

$$\textcircled{1} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Доказати да је $f * \delta = f$.

$\text{supp } \delta = \{0\}$ - концентрисан

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\delta * \varphi} \rangle$$

← потребно за доказати шта је ово прво

$$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle \widetilde{\delta * \psi}, \varphi \rangle = \langle \widetilde{\delta}, \widetilde{\psi * \varphi} \rangle = \langle \delta, \widetilde{(\psi * \varphi)} \rangle = \widetilde{(\psi * \varphi)}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(y) dy = T_\varphi(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$$

$$(\widetilde{\psi * \varphi})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\psi}(x-y) \cdot \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-x) \cdot \psi(y) dy$$

$$\Rightarrow \delta * \varphi = \varphi$$

$$\widetilde{(\psi * \varphi)}(x) = (\widetilde{\psi * \varphi})(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y+x) \cdot \psi(y) dy$$

$$\widetilde{(\psi * \varphi)}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(y) dy$$

$$\Rightarrow \langle f * \delta, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{\delta * \varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle \Rightarrow f * \delta = f.$$

горати: доказати (по же.) $\delta * f = f$.

Def. Линеарни диференцијални оператор са константним коефицијентима је израз облика

$$p(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \cdot D^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{N}_0^n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$p(D): \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad p(D)(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \cdot D^\alpha f$$

Def. Дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ се каже фундаментално решење диференцијалног оператора

$$p(D) \text{ ако } p(D)(f) = \delta.$$

Примери: 1) Доказати смо да у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ важи $\Delta \log(x^2 + y^2) = 4\pi\delta$, то је

$$f = \frac{1}{4\pi} \log(x^2 + y^2) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \text{ фундаментално решење Лапласијана, тј. } \Delta = p(D) = D^{(2,0)} + D^{(0,2)}.$$

2) Доказати смо да у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ важи да је $5\theta e^{2x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ решење $y' - 2y = 5\delta$, то је

$$f = \theta e^{2x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ фундаментално решење оператора } p(D) = D^{(1)} - 2D^{(0)}.$$

$$p(D)(f) = \delta * f, \quad f, g \in D'(\mathbb{R})$$

$$p(D)(f) * g = \delta * g$$

$$p(D)(f * g) = g$$

$$(D^\alpha f) * g = D^\alpha (f * g)$$

$$\Rightarrow p(D)(f) * g = p(D)(f * g)$$

$\Rightarrow f * g$ je решение дифференциального уравнения $p(D)y = g$, за $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ с компактными носителями $(g * f)$

② Найти явное решение уравнения $y' - 2y = \delta'$.

$$g = \delta'$$

$f = \theta e^{2x} \in D'(\mathbb{R})$ je фунг. решение $\Rightarrow$ решение $y = g * f = \delta' * (\theta e^{2x}) = (\theta e^{2x}) * \delta'$

$$\varphi \in D(\mathbb{R})$$

$$\langle \theta e^{2x} * \delta', \varphi \rangle = \langle \theta e^{2x}, \tilde{\delta}' * \varphi \rangle = \langle \theta e^{2x}, -\delta' * \varphi \rangle$$

покажем $\tilde{\delta}' = -\delta'$

$$\psi \in D(\mathbb{R})$$

$$\langle \tilde{\delta}', \psi \rangle = \langle \delta', \tilde{\psi} \rangle = -\langle \delta, \tilde{\psi}' \rangle = -(\tilde{\psi}')'(0) = -\psi'(-0) \cdot (-1) = \psi'(0) = \langle \delta, \psi' \rangle = -\langle \delta', \psi \rangle$$

$$\tilde{\psi}'(x) = (\psi(-x))' = \psi'(-x) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \tilde{\delta}' = -\delta'$$

найдем $\delta' * \varphi: \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle \delta' * \varphi, \psi \rangle = \langle \delta', \tilde{\psi} * \psi \rangle = \langle \delta', x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(x-y) \psi(y) dy \rangle = \langle \delta', x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(y-x) \psi(y) dy \rangle =$$

$$= - \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(y-x) \psi(y) dy \right)'(0) = - \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi'(y-x) \cdot \underbrace{(-1)}_{(y-x)'_x = -1} \cdot \psi(y) dy \right)(0) = - \int_{\mathbb{R}} \psi'(y) \psi(y) dy$$

