

Ред дистрибуције

Т Линеарни функционал $f: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}(c)$ је дистрибуција ако $\forall K \subseteq \Omega$ компактан $\exists c > 0 \exists m \in \mathbb{N}_0$ тј.

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \cdot \sum_{|a| \leq m} \sup_K |D^a \varphi|, \quad \forall \varphi \in D(K)$$

$$D(K) = \{ \varphi \in D(\Omega) \mid \Omega \subseteq K \}$$

$$(\forall K \exists c \exists m)$$

деф. Река је $f \in D'(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ако $\exists m \in \mathbb{N}_0 \forall K \subseteq \Omega$ компактан $\exists c > 0$ тј.

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \cdot \sum_{|a| \leq m} \sup_K |D^a \varphi|, \quad \forall \varphi \in D(K)$$

$$(\exists m \forall K \exists c)$$

онда кажемо да је f реда највише m .

Ако је дистрибуција реда највише 0, онда кажемо да је реда 0.

Ако је дистрибуција реда највише m , а није реда највише $m-1$, онда кажемо да је реда m . ($m \geq 1$)

Ако $\exists m$ тј. је f реда највише m , онда кажемо да је бесконачног реда.

Напомена: $T \Rightarrow$ свака дистрибуција је локално коначног реда

① $f \in L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow f$ је реда нула

$m=0, K \subseteq \Omega$ произв, тражимо $c > 0, \varphi \in D(K)$

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx = \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \sup_K |\varphi(x)| \cdot \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_{c > 0} = c \cdot \sup_K |\varphi(x)|$$

$$\sum_{|a| \leq 0} \sup_K |D^{(a)} \varphi|$$

$$a = (0, \dots, 0)$$

② $\delta' \in D'(\mathbb{R})$ је реда 1.

реда највише 1: $|\langle \delta', \varphi \rangle| \stackrel{?}{\leq} c \cdot \sum_{|a| \leq 1} \sup_K |D^a \varphi| = c \cdot (\sup_K |D^{(0)} \varphi| + \sup_K |D^{(1)} \varphi|)$

$m=1, K \subseteq \mathbb{R}$ произв, $\varphi \in D(K)$

$$|\langle \delta', \varphi \rangle| = |-\langle \delta, \varphi' \rangle| = |-\varphi'(0)| = |\varphi'(0)| \leq \sup_K |\varphi'| \leq 1 \cdot (\sup_K |\varphi| + \sup_K |\varphi'|)$$

$\rightarrow 1^\circ 0 \notin K: \varphi'(0) = 0 \checkmark$

$2^\circ 0 \in K: |\varphi'(0)| \leq \sup_K |\varphi'|$

није релативно највише 0: ПНС релативно је највише нула

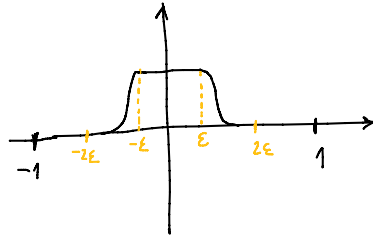
$$\forall K \subseteq \Omega, \exists c > 0 \quad |\langle \delta'_1 \varphi \rangle| \leq c \cdot \sup_K |\varphi|$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K)$$

$$|\varphi'(0)| \leq c \cdot \sup_K |\varphi|$$

одређено φ такво да не важи ($0 < \varepsilon < 1$ одређено)

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| > 2\varepsilon \end{cases}, \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \eta(x) \leq 1$$



$$K = [-1, 1], \quad c = 2\varepsilon$$

$$\varphi(x) = x \cdot \eta(x) \in \mathcal{D}(K)$$

$$\varphi'(0) = (x')_{x=0} = 1$$

$$\sup_K |\varphi| = \sup_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} |\varphi| \leq \sup_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} |\eta| \cdot \sup_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon]} |x| = 1 \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon$$

$$|\varphi'(0)| \leq c \cdot \sup_K |\varphi| \Rightarrow 1 \leq c \cdot 2\varepsilon, \quad \text{узмемо } \varepsilon = \frac{1}{4c} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{!}$$

③ Ако $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ има компактну носач, онда је f локално релативно.

$\uparrow$
 $\mathcal{S}_f = \text{supp}(f)$ компактна

$\Rightarrow \forall K \exists m \exists c$, нама треба $\exists m \forall K \exists c$

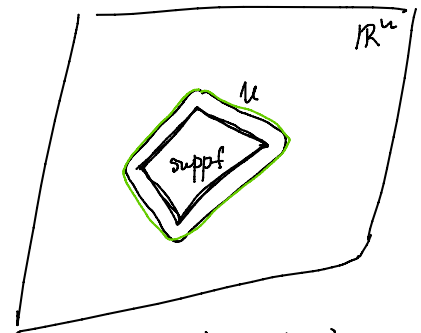
$\hookrightarrow$ узмемо да $K = \text{supp}(\varphi) \Rightarrow \exists m$ - узмемо да m
 $\exists c$

одређено да показујемо да је f релативно највише m

$$\text{знамо: } |\langle f, \varphi \rangle| \leq c \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K) \quad (*)$$

одређено: $\tilde{K}$ - породица, $\exists \tilde{c} > 0$ такво.

