

$$X'(t) = A(t) X(t)$$

има опште решење $X(t) = \Phi(t) \cdot c$, $c \in \mathbb{R}^n$, за неки $\Phi(t)$

$\hookrightarrow \Phi(t)$ је фундаментална матрица система

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}, \text{ где } x_i(t) \text{ је решење}$$

једначине

и они су линеарно независни

$$\det \Phi(t) = W(t) \neq 0$$

$\hookrightarrow$ Вронскијан

$$\Phi'(t) = A(t) \Phi(t)$$

Дакле, матрица $\Phi(t)$ је фунг ако :

$$1) \Phi'(t) = A(t) \Phi(t)$$

$$2) W(t) = \det \Phi(t) \neq 0$$

Ако имамо линеарно $X' = AX$, једна фундаментална матрица је $\Phi(t) = e^{tA}$.

$$1) \Phi'(t) = \frac{d}{dt} (e^{tA}) \stackrel{(5)}{=} A e^{tA} = A \Phi(t)$$

$$2) \det(\Phi(t)) = \det(e^{tA}) \stackrel{(6)}{=} e^{\operatorname{tr}(tA)} \neq 0$$

$$\textcircled{1} A \in M_2(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{xA} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$y' = B^{-1}AB y + D(x)$$

а) $D(x) \equiv 0$, решити га

б) Определити $B^{-1}AB$

в) $D(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix}$, решити га

$$а) y' = \underbrace{B^{-1}AB}_C y, y' = Cy$$

$$\text{оп: } y(x) = e^{xC} \cdot k = e^{x(B^{-1}AB)} \cdot k = B^{-1} e^{xA} B \cdot k = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot k, k \in \mathbb{R}^2$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{xC} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$$

б) $C = ?$

$e^{xC} \rightsquigarrow C ?$

$\Phi(x) = e^{xC}$ — фундаментальная матрица $y' = Cy$

$$\Phi'(x) = \underline{C} \Phi(x) \quad / \quad \Phi^{-1}(x) \quad (W(x) \neq 0)$$

$$C = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x)$$

$$\Phi(x) = e^{xC} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\Phi'(x) = \begin{bmatrix} 7e^x - 12e^{2x} & 14e^x - 28e^{2x} \\ -3e^x + 6e^{2x} & -6e^x + 14e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x) = (e^{xC})^{-1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{наоборот}}}{e^{-xC}} = \Phi(-x) = \begin{bmatrix} 7e^{-x} - 6e^{-2x} & 14e^{-x} - 14e^{-2x} \\ -3e^{-x} + 3e^{-2x} & -6e^{-x} + 7e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}AB = C = \dots = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$в) \quad y(x) = \underline{\Phi(x)} \cdot \left(C + \int \underline{\Phi^{-1}(x)} \cdot \underline{D(x)} dx \right)$$

$$\text{получим: } y(x) = \Phi(x) C + \begin{bmatrix} -4 + e^x(14x + 14) \\ \frac{3}{2} + e^x(-6x - 7) \end{bmatrix}$$