Задаци за вежбање из ДЈ за Р смер 2022/2023

асистент: Душан Дробњак

(I) Једначине које се директно решавају

ДЈ која раздваја променљиве и једначине које се своде на њу, линеарна ДЈ и једначине које се своде на њу, ДЈ са тоталним диференцијалом и интеграциони фактор, смене, скицирање решења, токови

1. За $\alpha > 0$ дата је диференцијална једначина

$$\frac{xx'}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{8t^2+x^2+1}{2t^2+x^2+1}. \tag{$\star$}$$

   (а) Трансформисати једначину ($\star$) сменом $v(t) = \sqrt{x(t)^2+\alpha}$.

   (б) Решити једначину ($\star$) за једно $\alpha > 0$ по избору.

2. Наћи Кошијева решења диференцијалне једначине $x'' + t^5 x' = t^5 (x')^7$ са условима

   (а) $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$;

   (б) $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

3. Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења

$$\frac{dT_1(t)}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$

где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као

$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$

где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

   (а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.

   (б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).

4. Дата је диференцијална једначина $(t + 2x)x' = kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t$.

   (а) Наћи један пар вредности $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ тако да се сменом $y = x^m + tx$ једначина своди на линеарну диференцијалну једначину и решити је у том случају.

   (б) Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

5. Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = \frac{2t}{x}$, не решавајући је. Посебно издвојити (означити) на скици по један пример за следећа решења (у смислу реалних функција):

   (а) Решење које је дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$;

   (б) Решење које је део праве.

   За које захтеве од (а) и (б) постоји јединствено решење, а за које више њих?

6. Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

7. Наћи решење диференцијалне једначине $tx' = \sin t - 2x$ које пролази кроз тачку $(\pi/2, 0)$. Који је максимални интервал дефинисаности тог решења?

8. Решити диференцијалну једначину $\left(x\operatorname{tg}t + \frac{e^{tx}}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t + t\operatorname{tg}t\,\mathrm{d}x = 0$.

9. Који је интервал дефинисаности решења диференцијалне једначине $t^3x' + t^2x - x^2 = 2t^4$ за које важи $x(1) = 3/2$?

10. Решити диференцијалну једначину $t\ln tx'\operatorname{tg}x + 1 - t\cos x = 0$.

11. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$2\sqrt{xt} = \frac{x - tx'}{x}$$

на области $\{t > 0, x > 0\}$. Наћи и партикуларно решење које тангира параболу $x = t^2$.

12. Решити диференцијалну једначину $2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t + (3t^2x^2 + 4x)x' = 0$.

(II) **Теореме**

Пикарова и Пеанова теорема, токови

1. Дат је почетни проблем $x' = \frac{\chi_{[0,2]}(x)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(1) = x_0$, $t \in [0,2]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пикарове теореме, ако је:
   (а) $x_0 = 1$,
   (б) $x_0 = 2$,
   (в) $x_0 = 3$.

2. Дат је Кошијев проблем $x' = x - t + 1$, $x(t_0) = x_0$.
   (а) Доказати да су за произвољне t_0 и x_0 задовољени услови Пикарове теореме.
   (б) Формирати итеративни низ функција из доказа Пикарове теореме и на тај начин одредити решење у случају $t_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

3. Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t) = (t-1)^2P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t = 1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције?
   Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1) = x'(1) = 0$.

4. Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x' = |x|\cos t$, $x(0) = 0$, не решавајући диференцијалну једначину.

5. Наћи параметар $a \in \mathbb{R}$ за који је пресликавање $\phi^t(x) = x(e^{2t} + at)$ једнопараметарска фамилија пресликавања. Које је векторско поље које дефинише ϕ^t у том случају?

(III) **Линеарне диференцијалне једначине**

Експонент матрице, линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима, линеарне ДЈ са константним коефицијентима

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} e & 0 & e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$.
   (а) Решити систем $X' = AX$.
   (б) Наћи барем једну матрицу B тако да важи $e^B = A$ или доказати да таква не постоји.

2. Дата је диференцијална једначина $X' = AX$, где је

$$A = \begin{bmatrix} \star & 2 & \star \\ \star & -3 & \star \\ \star & \star & -3 \end{bmatrix}.$$

(а) Заменити $\star$ у матрици A бројевима тако да једно решење једначине буде $X(t) = \begin{bmatrix} e^t - e^{-5t} \\ e^t + e^{-5t} \\ e^t \end{bmatrix}$.

(б) Наћи опште решење дате једначине (са матрицом добијеном у делу под (а).

(в) Наћи сва решења система за која важи $X'(0) = 2X(0)$.

3. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$, где су $\alpha, \beta > 0$. Решити систем $X' = AX$ и у зависности од почетне вредности $X(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, наћи $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$.

4. Дат је Кошијев проблем $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, где је $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(а) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(б) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - t \\ 2 \end{bmatrix}$, знајући да се једно решење система може наћи у облику вектора чији су елементи полиноми по t.

5. (а) Одредити сва решења следећих једначина у скупу реалних квадратних матрица:

(1) $A^2 e^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (2) $e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(б) Решити Кошијев проблем $X' = e^{-A}X$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где је матрица A једно од решења једначине из дела (2), уколико решење постоји.

6. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, где је $a \in \mathbb{R}$.

(а) Одредити параметар a тако да за матрицу A важи $\det\left(\left(\frac{d}{dx}\left(e^{Ax}\right)\right)|_{x=2}\right) = 8e^{12}$.

(б) За матрицу A из дела (а), решити систем једначина $X' = AX$.

7. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x'' - 2x' - 3x)' = -16e^{-t} + 16te^{-t}$. Наћи и сва решења за која важи $x(0) = 1$ и која имају хоризонталну асимптоту кад $t \to +\infty$.

(IV) Парцијалне диференцијалне једначине

Метод карактеристика, метод првих интеграла

1. Методом карактеристика решити Кошијев проблем за парцијалну диференцијалну једначину првог реда:

$$(x + 4y)z'_x + (-x + 5y)z'_y + 2z = x, \quad x = 2y, z = \sin y + \frac{x}{5}.$$

2. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, а потом одредити криву која је у пресеку графика решења чији су почетни услови $u_1(0, y) = |y|$ и $u_2(0, y) = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

3. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине

$$yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + yx^5 z^2 (z^6 - 1)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

4. Наћи опште решење парцијалне диференцијалне једначине:

$$(y(x + y)^3 + z))z'_x + (x(x + y)^3 - z)z'_y = z(x + y).$$