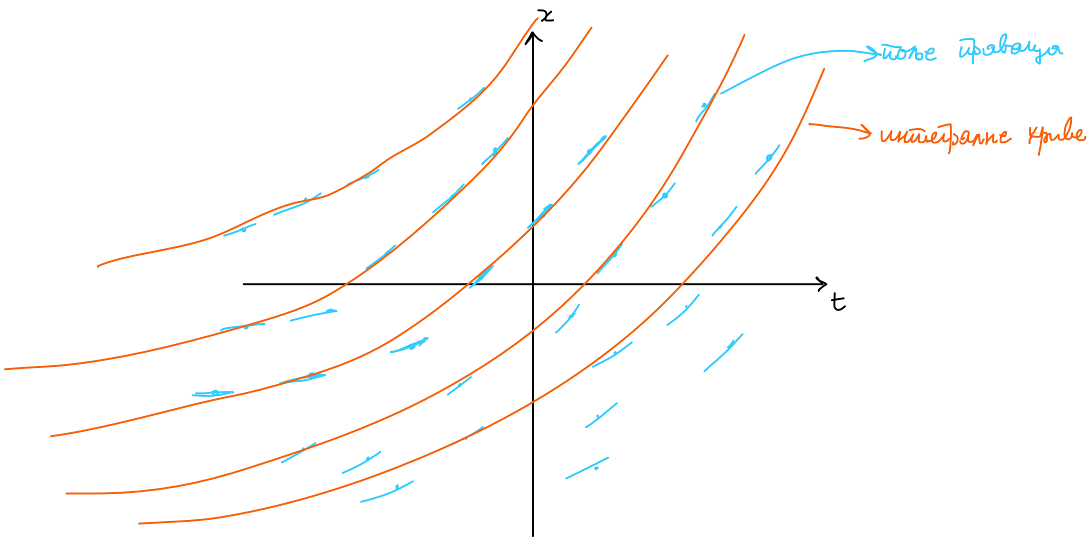
а) $F(t,x) = -\frac{t}{x}$

б) $F(t,x) = 1 + t - x$



$$x'(t_0) = F(t_0, x_0)$$





2) $x' = -\frac{t}{x}$

посматрамо све (t, x) где $x' = F(t,x) = \underbrace{c}_{\text{нагиб}} \in \mathbb{R}$ (изоклине)

$-\frac{t}{x} = c \Rightarrow \underbrace{-t = cx}_{\text{праве кроз } (0,0)}$

$c = 0$: $t = 0$:

$c = 1$: $x = -t$:

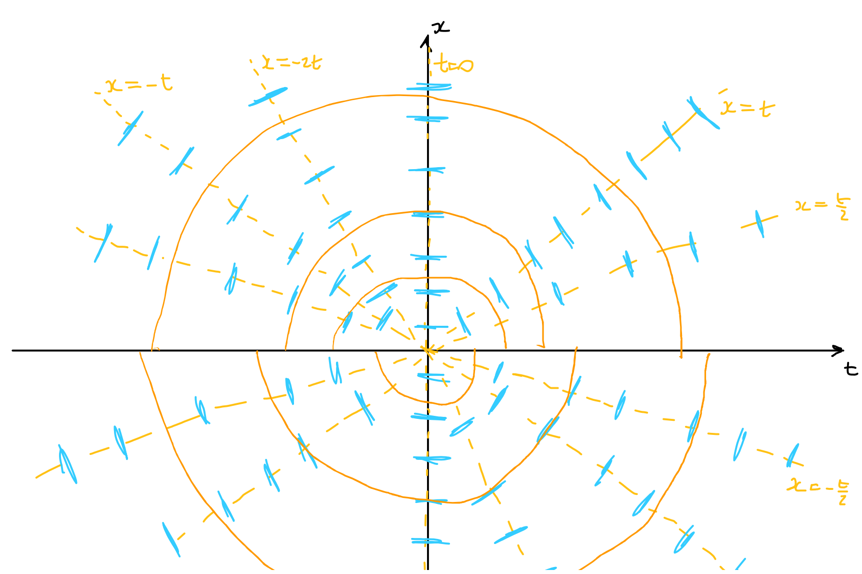
$c = -1$: $x = t$:

$c = 2$: $x = -\frac{t}{2}$:

$c = \frac{1}{2}$: $x = -2t$:

$c = -2$: $x = \frac{t}{2}$:

$c = -\frac{1}{2}$

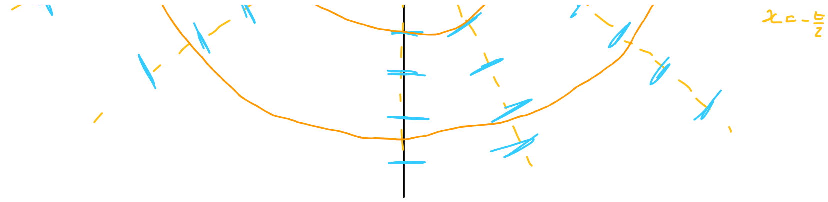


$c=-2$: $x=\frac{t}{2}$:

