Задаци за вежбање из ДЈА за М смер 2022/2023

асистент: Душан Дробњак

(I) Једначине које се директно решавају

ДЈ која раздваја променљиве и једначине које се своде на њу, линеарна ДЈ и једначине које се своде на њу, смене, ДЈ са тоталним диференцијалом и интеграциони фактор, скицирање решења

1. За $\alpha > 0$ дата је диференцијална једначина
$$\frac{xx'}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{8t^2+x^2+1}{2t^2+x^2+1}. \tag{$\star$}$$
   (а) Трансформисати једначину ($\star$) сменом $v(t) = \sqrt{x(t)^2+\alpha}$.
   (б) Решити једначину ($\star$) за једно $\alpha > 0$ по избору.

2. Наћи Кошијева решења диференцијалне једначине $x'' + t^5 x' = t^5 \left(x'\right)^7$ са условима
   (а) $x(2) = 3$, $x'(2) = 1$;
   (б) $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

3. Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења
$$\frac{dT_1(t)}{dt} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$
где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као
$$\frac{dT_2(t)}{dt} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$
где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
   (а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.
   (б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).

4. Дата је диференцијална једначина $(t+2x)x' = kx - \frac{2}{t}(x^m + tx) - t$.
   (а) Наћи један пар вредности $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ тако да се сменом $y = x^m + tx$ једначина своди на линеарну диференцијалну једначину и решити је у том случају.
   (б) Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{Z}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

5. Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = \frac{2t}{x}$, не решавајући је. Посебно издвојити (означити) на скици по један пример за следећа решења (у смислу реалних функција):
   (а) Решење које је дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$;
   (б) Решење које је део праве.

   За које захтеве од (а) и (б) постоји јединствено решење, а за које више њих?

6. Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

7. Наћи решење диференцијалне једначине $tx' = \sin t - 2x$ које пролази кроз тачку $(\pi/2, 0)$. Који је максимални интервал дефинисаности тог решења?

8. Решити диференцијалну једначину $\left(x \operatorname{tg} t + \frac{e^{tx}}{\cos^2 t}\right) \mathrm{d}t + t \operatorname{tg} t \, \mathrm{d}x = 0$.

9. Који је максимални интервал дефинисаности решења диференцијалне једначине $t^3 x' + t^2 x - x^2 = 2t^4$ за које важи $x(1) = 3/2$?

10. Решити диференцијалну једначину $t \ln t x' \operatorname{tg} x + 1 - t \cos x = 0$.

11. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$2\sqrt{xt} = \frac{x - tx'}{x}$$

на области $\{t > 0, x > 0\}$. Наћи и партикуларно решење које тангира параболу $x = t^2$.

12. Решити диференцијалну једначину $2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t + (3t^2x^2 + 4x)x' = 0$.

(II) **Линеарне диференцијалне једначине**

Скицирање фазних портрета линеарних аутономних система ДЈ у равни

1. Скицирати фазни портрет система $X' = AX$, ако је

   (а) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$; (б) $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$, где су $\alpha, \beta > 0$. Решити систем $X' = AX$, скицирати фазни портрет, и у зависности од почетне вредности $X(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, наћи $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$.

3. Дат је систем диференцијалних једначина $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + 2x_2 \\ -3x_2 \end{bmatrix}$. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ одредити тип фазног портрета датог система и скицирати фазни портрет по једног представника.

(III) **Теореме**

Пикарова и Пеанова теорема

1. Дат је почетни проблем $x' = \frac{\chi_{[0,2]}(x) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(1) = x_0$, $t \in [0, 2]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пикарове теореме, ако је:

   (а) $x_0 = 1$,

   (б) $x_0 = 2$,

   (в) $x_0 = 3$.

2. Дат је Кошијев проблем $x' = x - t + 1$, $x(t_0) = x_0$.

   (а) Доказати да су за произвољне t_0 и x_0 задовољени услови Пикарове теореме.

   (б) Формирати итеративни низ функција из доказа Пикарове теореме и на тај начин одредити решење у случају $t_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

3. Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t) = (t-1)^2 P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t = 1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције?
   Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1) = x'(1) = 0$.

4. Испитати егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема $x' = |x| \cos t$, $x(0) = 0$, не решавајући диференцијалну једначину.

(IV) **Токови и векторска поља**

Токови, једнопараметарске фамилије, векторска поља и комутатор

1. Наћи параметар $a \in \mathbb{R}$ за који је пресликавање $\phi^t(x) = x(e^{2t} + at)$ једнопараметарска фамилија пресликавања. Које је векторско поље које дефинише ϕ^t у том случају?

2. Доказати да је са $\phi^t(x_1, \ldots, x_n) = e^t(x_1, \ldots, x_n)$ задат ток радијалног векторског поља $R_1 = (x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Наћи ток радијалног векторског поља $R_a = (ax_1, \ldots, ax_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} ax_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где је $a \in \mathbb{R}$ параметар. Скицирати у равни векторска поља R_1 и R_2 и њихове токове.

3. Наћи ток јединичног радијалног векторског поља $P = \frac{(x_1,\ldots,x_n)}{\|x\|} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x\|} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Скицирати у равни векторско поље P и његов ток.

4. Дато је векторско поље $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ и пресликавање $\psi^t \colon (x, y) \mapsto (\cos tx + \sin ty, -\sin tx + \cos ty)$. Наћи ток ϕ^t које је одређен векторским пољем X и векторско поље Y које одређује ток ψ^t. Наћи $(\phi^t)_* X$ и $(\phi^t)_* Y$. Да ли токови ϕ и ψ комутирају?

5. Дата су векторска поља $X = \frac{\partial}{\partial z}$ и $Y = z\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}$ у $\mathbb{R}^3$.

   (а) Израчунати комутаторе $[X, Y]$ и $[Y, [Y, X]]$.

   (б) Наћи токове за векторска поља X и Y. Да ли ти токови комутирају? Испитати по дефиницији да ли су ти токови једнопараметарске фамилије?

   (в) Да ли постоји површ $\mathcal{S}$ у $\mathbb{R}^3$ тако да су векторска поља X и Y тангентна на $\mathcal{S}$?

6. Дата су векторска поља $X = x\frac{\partial}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial}{\partial y}$ и $Y = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ у $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји дифеоморфизам φ и околина U тачке (x_0, y_0) такви да је $\varphi_* X = \frac{\partial}{\partial x}$ на U? Да ли постоје дифеоморфизам ψ и околина U тачке (x_0, y_0) такви да је $\psi_* X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\psi_* Y = \frac{\partial}{\partial y}$ на U?

(V) **Основе Морсове теорије**

Критичне тачке функција, Морсове функције

1. Дата је сфера $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и функција $f \colon S^2 \to \mathbb{R}$. Пронаћи све критичне тачке функције f, скицирати их на S^2, и испитати да ли је f Морсова функција ако је:

   (а) $f(x, y, z) = z^2$;   (б) $f(x, y, z) = x + y$.

2. Дате су функције $f_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^3 + \alpha x$, за $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (а) У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ испитати да ли је f_α Морсова функција на $\mathbb{R}$.

   (б) Доказати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји Морсова функција $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да је $\|f_0 - g\|_\infty < \varepsilon$.