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \tilde{c} \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{K})$$

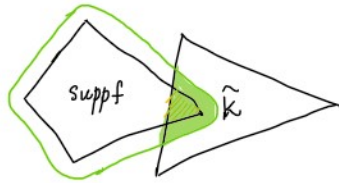


$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < 1\} \supseteq \text{supp}(f)$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \in U^c \end{cases}, \quad 0 \leq \eta(x) \leq 1$$

$\eta \in \mathcal{D}(U)$, $\text{supp}(\eta)$ компактна

$\tilde{K}$ -yжeнo
 $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{K})$ иpонoл.



$$\varphi = \psi \varphi + (1-\psi) \varphi \quad (\text{pasujane jеgиnиce})$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| = |\langle f, \psi \varphi \rangle + \langle f, (1-\psi) \varphi \rangle| = |\langle f, \psi \varphi \rangle| \leq c \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \sup_K |D^k(\psi \varphi)| = c \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} \sup_{K \cap \tilde{K}} |D^k(\psi \varphi)| \leq c \cdot \sum_{|k| \leq m} \sup_{\tilde{K}} |D^k(\varphi \cdot \psi)|$$

(*) на $\psi \varphi \in \mathcal{D}(K \cap \tilde{K}) \subseteq \mathcal{D}(K)$

$1-\psi(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin K$
 $(1-\psi)\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f) \Rightarrow \langle f, (1-\psi)\varphi \rangle = 0$

$$\text{Bоmи нр: } |D^{(1)}(\varphi \cdot \psi)| = |D^{(1)}\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot D^{(1)}\psi| \leq \max \left\{ \sup_{\tilde{K}} |\varphi|, \sup_{\tilde{K}} |D^{(1)}\psi| \right\} \cdot \left(\sup_{\tilde{K}} |\varphi| + \sup_{\tilde{K}} |D^{(1)}\varphi| \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{C'}$

ио лeжeжyбoм иpавилy иaкo бoм и гaвe ...

нoвo $\tilde{C}$ ce cocтaвляeт oг иaпoт c и paзниx c' кoje cy вышe из-зa oг φ .

$$\Rightarrow |\langle f, \varphi \rangle| \leq \tilde{C} \cdot \sum_{|k| \leq m} \sup_K |D^k \varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{K})$$

Кoнвoлюция

1) $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (или нoмe oцeнeннe $L^1(\mathbb{R}^n)$)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \quad (\text{бoм кoмyтaтoвнoст, acoциaтoвнoст, дистрибутивнoст y oгн. нa +})$$

2) $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f * \theta, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\theta} * \varphi \rangle, \quad \text{oбaкo жe гдe } f * \theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\tilde{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \tilde{\theta}(x) = \theta(-x)$$

④ Иcпoлyзyем $\delta * \theta, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\langle \delta * \theta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tilde{\theta} * \varphi \rangle = (\tilde{\theta} * \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y) \varphi(y) dy = T_\theta = \theta.$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (\tilde{\theta} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\theta}(x-y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(y-x) \varphi(y) dy$$

Бoмe oбoднe: $D^\alpha(f * \theta) = (D^\alpha f) * \theta = f * (D^\alpha \theta)$

важно особине: $D^\alpha(f * \theta) = (D^\alpha f) * \theta = f * (D^\alpha \theta)$

лема 1: $f \in D'(\mathbb{R}^n), \theta \in D(\mathbb{R}^n)$, онда је $f * \theta \in D'(\mathbb{R}^n)$ представљена тачком функцијом

$$f * \theta = T_g, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

лема 2: $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ са компактним носачем, $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$, онда је $f * \theta \in D'(\mathbb{R}^n)$ представљена тачком функцијом

$$f * \theta = T_g, g \in D(\mathbb{R}^n)$$

3) $f, g \in D'(\mathbb{R}^n)$, g -компактан носач, $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f * g, \psi \rangle = \langle f, \tilde{g} * \psi \rangle$$

за $f \in D'(\mathbb{R}^n), g \in D'(\mathbb{R}^n), \tilde{f} \in D'(\mathbb{R}^n), \psi \in D(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \tilde{f}, \psi \rangle = \langle f, \tilde{\psi} \rangle$$

g комп. носач $\Rightarrow \tilde{g}$ комп. носач $\Rightarrow \tilde{g} * \psi \in D(\mathbb{R}^n)$
 $\uparrow$
 лема 2

$$\langle g * f, \psi \rangle = \langle g, \tilde{f} * \psi \rangle$$

лема 1 $\Rightarrow \tilde{f} * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g$ има компактн носач, па може да делује на тачку функцију.

Коришћена: како $g \in D'(\mathbb{R}^n)$ са $\text{supp } g$ компактн делује на $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$?

$$\begin{aligned} \langle g, \psi \rangle &= \langle g, (1-\psi)\psi + \psi\psi \rangle = \\ &= \langle g, \cancel{(1-\psi)}\psi \rangle + \langle g, \psi\psi \rangle = \\ &= \langle g, \underbrace{\psi\psi}_{\in D(\mathbb{R}^n)} \rangle \end{aligned}$$

+ ово не зависи од избора ψ



$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \text{supp } g \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

ψ тачка u $0 \leq \psi \leq 1$

и даје важи: $D^\alpha(f * \theta) = (D^\alpha f) * \theta = f * (D^\alpha \theta)$