$c=-\frac{1}{2}$

$c=3$

⋮



б) $F(t,x)=1+t-x$

$1+t-x=c$

$x=t+(1-c)$ → праве || са $x=t$

$c=0$: $x=t+1$

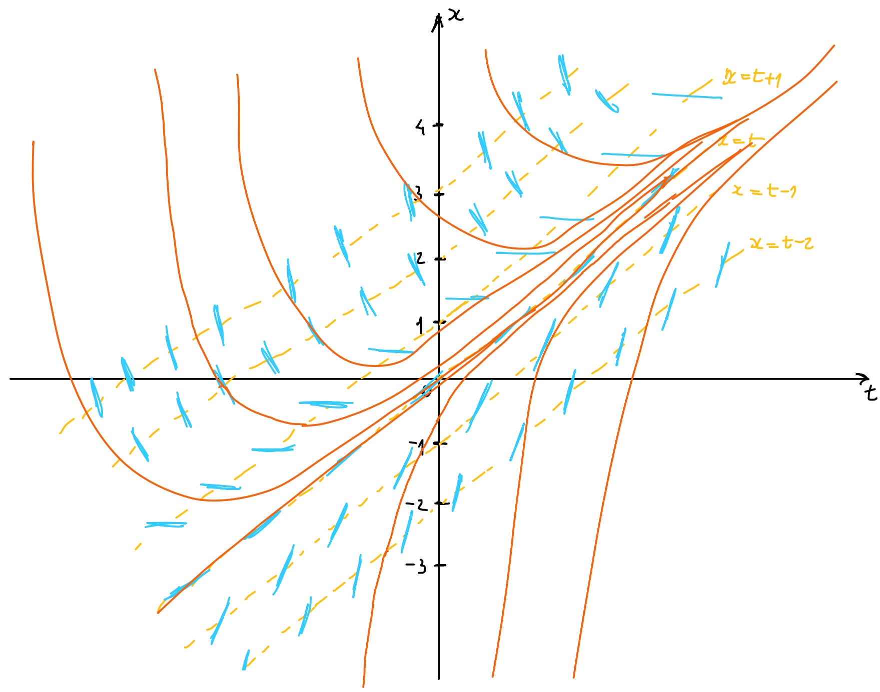
$c=1$: $x=t$ ← дуж праве

$c=2$: $x=t-1$

$c=3$: $x=t-2$

$c=-1$: $x=t+2$

$c=-2$: $x=t+3$



Пикар: два решења се не секу!

* сва реш имају косу асимптоту $x=t$

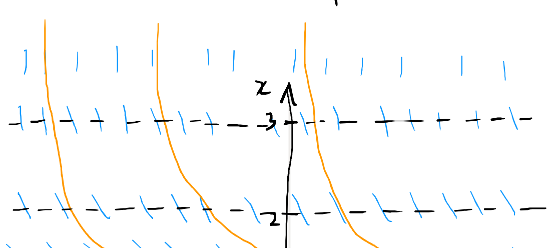
③ Скицирати $\boxed{\text{поље правца}}$ дј $x'=x(1-x)$. Не решавајући дј скицирати неке $\boxed{\text{интегралне криве}}$.

Код аутономне дј. (када $f(x,t)$ не зависи од t) прво потражимо константна решења (равнотежна решења).

$x(t)\equiv c$, $x'=0 \Rightarrow x(t)\cdot(1-x(t))=0$

$c\cdot(1-c)=0 \Rightarrow c=0 \vee c=1$

Изоклине су хоризонталне праве (или унији истих) – у ситуацији $x'=f(x)$.

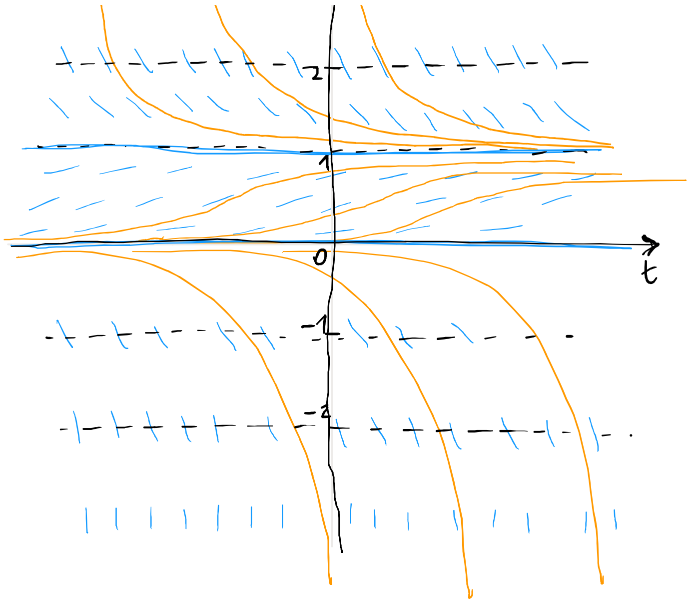


Имамо 3 одвојене области ($x>1$, $x<0$, $0<x<1$).

$x=2$: $x'=-2$

$x=3$: $x'=-6$

$x\to-\infty$



$x = 3: \quad x' = -6$

$x \to \infty: \quad x \to -\infty$

$x = \frac{3}{2}: \quad x' = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{1}{2}: \quad x' = \frac{1}{4}$

$x \in \{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}: \quad x' = \frac{3}{16}$

$x = -1: \quad x' = -2$

$x = -2: \quad x' = -6$

$x \to -\infty: \quad x' \to -\infty$