

2. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и нека је дат систем диференцијалних једначина

$$\begin{cases} x_1' = (a+b)x_1 + bx_2 \\ x_2' = ax_1 + bx_2 \end{cases}$$

(а) У зависности од параметара a и b , одредити све положаје равнотеже датог система и њихову стабилност (да ли су стабилни или нестабилни).

(б) Скицирати фазни портрет датог динамичког система у случајевима:

α) $a = 0$ и $b = 3$;

β) $a = -1$ и $b = 0$;

γ) $a = 1$ и $b = 2$.

(в) Доказати по дефиницији да је функција векторског поља које задаје дати систем локално Липшицова на $\mathbb{R}^2$ за свако $a, b \in \mathbb{R}$. Да ли је она глобално Липшицова?

$$X' = F(X)$$

$$F(X) = A \cdot X$$

$$X' = A \cdot X, \quad A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (a+b)x_1 + bx_2 = 0 \\ ax_1 + bx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{bx_1 = 0}$$

$$1^\circ b = 0$$

$$ax_1 = 0$$

$$1.1^\circ a = 0 \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$1.2^\circ a \neq 0 \quad x_1 = 0$$

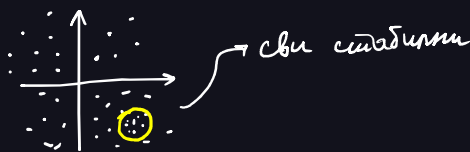
$$\underline{bx_2 = 0} \quad (x_1, x_2) \in \{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

$$2^\circ b \neq 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow bx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\underline{(x_1, x_2) = (0, 0)}$$

$$1.1^\circ a = b = 0 \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$



$$1.2^\circ b = 0, a \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1' = ax_1 \Rightarrow x_1 = c_1 e^{at}$$

$$x_2' = ax_1$$

$$x_2' = ac_1 e^{at} \Rightarrow x_2 = c_1 e^{at} + c_2$$

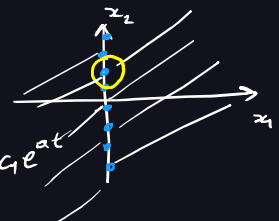
$$\underline{x_2 = x_1 + c_2}$$

$$a > 0: \quad \swarrow \quad \nwarrow$$

нест.

$$a < 0: \quad \swarrow \quad \nwarrow$$

уст.



$$2^\circ b \neq 0 \quad (0, 0) \text{ ервн}$$

$$A = \begin{bmatrix} a+b & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$(a+b-\lambda)(b-\lambda) - ab = 0$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b\lambda - b\lambda + ab + b^2 - ab = 0$$

$$\lambda^2 - (a+2b)\lambda + b^2 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = b^2 > 0$$

$$\frac{a+1b \pm \sqrt{(a+2b)^2 - 4b^2}}{2} = \frac{a+2b \pm \sqrt{a(a+4b)}}{2}$$

$$1^\circ \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ реални} \Rightarrow \text{нест. точка}$$

$$a+4b > 0 \quad \text{нест.}$$

1° λ_1 и λ_2 вещ. $\Rightarrow$ неуст. точка

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + 2b$$

$$\begin{aligned} a + 2b > 0 & \text{ неуст.} \\ a + 2b < 0 & \text{ уст.} \end{aligned}$$

2° λ_1 и λ_2 компл.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + 2b$$

$$2 \cdot \operatorname{Re}(\lambda_1)$$

$$\left. \begin{aligned} a + i b \\ a - i b \end{aligned} \right\} 2d$$

$$a + 2b > 0 \text{ неуст.}$$

$$a + 2b < 0 \text{ уст.}$$

$$a + 2b = 0? \quad a = -2b$$

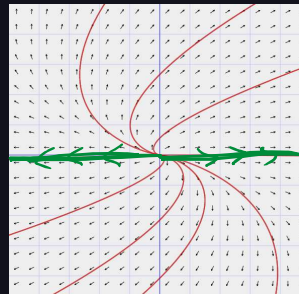
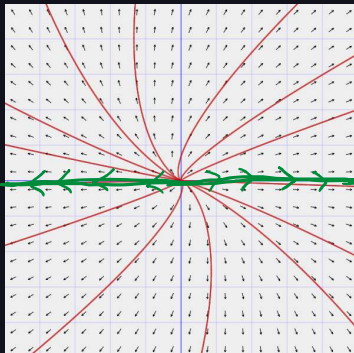
$$\lambda^2 + b^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i b \text{ уст.}$$

б) а) $a=0, b=3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow \text{неуст. ген. убог.}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} y$$

