# Švarcov prostor

**Def.** Za funkciju $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ iz $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ kažemo da je brzo opadajuća ako $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$ važi $\lim_{x \to \pm\infty} x^m \varphi^{(k)}(x) = 0$. Skup svih funkcija označavamo sa $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$.

Ili drugačije: $\|\varphi\|_{m,k} < \infty$, $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$. $\|\varphi\|_{m,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \cdot \varphi^{(k)}(x)|$

① Dokazati da $\varphi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$, gde je $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

$$\varphi'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}, \quad \varphi''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2), \ldots, \varphi^{(k)}(x) = P_k(x) \cdot e^{-x^2}$$

(indukcija; $P_k$ polinom stepena $k$)

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^m \varphi^{(k)}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} Q_{m+k}(x) \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \varphi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$$

**Lema:** Ako $\varphi \in S(\mathbb{R})$ onda važi:

1) $\forall m,k \in \mathbb{N}_0 \ \exists C_{m,k} \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x^m \varphi^{(k)}(x)| \le C_{m,k}$ (ovde važi i ekvivalencija).

2) $\forall d \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \exists C_{d,k} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi^{(k)}(x)| \le \frac{C_{d,k}}{(1+x^2)^{d/2}}$.

$C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ je vektorski prostor. Dajemo mu topologiju konvergencijom.

**Def.** Neka je $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ niz u $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ i $\varphi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$. Kažemo da $\varphi_j$ konvergira ka $\varphi$ ako $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$ važi

$$x^m \varphi_j^{(k)}(x) \underset{j \to \infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} x^m \varphi^{(k)}(x).$$

Prostor $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ sa ovom topološkom strukturom označavamo sa $S(\mathbb{R})$ (Švarcov prostor) i konvergenciju zapisujemo sa $\varphi_j \underset{j \to \infty}{\overset{S(\mathbb{R})}{\longrightarrow}} \varphi$.

② $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$. Važi $\lim_{n \to \infty} {}_{S(\mathbb{R})} f_n(x)$.

Не постоји.

③ $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \varphi(x)$, $\varepsilon > 0$. Наћи $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}{}_{S(\mathbb{R})} \varphi_\varepsilon$.

$$\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{S(\mathbb{R})} 0$$

④ $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Доказати да је пресликавање $\Phi_\alpha : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$
$\Phi_\alpha(\varphi)(x) = x^\alpha \cdot \varphi(x)$ непрекидни линеарни морфизам.

## Фуријеова трансформација

**Деф.** $\varphi \in S(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} \, dx$, $\xi \in \mathbb{R}$

① Одредити Фуријеову трансформацију функције $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \xi} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cdot \left(\cos(2\pi x \xi) \; i\sin(2\pi x \xi)\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\pi x^2} \cdot \cos(2\pi x \xi)}_{g(x,\xi)} \, dx = I(\xi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = e^{-\pi x^2} 2\pi x \cdot \left(-\sin(2\pi x \xi)\right) \qquad \left(-2\pi i x\right)$$

1) $g$ и $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ непрекидне

2) $I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \, dx = 1 < +\infty$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right| dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\pi x^2} \cdot 2\pi x \right| dx = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cdot x \, dx$ $\quad x^2 = t,\ 2x\,dx = dt$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi t} \cdot \frac{dt}{2} < +\infty$$

$\Rightarrow \int \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right| dx$ равномерно конв. (Вајерштрас)

$-\infty$ $\alpha$ $\xi$ $\quad$ $-\infty$ $\quad$ $0$ $\quad$ $0$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right| dx$ равномерно конв. (Вайерштрас)

1,2,3 $\Rightarrow I'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \xi} dx = -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cdot x \cdot \sin(2\pi x\xi)\, dx = \left( e^{-\pi x^2} \cdot \sin(2\pi x\xi) \right)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cdot 2\pi\xi \cdot \cos(x\xi)\, dx = -2\pi \cdot \xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} \cos(x\xi)\, dx = -2\pi\xi \cdot I(\xi)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I'(\xi) + 2\pi\xi \cdot I(\xi) = 0 \\ I(0) = 1 \end{array}\right\} \quad I(\xi) = e^{-\pi\xi^2}, \text{ т.е. } \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \varphi(\xi).$$

② $\mathcal{F}$ се може дефинисати и за $f \in L^1(\mathbb{R})$ Израчунати $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}]$ и доказати да није елемент $S(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(x) \cdot e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \frac{1}{-2\pi i\xi} \left( e^{-2\pi i\xi} - e^{2\pi i\xi} \right) = \quad (\xi \neq 0)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\xi} \cdot \left( -2i\sin(2\pi\xi) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi}$$

$$\mathcal{F}[f](0) = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, & \xi \neq 0 \\ 2, & \xi = 0 \end{cases}$$

$\hat{f}(\xi) \notin S(\mathbb{R})$ јер. $\quad \xi \cdot \hat{f}(\xi) \not\to 0$ $\quad \xi \to \pm\infty$

**Својства ФТ:**

1) $\left(\mathcal{F}[\varphi]\right)^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}\left[(-2\pi i x)^k \varphi(x)\right](\xi)$

2) $\mathcal{F}\left[\varphi^{(k)}\right](\xi) = (2\pi i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$

Важи $\mathcal{F}[\varphi] \in S(\mathbb{R})$ ако $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Даље, $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ и још:

- $\mathcal{F}$ је бијекција
- $\exists \mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ тц. $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] = \varphi, \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ су линеарне и непрекидне
- $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \cdot e^{2\pi i \xi x} \, d\xi$, $\psi \in S(\mathbb{R})$.