используем формулу Кронекера
для ψ и ψ с компактными носителями
и все же так же

$$\Rightarrow \langle \delta' * \varphi, \psi \rangle = -\langle T_{\psi'}, \psi \rangle = \langle -\psi', \psi \rangle \Rightarrow \delta' * \varphi = -\psi'$$

$$\langle \theta e^{2x} * \delta', \varphi \rangle = \langle \theta e^{2x}, -\delta' * \varphi \rangle = \langle \theta e^{2x}, \varphi' \rangle = - \int_{-M}^M \theta(x) e^{2x} \varphi'(x) dx = -e^{2x} \varphi(x) \Big|_0^M + \int_0^M \varphi(x) \cdot 2e^{2x} dx$$

$$\text{supp } \varphi \subseteq [-M, M]$$

$$= -e^{2M} \varphi(M) + e^{2 \cdot 0} \varphi(0) + \int_0^M 2\theta(x) e^{2x} \varphi(x) dx =$$

$$\langle \theta e^{2x} * \delta, \varphi \rangle = \langle \theta e^{2x}, -\varphi' \rangle = \langle \theta e^{2x}, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta e^{2x} \varphi'(x) dx$$

$$\text{supp } \varphi \subseteq [-M, M]$$

$$\text{supp } \varphi' \subseteq [-M, M]$$

$$= -e^{2M} \varphi(M) + e^{2\theta} \varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) 2e^{2x} \varphi(x) dx =$$

$$= \varphi(0) + \langle 2\theta e^{2x}, \varphi \rangle = \langle \delta + 2\theta e^{2x}, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \text{решение в } \delta + 2\theta e^{2x}$$

③ Найти общее решение уравнения $y' - 2y = \delta'$.

$$y_p = \delta + 2\theta e^{2x} \Rightarrow \underline{y_p' - 2y_p = \delta'}$$

$$\text{сделаем: } v = y - y_p \Rightarrow y = v + y_p$$

$$(v + y_p)' - 2(v + y_p) = \delta'$$

$$\underline{v' + y_p' - 2v - 2y_p = \delta'}$$

$$\Downarrow$$

$$v' - 2v = 0 \quad (\text{уравнение линейное})$$

$$\vdots$$

$$v = c \cdot e^{2x}, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{общее решение: } c \cdot e^{2x} + \delta + 2\theta e^{2x}, c \in \mathbb{R}.$$

Пространство Собольева

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ область, } 1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{Def. } W^{k,p}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \underline{D^\alpha f \in L^p(\Omega)}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k \right\} \rightarrow \text{пространство Собольева}$$

↳ де производные понимаются
в смысле дифференцирования

$$\text{куп. } W^{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', f'' \in L^3(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\bullet W^{k,p} \text{ — банахово, за норму ее можно взять: } \|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

$$\text{Def. } H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq k \right\}$$

нпр. $H^1((0,1)) = \{ f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^2(0,1), f' \in L^2(0,1) \}$

• H^k је Хилбертов простор, са скаларним произвогом се може узети: $\langle f, g \rangle_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2}$

④ Нека је $1 \leq p < \infty$ и нека је $X_p([a,b]) = \{ f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in AC[a,b] \text{ и } f' \in L^p([a,b]) \}$.
 Докажи да је $X_p = W^{1,p}([a,b])$.
 (класичан извод)

Користимо две чињенице: Нека је $f \in L^1(a,b)$. Тада је $f' \in L^1(a,b) \iff f \in AC[a,b]$.
 (*) $\hookrightarrow$ извод у $D'(a,b)$.

И упритом тада се класичан извод f' поклапа са изводом f' у смислу дистрибуције.

Напомена: $AC(a,b) = AC[a,b]$, $L^p(a,b) = L^p[a,b]$.

$X_p \subseteq W^{1,p}$: $f \in X_p \Rightarrow f \in AC[a,b] \Rightarrow f \in C[a,b] \Rightarrow f \in L^2([a,b])$, $\forall p$

$\Rightarrow f \in L^1([a,b]) \xrightarrow{(*)} f' \in L^1([a,b])$ и $f' = f' \rightarrow y D'$
 ↓
 класичан

$f \in X_p \Rightarrow f' \in L^p([a,b]) \Rightarrow f' \in L^p([a,b])$
 ↓
 класичан
 ↓
 $y D'$

$\xrightarrow{q=p: f \in L^p([a,b])} f \in W^{1,p}$

$W^{1,p} \subseteq X_p$: $f \in W^{1,p}[a,b] \Rightarrow f \in L^p(a,b) \text{ и } f' \in L^p(a,b)$

$f \in L^p(a,b) \stackrel{?}{\Rightarrow} f \in L^1(a,b)$

$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f| dx = \int_a^b |f| \cdot 1 dx \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b 1^q dx \right)^{1/q} = \|f\|_{L^p} \cdot (b-a)^{1-1/p} < \infty \Rightarrow f \in L^1(a,b)$

Хелдер: $f \in L^p(a,b)$
 $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ /

/ $X_{\text{Hölder}}$: $f \in L^p(a,b)$

$$g \in L^q(a,b) \Rightarrow \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$1 < p, q < +\infty$$

$$f, f' \in L^p(a,b) \Rightarrow f, f' \in L^1(a,b) \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} f \in AC[a,b] \Rightarrow \exists f' \text{ классический и } f' \in L^p(a,b) \\ \Rightarrow f \in X_p$$