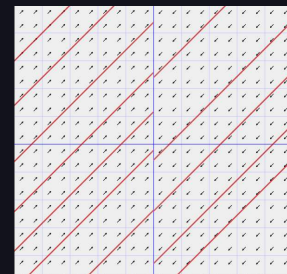
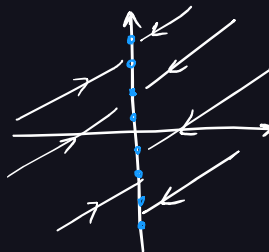
$$A y$$



<https://aeb019.hosted.uark.edu/ppplane.html>

б) $b=0, a=-1$

$$X^* \in \{(0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$$



в) ---

в) $F(x) = A \cdot x$ неуст. ?

$$\|A \cdot x_1 - A \cdot x_2\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} (a+b)x_1 + by_1 \\ ax_1 + by_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (a+b)x_2 + by_2 \\ ax_2 + by_2 \end{bmatrix} \right\| \leq L \cdot \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\sqrt{((a+b)(x_1-x_2) + b(y_1-y_2))^2 + (a(x_1-x_2) + b(y_1-y_2))^2} \leq L \cdot \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$(C+D)^2 \leq 2(C^2 + D^2)$$

$$\leq 2(a+b)^2(x_1-x_2)^2 + 2b^2(y_1-y_2)^2$$

$$\leq 2a^2(x_1-x_2)^2 + 2b^2(y_1-y_2)^2$$

$$L^2 = \max \{ 2(a+b)^2 + 2a^2, 4b^2 \}$$

и добарно Аит.

3. Дана је диференцијална једначина

$$x' = x^2 - t^2 + 1.$$

Не тражећи опште решење једначине:

- (а) Наћи сва решења дате диференцијалне једначине чији су графици праве линије.
(б) Скицирати поље праваца и интегралне криве дате једначине.

а)



$$x(t) = a \cdot t + b$$

$$(x(t) = c?)$$

$$x(t) = t$$

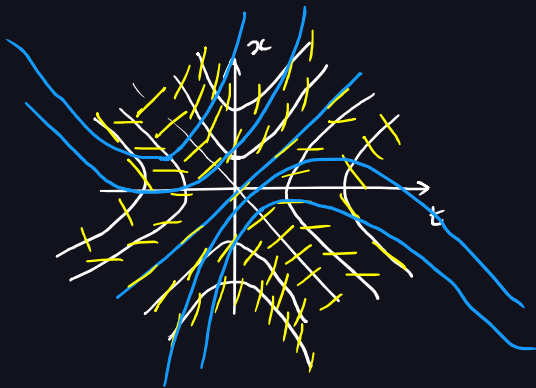
$$x' = a$$

$$a = (at+b)^2 - t^2 + 1$$

$$a = t^2(a^2 - 1) + t(2ab) + b^2 + 1$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 2ab = 0 \\ a = b^2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

б)



$$x^2 - t^2 + 1 = c$$

$$x^2 - t^2 = c - 1 \leftarrow \text{хиперболе}$$

$$c=1: (x-t)(x+t) = 0$$

$$x=t \vee x=-t$$

$$c=2: x^2 - t^2 = 1$$

$$c=3: x^2 - t^2 = 2$$

$$c=0: x^2 - t^2 = -1$$

$$c=-1: x^2 - t^2 = -2$$

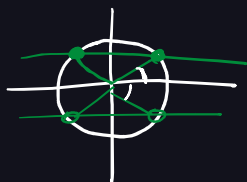
2. За параметар $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= a - \sin x. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

У зависности од параметра a наћи све еквилибријуме система ($\spadesuit$) и испитати њихову стабилност (да ли су нестабилни или стабилни).

Помоћ: Доказати да за $\alpha \in (-1, 1)$ важи $\cos \arcsin \alpha = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ a - \sin x &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |a| > 1 &: \sin x = a \quad \text{!} \\ |a| < 1 &: \end{aligned}$$



$$1^\circ x = \arcsin a + 2k\pi$$

$$2^\circ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$$

$$\cos(\pi - \arcsin a) = -\sqrt{1 - a^2}$$

$$dF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

$$1^\circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{1-a^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \sqrt{1-a^2} &= 0 \\ \lambda_{1/2} &= \pm i \sqrt{1-a^2} \quad \dots \end{aligned}$$

$$2^\circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{1-a^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1/2} = \pm \sqrt{1-a^2} \quad \text{нестаб.}$$

1^o? фја Лагранжа!

↪ решење из имплицитности

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sin x \end{aligned}$$

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + ax - \cos x + 1$$

↓
искористио као фја Лагранжа