③ Израчунати $\mathcal{F}[\varphi](\xi)$, $\varphi(x) = x^2 \cdot e^{-\pi x^2}$

$\psi(x) = e^{-\pi x^2}$. $\quad \mathcal{F}[\psi''](\xi) = (2\pi i \xi)^2 \cdot \mathcal{F}[\psi](\xi) = -4\pi^2 \xi^2 \cdot e^{-\pi \xi^2}$

$$\psi''(x) = \left(e^{-\pi x^2} \cdot (-2\pi x)\right)' = e^{-\pi x^2} \cdot \left(-2\pi + (-\pi \cdot 2x)^2\right) = 2\pi e^{-\pi x^2} \cdot (2x^2 - 1)$$

$$= 4\pi \varphi(x) - 2\pi \psi(x)$$

$$4\pi \mathcal{F}[\varphi](\xi) - 2\pi \underbrace{\mathcal{F}[\psi](\xi)}_{e^{-\pi \xi^2}} = -4\pi^2 \xi^2 e^{-\pi \xi^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[\varphi](\xi) = e^{-\pi \xi^2} \left(\frac{1}{2} - \pi \xi^2\right)$$

**Деф.** $S(\mathbb{R}^n) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta \varphi)(x)| < +\infty \}$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$

$$(D^\beta \varphi)(x) = \frac{\partial^{|\beta|} \varphi}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}(x), \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$$

$\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \, dx$

④ $\varphi(x,y) = e^{-4x^2 - 4y^2 + 2xy}$. Доказати $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и наћи $\mathcal{F}[\varphi]$.

$$|(x,y)^\alpha (D^\beta \varphi)(x,y)| = |P(x,y) \cdot e^{-4x^2 - 4y^2 + 2xy}| \le e^{-3(x^2+y^2)} \cdot |P(x,y)| \xrightarrow[\|(x,y)\| \to \infty]{} 0$$

↑ полином

Идеја: дијагонализовати квадратну форму експ

$$-4x^2-4y^2+2xy = [x\ \ y]\underbrace{\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}}_{A}[x\ \ y]^T$$

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \qquad \text{смена: } \begin{matrix}-x+y=a\\ x+y=b\end{matrix}$$

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-4x^2-4y^2+2xy}\cdot e^{-2\pi i\langle(x,y),\xi\rangle}\,dx\,dy =$$

смена је $\mathbb{R}^2$-дифео $\rightarrow$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{5}{2}a^2-\frac{3}{2}b^2}\cdot e^{-\pi i a(\xi_2-\xi_1)}\cdot e^{-\pi i b(\xi_2+\xi_1)}\,da\,db$$

фубини $\rightarrow$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{15}}\, e^{-\frac{\pi^2}{10}(\xi_1-\xi_2)^2}\cdot e^{-\frac{\pi^2}{6}(\xi_1+\xi_2)^2}$$

## Задаци за вежбање

(1) $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

а) $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$

б) $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|x\|^k|D^\beta f(x)| < \infty$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$, $\forall\beta\in\mathbb{N}_0^n$

в) $\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|^k\cdot D^\beta f(x) = 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall\beta\in\mathbb{N}_0^n$

г) $\lim_{\|x\|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$

(2) Нека је $g\in S(\mathbb{R}^n)$. Доказати да је пресликавање $T: S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^n)$ дато са $T(f) = f\cdot g$ непрекидно.

(3) Нека је $S_p(\mathbb{R}) = \{f\in S(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x),\ \forall x\in\mathbb{R}\}$. Наћи најмање $k\in\mathbb{N}$ тј. $\mathcal{F}^{\circ k}[f] = \underbrace{\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\ldots\circ\mathcal{F}}_{k}[f] = f$, $\forall f\in S_p(\mathbb{R})$.

(4) Нека су $f\in S(\mathbb{R}^n)$ и $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $g(x) = f(a\cdot x)$. Доказати да

④ Нека су $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) = f(a \cdot x)$. Доказати да $g \in S(\mathbb{R}^n)$ и израчунати $\mathcal{F}[g]$ преко $\mathcal{F}[f]$.

⑤ Доказати да је $S(\mathbb{R}) \subsetneq L^p(\mathbb{R})$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$

⑥ Доказати $\varphi \in S(\mathbb{R})$ и израчунати $\mathcal{F}[\varphi]$ за $\varphi(x) = e^{-x^2} \cdot \sin x$.